3MJS/3MJ

冬期講習　確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

中３数学

中３東大数学

【1】(1) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \frac{1}{1+\tan^2\theta}\\ &= \frac{1}{1+(-2)^2} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$\cos\theta < 0$ なので，

$$\cos\theta = -\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}} \quad (答)$$

また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \tan\theta\cdot\cos\theta\\ &= (-2)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \quad (答)\end{aligned}$$

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗して，

$$\begin{aligned}\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta &= \frac{1}{9}\\ 1 + 2\sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{9}\\ \therefore\ \sin\theta\cos\theta &= -\frac{4}{9}\end{aligned}$$

①

$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta+\cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta+\cos\theta)\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{3}\\ &= \boldsymbol{\frac{13}{27}} \quad (答)\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\ &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\ &= -\boldsymbol{\frac{9}{4}} \quad (答)\end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}&(\sin\theta-\cos\theta)^2\\ &= \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\\ &= 1 - 2\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\\ &= \frac{17}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sin\theta - \cos\theta = \pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{17}}{3}} (答)$$

(3) ①

$$3\tan\theta = \sqrt{3}$$
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ここで，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ であるので，

$\theta = \mathbf{30^\circ},\ \mathbf{210^\circ}$ （答）

②

$$2\cos\theta - 1 > 0$$
$$\cos\theta > \frac{1}{2}$$

ここで，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ であるから

$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta < 60^\circ,\ 300^\circ < \theta < 360^\circ}$ （答）

③

$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta + 5\sin\theta - 4 &\leqq 0 \\ 2(1-\sin^2\theta) + 5\sin\theta - 4 &\leqq 0 \\ -2\sin^2\theta + 5\sin\theta - 2 &\leqq 0 \\ 2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 &\geqq 0 \\ (\sin\theta - 2)(2\sin\theta - 1) &\geqq 0 \end{aligned}$$

ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ なので，

$$\sin\theta - 2 < 0$$

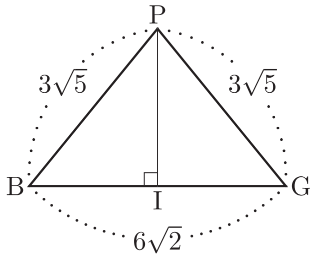
よって，

$$2\sin\theta - 1 \leqq 0$$
$$\sin\theta \leqq \frac{1}{2}$$

ゆえに，

$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ,\ 150^\circ \leqq \theta < 360^\circ}$ （答）

【2】(1) 三平方の定理より，



$$\mathrm{BP} = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\mathrm{GP} = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\mathrm{BG} = \sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

よって，$\triangle$BPG において，P から BG に下ろした垂線の足を I とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PI}^2 &= \left(3\sqrt{5}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 27\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{PI} = 3\sqrt{3}$
これより，$\triangle$BPG の面積 S は，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3} \\ &= \boldsymbol{9\sqrt{6}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 四面体 BCGP について，体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{CGP}\cdot\mathrm{BC} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\right)\cdot 6 \\ &= 18\end{aligned}$$

よって，C から $\triangle$BPG に下ろした垂線の長さを h とすれば，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}Sh \\ 18 &= \frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{6}\cdot h \\ \therefore\ h &= \boldsymbol{\sqrt{6}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) 内接球の半径を r とすると，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot r\left(\triangle\mathrm{BCG}+\triangle\mathrm{BCP}+\triangle\mathrm{CGP}+\triangle\mathrm{BPG}\right) \\ 18 &= \frac{1}{3}\cdot r\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3+9\sqrt{6}\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot r(36+9\sqrt{6}) \\ &= 3r(4+\sqrt{6})\end{aligned}$$

よって，

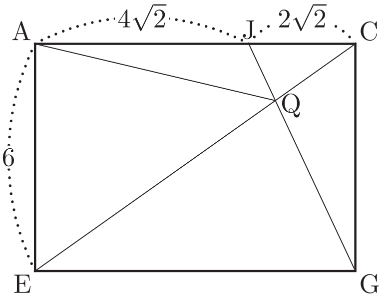
$$\begin{aligned}r &= \frac{18}{3(4+\sqrt{6})} \\ &= \frac{6(4-\sqrt{6})}{(4+\sqrt{6})(4-\sqrt{6})} \\ &= \boldsymbol{\frac{12-3\sqrt{6}}{5}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4) AC と BP の交点を J とする．

すると，$\triangle \mathrm{ABJ} \backsim \triangle \mathrm{CPJ}$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AJ} : \mathrm{CJ} &= \mathrm{AB} : \mathrm{CP} \\ &= 2 : 1\end{aligned}$$

立方体を A，C，G，E を通る平面で切ると，Q は右の図のようになる．



ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{CE}^2 &= \mathrm{AE}^2 + \mathrm{AC}^2 \\ &= 108\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{CE} = 6\sqrt{3}$

また，$\triangle \mathrm{JQC} \backsim \triangle \mathrm{GQE}$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{CQ} : \mathrm{QE} &= \mathrm{JC} : \mathrm{GE} \\ &= 1 : 3\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{EQ} = \dfrac{3}{1+3}\mathrm{CE} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ また，$\cos\angle \mathrm{AEQ} = \dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EC}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ これより，

$$\begin{aligned}\mathrm{AQ}^2 &= 6^2 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\cdot 6\cdot \frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 36 + \frac{243}{4} - 54 = \frac{171}{4}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AQ} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{19}}{2}}$　　(答)

【3】(1) 3 人の選び方は，全部で，

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{（通り）}$$

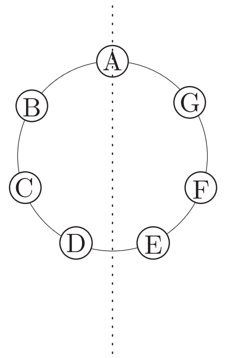
また，男子を 3 人選ぶ選び方は，全部で，

$${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{（通り）}$$

よって，女子を少なくとも 1 人選ぶ選び方は，

$56 - 10 = \mathbf{46}$ **（通り）**　　(答)

(2)



① 図の Ⓐ に黒球を固定すると，残りの 6ヶ所に赤球 4 個，白球 2 個を入れればよく，

$$\frac{6!}{4!2!} = \mathbf{15} \text{（通り）}\qquad\text{(答)}$$

② ① のうち，図の点線に関して対称な並び方を考えると，白球が，ⒷとⒼ，ⒸとⒻ，ⒹとⒺに入る場合の 3 通り．
これ以外の並び方は，点線に関してひっくり返すと一致するものが存在するので，できる数珠は，

$$\frac{15-3}{2} + 3 = \mathbf{9} \text{（通り）}\qquad\text{(答)}$$

(3) ① (6, 0)，(5, 1)，(4, 2)，(3, 3) の **4 通り**　　(答)

② 2 つの箱を A，B とすると，

$$(A,\ B) = (6,\ 0),\ (5,\ 1),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3),\ (2,\ 4),\ (1,\ 5),\ (0,\ 6)$$

の **7 通り**　　(答)

③ 6 個の球をそれぞれ箱 A，B のどちらに入れるかを考えて，

$2^6 = \mathbf{64}$ **（通り）**　　(答)

(4) 全ての取り出し方は，

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{（通り）}$$

白球 3 個，黒球 1 個を取り出す取り出し方は，

$${}_4C_3 \times {}_3C_1 = 12 \text{（通り）}$$

白球 1 個，黒球 3 個を取り出す取り出し方は，

$${}_4C_1 \times {}_3C_3 = 4 \text{（通り）}$$

これらの事象は互いに排反なので，求める確率は，

$$\frac{12}{35} + \frac{4}{35} = \mathbf{\frac{16}{35}}\qquad\text{(答)}$$

【4】(1) 4個の「右」と2個の「上」を並べる並べ方の総数に対応するので,

$$\frac{6!}{4!2!} = \mathbf{15}\ (\textbf{通り}) \qquad (答)$$

(2) サイコロを4回投げて,

1, 3, 5の目が3回, 2, 4の目が1回

出ればよいので,

$${}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{1}{6}} \qquad (答)$$

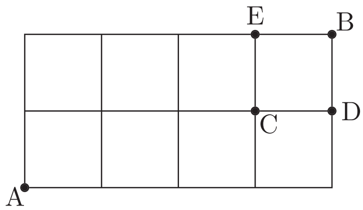
(3) サイコロを6回投げて,

1, 3, 5の目が4回, 2, 4の目が2回

出ればよいので,

$${}_6C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \mathbf{\frac{5}{48}} \qquad (答)$$

(4) 6回目で, 図の点DかEにいる場合を考える.



(i) 6回目にDにいる確率は, 6回で,

1, 3, 5が4回, 2, 4が1回, 6が1回

または,

1, 3, 5が5回, 2, 4が1回

出ればよいので, その確率は,

$$\frac{6\,!}{4\,!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{6\,!}{5\,!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{48} + \frac{1}{16}$$
$$= \frac{1}{6}$$

(ii) 6回目でEにいる確率は, 6回で,

1, 3, 5が3回, 2, 4が2回, 6が1回

または,

1, 3, 5が3回, 2, 4が3回

出ればよいので, その確率は,

$$\frac{6!}{3!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{6!}{3!3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{5}{36} + \frac{5}{54}$$
$$= \frac{25}{108}$$

求める確率は, (i)で7回目に2, 4が出るか, (ii)で7回目に1, 3, 5が出る確率なので,

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{25}{108} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} + \frac{25}{216}$$
$$= \mathbf{\frac{37}{216}} \qquad (答)$$

＜別解＞

7 回目までに B に到達する確率を考える．

7 回目までに B に到達するには，1，3，5 が少なくとも 4 回，

2，4 が少なくとも 2 回出ればよいので，

(i) 1，3，5 が 5 回，2，4 が 2 回

(ii) 1，3，5 が 4 回，2，4 が 3 回

(iii) 1，3，5 が 4 回，2，4 が 2 回，6 が 1 回

のいずれかであればよいので，その確率は，

$$\begin{aligned}
&{}_7\mathrm{C}_5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_7\mathrm{C}_4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{7!}{4!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\\
&=\frac{7}{96}+\frac{35}{432}+\frac{35}{288}\\
&=\frac{63+70+105}{864}\\
&=\frac{238}{864}
\end{aligned}$$

これから，(3) の場合を除けばよいので，求める確率は，

$$\frac{238}{864}-\frac{5}{48}=\boldsymbol{\frac{37}{216}} \qquad \text{(答)}$$