M1JS/M1J

冬期講習

解答

Z会東大進学教室

高1選抜東大数学

高1東大数学

問題

【1】(1)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+2}=-\boldsymbol{\frac{1}{3}}\qquad\text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(2+x)^2}-\frac{1}{4}\right\}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{4-(2+x)^2}{4(2+x)^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-x(x+4)}{4x(x+2)^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-(x+4)}{4(x+2)^2}=-\boldsymbol{\frac{1}{4}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(4) $x\to a$ のとき

$$(\text{分子})\to0,\qquad(\text{分母})\to0$$

となるので，ともに $x-a$ という因数をもつことに注意して

$$\begin{aligned}a^3+a^2x-5ax^2+3x^3&=(x-a)(3x^2-2ax-a^2)=(x-a)^2(3x+a)\\a^3-3ax^2+2x^3&=(x-a)(2x^2-ax-a^2)=(x-a)^2(2x+a)\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{x\to a}\frac{a^3+a^2x-5ax^2+3x^3}{a^3-3ax^2+2x^3}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2(3x+a)}{(x-a)^2(2x+a)}=\lim_{x\to a}\frac{3x+a}{2x+a}$$

(i) $a=0$ のとき

$$\lim_{x\to0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

(ii) $a\fallingdotseq0$ のとき

$$\lim_{x\to a}\frac{3x+a}{2x+a}=\frac{4}{3}$$

(i)，(ii) より，極限値は

$$\begin{cases}\boldsymbol{a=0}\ \textbf{のとき}\ \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}\\[2ex]\boldsymbol{a\fallingdotseq0}\ \textbf{のとき}\ \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}\end{cases}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1) $f(x)$ が n 次式とすると $f'(x)$ は $(n-1)$ 次式であり

左辺の次数 : $2(n-1)$, 右辺の次数 : n または 2

であるから

$2(n-1)=n$ のとき, $n=2$

$2(n-1)=2$ のとき, $n=2$

したがって, **$f(x)$ は 2 次式** である.

ここで, $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと, $f'(x)=2ax+b$ であるから, 与式に代入して

$$\begin{aligned} & f'(x)\{f'(x)+2\}=8f(x)+12x^2-5 \\ \iff\ & (2ax+b)(2ax+b)+2(2ax+b)=8(ax^2+bx+c)+12x^2-5 \\ \iff\ & 4a^2x^2+(4ab+4a)x+b^2+2b=(8a+12)x^2+8bx+(8c-5) \end{aligned}$$

これが x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} 4a^2=8a+12 \\ 4ab+4a=8b \\ b^2+2b=8c-5 \end{cases} \qquad \therefore\ (a,\ b,\ c)=(3,\ -3,\ 1),\ \left(-1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{5}{9}\right)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=3x^2-3x+1},\ \textbf{または}, \boldsymbol{f(x)=-x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $f(x)$ が 1 次式のとき, $f(x)=ax+b$ とすると

$$a(x+3)=2(ax+b)+8x-12$$

$$\therefore\ 8x-12=-ax+3a-2b$$

$$\therefore\ a=-8,\ b=-6$$

よって

$$f(x)=-8x-6$$

これは $f(0)$ が素数に矛盾.

また, $f(0)$ が素数だから, $f(x)$ は定数ではない.

$f(x)$ が次数が 2 以上の多項式のとき, $f(x)$ の最高次の項を ax^n とすると $f'(x)$ の最高次の項は nax^{n-1} であり

左辺の最高次の項 : nax^n, 右辺の最高次の項 : $2ax^n$

であるから, 係数を比較して

$$na=2a \qquad \therefore\ n=2 \quad (\because\ a \fallingdotseq 0)$$

を得る. よって, $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと, $f'(x)=2ax+b$ であるから, 与式に代入して

$$\begin{aligned} & (x+3)f'(x)=2f(x)+8x-12 \\ \iff\ & (x+3)(2ax+b)=2(ax^2+bx+c)+8x-12 \\ \iff\ & 2ax^2+(6a+b)x+3b=2ax^2+(2b+8)x+2c-12 \end{aligned}$$

これが x についての恒等式より

$$\begin{cases} 6a+b=2b+8 & \cdots ① \\ 3b=2c-12 & \cdots ② \end{cases}$$

② より

$$2c=3(b+4)$$

であるから，c は 3 の倍数．さらに $f(0)=c$ より素数である．ゆえに，$c=3$

①，② より，$a=1$, $b=-2$

$$\therefore\ \boldsymbol{f(x)=x^2-2x+3} \qquad (答)$$

【3】(1) $f'(x)=3x^2-2x$ であるから，点 $(1,\ f(1))=(1,\ 1)$ における $f(x)$ の接線の方程式は

$$y=f'(1)(x-1)+1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{y=x} \qquad (答)$$

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きは

$$f'(t)=3t^2-2t=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$$

よって，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき，傾きは最小になる．このとき

接点：$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{25}{27}\right)}$，　傾き：$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$　(答)

(3) $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{1}{3}$，y 軸方向に $-\dfrac{25}{27}$ だけ平行移動すると

$$\begin{aligned} & y+\frac{25}{27}=\left(x+\frac{1}{3}\right)^3-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+1 \\ \iff\quad & y=x^3-\frac{1}{3}x \quad \cdots ① \end{aligned}$$

移動後の曲線 ① は，奇関数であり，原点に関して対称であるから，$y=f(x)$ のグラフは，点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{25}{27}\right)$ に関して対称である．　〔証明終〕

【4】接点を $(t,\ t^3-3t^2)$ とすると，$y'=3x^2-6x$ より，接線の方程式は

$$\begin{aligned} & y=(3t^2-6t)(x-t)+(t^3-3t^2) \\ \therefore\ & y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2 \end{aligned}$$

これが点 $(1,\ 14)$ を通るので

$$\begin{aligned} & 14=3t^2-6t-2t^3+3t^2 \\ \iff\ & 2t^3-6t^2+6t+14=0 \\ \iff\ & t^3-3t^2+3t+7=0 \\ \iff\ & (t+1)(t^2-4t+7)=0 \end{aligned}$$

t は実数より，　$\therefore\ t=-1$

したがって，接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=9x+5} \qquad (答)$$

【5】 $$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a$$
とおくと
$$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$$

(i) $a > 0$ のとき

$x = 0$ で極大，$x = 2a$ で極小となる．

$f(0) = 4a > 0$ であるから

$$\begin{cases} f(2a) > 0 \text{ のとき} & \text{解 } 1 \text{ つ} \\ f(2a) = 0 \text{ のとき} & \text{解 } 2 \text{ つ} \\ f(2a) < 0 \text{ のとき} & \text{解 } 3 \text{ つ} \end{cases}$$

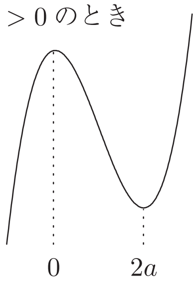
となる．ここで

$$\begin{aligned} f(2a) &= 8a^3 - 12a^3 + 4a = 4a - 4a^3 \\ &= 4a(1 - a^2) \end{aligned}$$

より，実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 1 < a \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

$a > 0$ のとき



(ii) $a < 0$ のとき

$x = 0$ で極小，$x = 2a$ で極大となる．

$f(0) = 4a < 0$ であるから

$$\begin{cases} f(2a) < 0 \text{ のとき} & \text{解 } 1 \text{ つ} \\ f(2a) = 0 \text{ のとき} & \text{解 } 2 \text{ つ} \\ f(2a) > 0 \text{ のとき} & \text{解 } 3 \text{ つ} \end{cases}$$

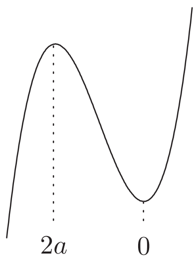
となる．ここで

$$f(2a) = 4a(1 - a^2)$$

より，実数解の個数は

$$\begin{cases} -1 < a < 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = -1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a < -1 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

$a < 0$ のとき

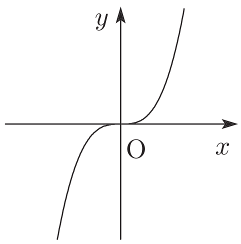


(iii) $a = 0$ のとき

$$f'(x) = 3x^2 \geqq 0$$

であるから，実数解の個数は 1 個.

$a = 0$ のとき



以上より，実数解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1 < a < 1} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a = \pm 1} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a < -1,\ 1 < a} \text{ のとき} & \textbf{3 個} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $f(x)$ を x の 2 次式 $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割ったときの商を $P(x)$ とすると，実数 a，b を用いて

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)P(x)+ax+b$$

とおける．この式に，$x=\alpha$，$x=\beta$ を代入すると

$$f(\alpha)=a\alpha+b \quad \cdots①$$
$$f(\beta)=a\beta+b \quad \cdots②$$

①，② を解いて

$$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)a$$

$\alpha \fallingdotseq \beta$ であるから

$$a=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$$

したがって

$$\begin{aligned} b&=f(\alpha)-a\alpha \\ &=f(\alpha)-\alpha\cdot\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} \\ &=\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

以上より，求めるあまりは

$$\boldsymbol{\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}x+\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $f(x)$ を x の 2 次式 $(x-\alpha)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，実数 p，q を用いて

$$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+px+q \qquad \cdots③$$

とおける．また

$$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+p \quad \cdots④$$

である．
③，④ に $x=\alpha$ を代入すると，それぞれ

$$f(\alpha)=p\alpha+q \quad \cdots⑤$$
$$f'(\alpha)=p \quad \cdots⑥$$

⑤，⑥ より，p，q は，

$$p=f'(\alpha), \quad q=f(\alpha)-p\alpha=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$$

と表せる．よって，求めるあまりは

$$\boldsymbol{f'(\alpha)x+f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)} \qquad \text{(答)}$$

【7】　〔I〕関数を $\sin x$ の多項式にする．

$$y = 4\sin^3 x + 3(1-\sin^2 x) - 1 = 4\sin^3 x - 3\sin^2 x + 2$$

ここで，$\sin x = t$ とおくと

$$y = f(t) = 4t^3 - 3t^2 + 2$$

であり，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ であるから，$0 \leqq \sin x \leqq 1$ となる．
したがって

$$y = f(t) = 4t^3 - 3t^2 + 2 \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

の最大値，最小値を求めればよい．

$$f'(t) = 6t(2t-1)$$

より，増減表は以下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	極小	$\nearrow$	3

これより

$$\begin{cases} \text{最大値：} & f(1) = 3 \\ \text{最小値：} & f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

を得る．よって，求める最大値，最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 90^\circ} \text{ のとき} & \textbf{最大値 } \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{x = 30^\circ} \text{ または } \boldsymbol{150^\circ} \text{ のとき} & \textbf{最小値 } \boldsymbol{\dfrac{7}{4}} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

〔II〕$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称性に着目して

$$t = \sin\theta + \cos\theta$$

とおき，両辺を 2 乗すると

$$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \qquad \therefore\ \sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2}$$

これより

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4\sin^3\theta - 9\sin\theta\cos\theta + 4\cos^3\theta + 1 \\ &= 4(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) - 9\sin\theta\cos\theta + 1 \end{aligned}$$

ここで，$t = \sin\theta + \cos\theta$ とし，t の関数 $g(t)$ として

$$\begin{aligned} f(\theta) = g(t) &= 4t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) - 9\cdot\frac{t^2-1}{2} + 1 \\ &= -2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

また

$$t = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \theta)$$

であるから，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$45^\circ \leqq 45^\circ + \theta \leqq 225^\circ$ となり

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin(45^\circ + \theta) \leqq 1 \qquad \therefore\ -1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

以上より，題意は

$$g(t) = -2t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t + \frac{11}{2} \quad (-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$$

の最大値，最小値を求めることに等しい．

$$g'(t) = -6t^2 - 9t + 6 = -3(2t^2 + 3t - 2) = -3(2t-1)(t+2)$$

より，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\frac{57}{8}$	$\searrow$	$2\sqrt{2} - \frac{7}{2}$

これより

$$\begin{cases} \boldsymbol{t = \frac{1}{2}}\ \text{のとき}\quad \textbf{最大値}\ \boldsymbol{\frac{57}{8}} \\ \boldsymbol{t = -1}\ \text{のとき}\quad \textbf{最小値}\ \boldsymbol{-3} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【8】題意をみたすには，$x>0$ において，常に

$$(f(x)=)\ ax^3+b-x^2>0$$

であればよい．
ここで，$a=0$ のとき，$f(x)=b-x^2$ となり，$b<0$ であれば明らかに不適であり，$b \geqq 0$ のときは，$x \geqq \sqrt{b}$ で $f(x) \leqq 0$ となるので不適．さらに，$a<0$ のときも明らかに不適である．したがって，$a>0$ としてよい．

$$f'(x)=3ax^2-2x=x(3ax-2)$$

$f'(x)=0$ のとき，$x=0,\ \dfrac{2}{3a}$ である．これより，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3a}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	b	$\searrow$		$\nearrow$

したがって

$$f\left(\frac{2}{3a}\right)=-\frac{4}{27a^2}+b>0$$

であればよい．
以上より

$$\boldsymbol{a>0 \quad \text{かつ} \quad b>\frac{4}{27a^2}} \qquad (\text{答})$$

問題

【1】　〔I〕

$$\int_{-a}^{a}(x^3+x^2+5x-2)dx = 2\int_0^a (x^2-2)dx = 2\left(\frac{a^3}{3}-2a\right)$$

より

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{a^3}{3}-2a\right)=6 &\iff a^3-6a=9 \\ &\iff a^3-6a-9=0 \\ &\iff (a-3)(a^2+3a+3)=0 \end{aligned}$$

a は実数なので，　$\therefore\ \boldsymbol{a=3}$　(答)

〔II〕(1)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^2(-x+2)dx + \int_2^3(x-2)dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 \\ &= 2(-2+4)+\left(\frac{9}{2}-6\right) = \boldsymbol{\frac{5}{2}} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ より

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^2(-x^2+x+2)dx + \int_2^3(x^2-x-2)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 \\ &= 2\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4\right)+\left(\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-6\right) = \boldsymbol{\frac{31}{6}} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 2\int_0^2\left|x^2-1\right|dx = 2\left\{\int_0^1(-x^2+1)dx + \int_1^2(x^2-1)dx\right\} \\ &= 2\left\{\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2\right\} \\ &= 4\left(-\frac{1}{3}+1\right)+2\left(\frac{8}{3}-2\right) = \boldsymbol{4} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_{-1}^0\{-x(x-1)\}dx + \int_0^1 x(x-1)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= -\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-1} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

【2】両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = 3x^2 - 6x$$

$$\therefore\ \boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 6x} \qquad (答)$$

$x = 1$ のとき，$\displaystyle\int_1^1 f(t)dt = 0$ より

$$1 - 3 + a = 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a = 2} \qquad (答)$$

【3】与式を計算すると

$$\begin{aligned}
y &= \int_0^1 \left\{\{f(x)\}^2 + a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2(ax+b)f(x)\right\} dx \\
&= a^2\int_0^1 x^2dx + 2ab\int_0^1 xdx - 2a\int_0^1 xf(x)dx \\
&\qquad\qquad - 2b\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 b^2dx + \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx
\end{aligned}$$

である．ここで，$\displaystyle\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$ は a，b の両方によらない定数であるから

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx = k$$

とし，これと条件式を代入して

$$\begin{aligned}
y &= a^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2ab\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2a\cdot 3 - 2b\cdot 1 + b^2\Big[x\Big]_0^1 + k \\
&= \frac{1}{3}a^2 + ab - 6a - 2b + b^2 + k \\
&= \frac{1}{3}a^2 + (b-6)a + b^2 - 2b + k \\
&= \frac{1}{3}\left\{a + 3\cdot\frac{b-6}{2}\right\}^2 - \frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\frac{(b-6)^2}{4} + b^2 - 2b + k \\
&= \frac{1}{3}\left\{a + \frac{3}{2}(b-6)\right\}^2 + \frac{1}{4}(b+14)^2 - \frac{1}{4}\cdot 14^2 + k - 27
\end{aligned}$$

したがって，y の値が最小となるのは

$$a + \frac{3}{2}(b-6) = 0 \quad かつ \quad b + 14 = 0$$

のときである．

$$\therefore\ \boldsymbol{a = 30,\ b = -14} \qquad (答)$$

【4】　〔I〕(1) $2x^2-5x+3=x-1$ より

$$2x^2-6x+4=2(x-2)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=1,\ 2$$

これより

$$\begin{aligned}\int_1^2\{x-1-(2x^2-5x+3)\}dx &= \int_1^2\{-2(x-2)(x-1)\}dx\\ &= \frac{2(2-1)^3}{6}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad (答)\end{aligned}$$

(2) $x(x-1)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ より

$$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{1}{2},\ 1$$

これより

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^1\left\{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-x(x-1)\right\}dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^1\left\{-(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}dx\\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\\ &= \boldsymbol{\frac{9}{16}} \qquad (答)\end{aligned}$$

(3) $y^2+1=y+7$ より

$$y^2-y-6=(y+2)(y-3)=0 \qquad \therefore\ y=-2,\ 3$$

これより

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3\left\{y+7-(y^2+1)\right\}dy &= \int_{-2}^3\{-(y+2)(y-3)\}dy\\ &= \frac{1}{6}(3+2)^3\\ &= \boldsymbol{\frac{125}{6}} \qquad (答)\end{aligned}$$

〔II〕$y=x^2+2x$ の $x=t$ での接線は

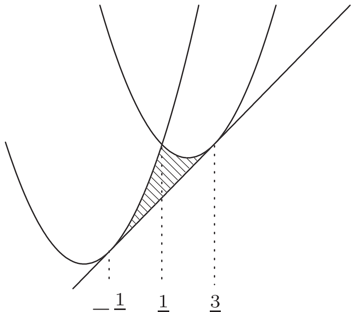
$$y=(2t+2)(x-t)+t^2+2t=2(t+1)x-t^2$$

$y=x^2-2x+2$ の $x=s$ での接線は

$$y=(2s-2)(x-s)+s^2-2s+2=2(s-1)x-s^2+2$$

これが一致するので

$$\begin{cases} t+1=s-1 \\ -t^2=-s^2+2 \end{cases}$$



$s=t+2$ より

$$-t^2=-(t+2)^2+2$$
$$\therefore\ t=-\frac{1}{2},\ s=\frac{3}{2}$$

これより，共通接線は

$$y=x-\frac{1}{4}$$

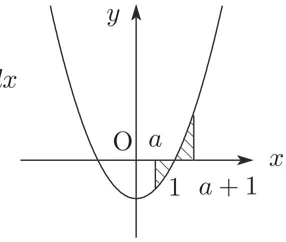
また，2 曲線の交点の x 座標は

$$x^2+2x=x^2-2x+2 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}$$

これより

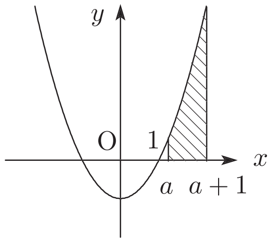
$$\begin{aligned}
S&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{x^2+2x-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{x^2-2x+2-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx\\
&=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx\\
&=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\
&=\boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【5】(1)　(i) $0<a<1$ のとき



$$S=\int_a^1(-x^2+1)dx+\int_1^{a+1}(x^2-1)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_a^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{a+1}$$
$$=\frac{2}{3}a^3+a^2-a+\frac{2}{3}$$

(ii) $a \geqq 1$ のとき



$$S=\int_a^{a+1}(x^2-1)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_a^{a+1}$$
$$=a^2+a-\frac{2}{3}$$

以上より

$$\boldsymbol{S=\begin{cases}\frac{2}{3}a^3+a^2-a+\frac{2}{3} & (0<a<1\text{ のとき})\\ a^2+a-\frac{2}{3} & (a \geqq 1\text{ のとき})\end{cases}}$$ (答)

(2)　(i) $0<a<1$ のとき

S を a で微分すると，$S'=2a^2+2a-1$ であり，$S'=0$ となるのは，

$$a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

のときである.

(ii) $a \geqq 1$ のとき

S を a で微分すると，$S'=2a+1>0$ である.

以上より，S の増減表は次のようになる.

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\cdots$	1	
S'		$-$	0	$+$	$+$	$+$
S		↘	最小	↗	$\frac{4}{3}$	↗

であるから，最小とする a の値は

$$\boldsymbol{a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$ (答)

【6】与式より

$$f(x)=-\frac{1}{2}+x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 tf(t)dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=a$，$\displaystyle\int_0^1 tf(t)dt=b$ とおくと

$$f(x)=ax+b-\frac{1}{2}$$

とおける．これより

$$a=\int_0^1\left(at+b-\frac{1}{2}\right)dt=\left[\frac{a}{2}t^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)t\right]_0^1=\frac{a}{2}+b-\frac{1}{2}$$

したがって

$$\frac{a}{2}-b+\frac{1}{2}=0\quad\cdots①$$

また

$$b=\int_0^1 t\left(at+b-\frac{1}{2}\right)dt=\left[\frac{a}{3}t^3+\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{4}\right)t^2\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-\frac{1}{4}$$

したがって

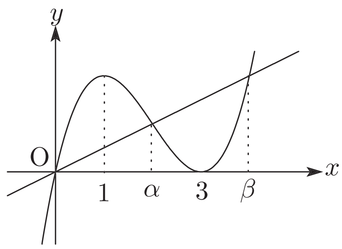
$$\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-\frac{1}{4}=0\quad\cdots②$$

①，② より，$a=6$，$b=\dfrac{7}{2}$
よって

$$\boldsymbol{f(x)=6x+3}\qquad (答)$$

【7】

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$$
$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1)$$



$y = mx$ と $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ の交点の x 座標を

$$0,\ \alpha,\ \beta \quad (\alpha,\ \beta \fallingdotseq 0)$$

とする．$x^3 - 6x^2 + 9x = mx$ より

$$x(x^2 - 6x + 9 - m) = 0 \quad \cdots ①$$
$$\therefore \alpha + \beta = 6,\ \alpha\beta = 9 - m$$

題意より

$$\int_0^{\alpha} (x^3 - 6x^2 + 9x - mx)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \{mx - (x^3 - 6x^2 + 9x)\}dx$$

となればよいので

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\alpha} (x^3 - 6x^2 + 9x - mx)dx + \int_{\alpha}^{\beta} (x^3 - 6x^2 + 9x - mx)dx = 0 \\
\iff\ &\int_0^{\beta} (x^3 - 6x^2 + 9x - mx)dx = 0 \\
\iff\ &\frac{1}{4}\beta^4 - 2\beta^3 + \frac{9}{2}\beta^2 - \frac{m}{2}\beta^2 = 0
\end{aligned}$$

$\beta \fallingdotseq 0$ より

$$\frac{1}{4}\beta^2 - 2\beta + \frac{9}{2} - \frac{m}{2} = 0$$

一方，① より

$$\beta^2 - 6\beta + 9 - m = 0$$

これより m を消去すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\beta^2 - 2\beta + \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(\beta^2 - 6\beta + 9) &= 0 \\
-\beta^2 + 4\beta &= 0 \\
\beta(\beta - 4) &= 0 \qquad \therefore\ \beta = 4\ (\because \beta \fallingdotseq 0)
\end{aligned}$$

このとき，$m = \beta^2 - 6\beta + 9$ より

$\boldsymbol{m = 1}$ 　(答)

問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ より，C の座標は **(5, 12)** である．　(答)

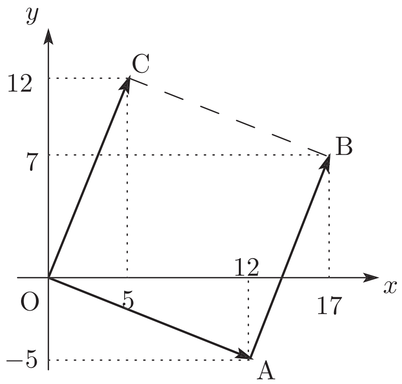
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 12 \cdot 5 + (-5) \cdot 12 = 0$

$\therefore \ \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|} = \mathbf{0}$　(答)

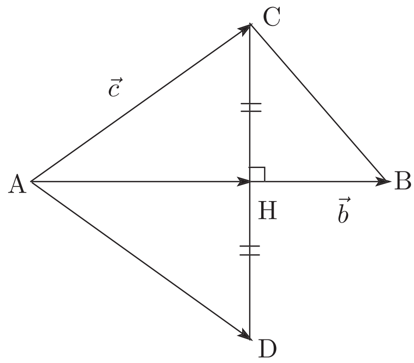
(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 13$　かつ　$\theta = 90^\circ$

であるから，平行四辺形 OABC は正方形である．その面積 S は

$S = 13^2 = \mathbf{169}$　(答)



【2】線分 CD と直線 AB との交点を H とおくと，H は線分 CD の中点であり，CH ⊥ AB である．



$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = k\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\vec{b} - \vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ より

$$\left(k\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \vec{b} = 0$$

よって

$$k\left|\vec{b}\right|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\therefore\ k = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \boldsymbol{2\left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b} - \vec{c}\right)} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \left|\vec{c}\right| \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|} \cdot \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CH}} = 2(\overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \boldsymbol{2\left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b} - \vec{c}\right)} \qquad \text{(答)}$$

【3】O を始点とする位置ベクトルを考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ とする．

(1) $$\vec{p}=\vec{a}$$
であるから，点 P は

点 A に一致

する．よって，① (答)

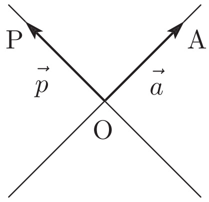
(2) $$\vec{a}\cdot\vec{p}=0$$
であるから，$\vec{a}\neq\vec{0}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

したがって，点 P は

直線 OA に垂直で O を通る直線上

に存在する．よって，④ (答)



(3) $$\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\angle\mathrm{AOP}>0$$
であるから

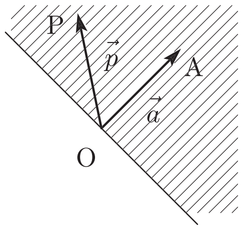
$0^\circ<\angle\mathrm{AOP}<90^\circ$

である．この領域が示すのは

(2) で求めた直線の法線ベクトル $\vec{a}$

と同じ側の領域

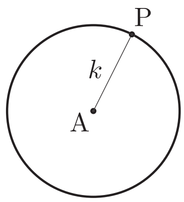
である．よって，⑫ (答)



(4) $$\left|\vec{p}-\vec{a}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=k>0$$
であるから，点 P は

点 A を中心とする半径 k の円の周上

にある．よって，⑦ (答)



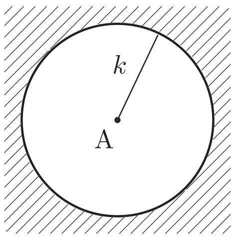
(5) $$\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{a}\right)>k^2$$
$$\Longleftrightarrow\quad\left|\vec{p}-\vec{a}\right|^2>k^2$$
であるから，$k>0$ より

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|>k$

である．この領域が示すのは

点 A を中心とする半径 k の円の外部

である．よって，⑯ (答)



(6) $-\overrightarrow{a}$ を位置ベクトルとする点を A' とすると，
与式は

$$\overrightarrow{\mathrm{A'P}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{A'P}} \text{ または } \mathrm{P} = \mathrm{A} \text{ または } \mathrm{P} = \mathrm{A}'$$

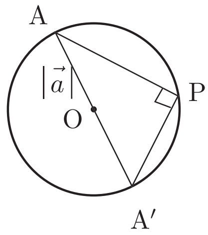
これは

　　AA' を直径とする円

であり，$\mathrm{AA}' = \left|2\overrightarrow{a}\right|$ より，したがって，点 P は

　　半径 $\left|\overrightarrow{a}\right|$ の円周上

に存在する．よって，⑥　　(答)



＜別解＞

$$\left(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{a}\right) \cdot \left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right) = 0 \iff \left|\overrightarrow{p}\right|^2 - \left|\overrightarrow{a}\right|^2 = 0$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{p}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right|$$

これより，点 P は点 O を中心とする半径 $\left|\overrightarrow{a}\right|$ の円をえがく．

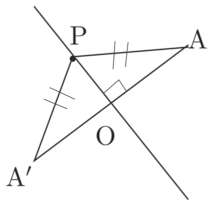
(7) (6) の点 A' を用いて，与式は

$$\mathrm{A'P} = \mathrm{AP}$$

であるから，したがって，点 P は

　　線分 AA' の垂直二等分線上

に存在する．よって，④　　(答)



＜別解＞
与式を 2 乗して

$$\left|\overrightarrow{p}\right|^2 + 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{p} + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 = \left|\overrightarrow{p}\right|^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{p} + \left|\overrightarrow{a}\right|^2$$

となるから，これは $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{p} = 0$ と等しい．

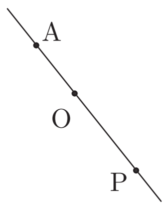
(8) 点 P が点 O と異なるとき

$$\left|\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|\cos\angle\mathrm{AOP}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{p}\right|$$

であるから

$$\cos\angle\mathrm{AOP} = \pm 1$$

$$\therefore \angle\mathrm{AOP} = 0^\circ,\ 180^\circ$$



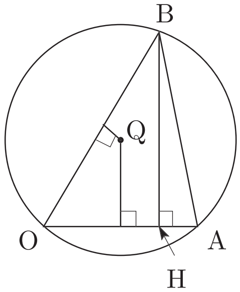
点 P が点 O と一致するときにおいても，点 P は

　　点 O を通り，$\overrightarrow{a}$ に平行な直線上

に存在する．よって，⑤　　(答)

【4】　〔I〕
$$\vec{p}=k\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)=\frac{k}{|\vec{b}|}\vec{b}+\frac{k}{|\vec{c}|}\vec{c}$$
であり，かつ，点 P は直線 BC 上の点でもあるから
$$\frac{k}{|\vec{b}|}+\frac{k}{|\vec{c}|}=1$$
これを解いて
$$k=\frac{|\vec{\boldsymbol{b}}||\vec{\boldsymbol{c}}|}{|\vec{\boldsymbol{b}}|+|\vec{\boldsymbol{c}}|}\qquad \text{(答)}$$

〔II〕(1) 点 B から辺 OA に下ろした垂線の足を H とすると
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{k}{1^2}\vec{a}=k\vec{a}$$
辺 OA の垂直二等分線上の任意の点を P とすると
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)$$
$$=\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}+kt}\right)\vec{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{b}}\qquad \text{(答)}$$



(2) 点 Q は △OAB の外心であるから

辺 OA の垂直二等分線と辺 OB の垂直二等分線の交点

であるから
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{1}{2}+kt\right)\vec{a}-t\vec{b}$$
であり，かつ，実数 s を用いて
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{b}+s\left(k\vec{b}-\vec{a}\right)=-s\vec{a}+\left(\frac{1}{2}+ks\right)\vec{b}$$
$\vec{a}$，$\vec{b}$ は，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$，$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ より
$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}+kt=-s\\ -t=\dfrac{1}{2}+ks\end{cases}\qquad \therefore\ s=t=-\frac{1}{2(k+1)}\qquad (\because\ k=\vec{a}\cdot\vec{b}\fallingdotseq-1)$$
したがって
$$\overrightarrow{\mathbf{OQ}}=\boldsymbol{\frac{1}{2(k+1)}}\left(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\right)\qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

実数 α，β を用いて
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$
とおき，外心の条件より
$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0\\ \left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0\end{cases}\qquad \therefore\ \begin{cases}\alpha+k\beta-\dfrac{1}{2}=0\\ k\alpha+\beta-\dfrac{1}{2}=0\end{cases}$$
これを解いても，$\alpha=\beta=\dfrac{1}{2(k+1)}$ を得る．

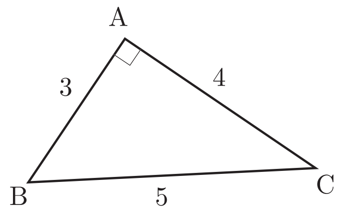
【5】(1) (ア) 重心 G に対して

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

が成り立つことから，

$$x:y:z=1:1:1$$

したがって，⑦　　(答)



(イ) △ABC は，辺 BC を斜辺とする直角三角形であるから，垂心 H は点 A に一致する．よって

$$\overrightarrow{HA}=\vec{0}$$

が成り立つことから，$x:y:z=1:0:0$

したがって，①　　(答)

(ウ) △ABC の外接円は，辺 BC を直径とする円であるから，外心 O は辺 BC の中点であり

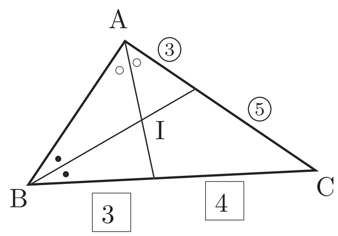
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

が成り立つことから，$x:y:z=0:1:1$

したがって，⑥　　(答)

(2) 内心 I は，各頂点の内角の二等分線の交点であるから

$$\overrightarrow{AI}=s\left(\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right)\quad\cdots(*)$$



同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI}&=t\left(\frac{5}{8}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}\right)\\&=t\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

と表される．このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\\&=(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}t\overrightarrow{AC}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

さて，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立であるから，$(*)$，$(**)$ より

$$\begin{cases}\dfrac{4}{7}s=1-t\\[2mm]\dfrac{3}{7}s=\dfrac{3}{8}t\end{cases}\qquad\therefore\ s=\frac{7}{12},\ t=\frac{2}{3}$$

したがって

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

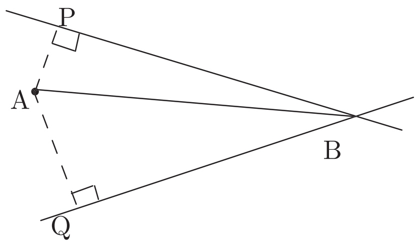
始点を I として整理すると

$$\begin{aligned}&-12\overrightarrow{IA}=4\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}\right)+3\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}\right)\\\iff\ &12\overrightarrow{IA}+4\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}\right)+3\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}\right)=\vec{0}\\\iff\ &5\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\end{aligned}$$

よって，1 から 9 までの自然数において，これをみたす x，y，z の値は

$(x,\,y,\,z)=$ **(5, 4, 3)**　　(答)

【6】$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ とおく.



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=0$$
$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right)=0$$
$$\therefore\ 12-12\alpha+15\beta=0$$
$$\therefore\ 4\alpha-5\beta=4 \quad \cdots\cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=0$$
$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\left(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right)=0$$
$$\therefore\ 25+15\alpha-25\beta=0$$
$$\therefore\ 3\alpha-5\beta=-5 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② より

$$\alpha=9,\ \beta=\frac{32}{5}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{32}{5}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$
$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2&=\left|9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{32}{5}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2\\&=81\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2+2\cdot9\cdot\frac{32}{5}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\frac{1024}{25}\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2\\&=81\cdot12+\frac{576}{5}\cdot(-15)+\frac{1024}{25}\cdot25\\&=268\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{AB}=\mathbf{2\sqrt{67}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}$ とおく．

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\end{cases}\iff\begin{cases}\left(\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}\right)\cdot\overrightarrow{a}=0\\ \left(\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}\right)\cdot\overrightarrow{b}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\alpha\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\beta\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0\\ \alpha\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\beta\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\gamma\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\alpha+\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}+\dfrac{\gamma}{3}=0\\ \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}+\beta+\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}=0\end{cases}\quad\cdots\cdots(*)$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}+(1+\gamma)\overrightarrow{c}$$

であり，D は OAB 平面上にあるので

$$1+\gamma=0\qquad\therefore\ \gamma=-1$$

したがって

$$(*)\iff\begin{cases}\alpha+\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3}=0\\ \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}+\beta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0\end{cases}\qquad\therefore\ \alpha=-\frac{1}{3},\ \beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{a}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}}\qquad\text{(答)}$$

(2)
$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(1) より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2&=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\frac{8}{9}\left|\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{c}\right|^2\\&\quad-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+2\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}\\&=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}+1-\frac{4\sqrt{2}}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|=\frac{2}{3}$$

よって，体積 V は

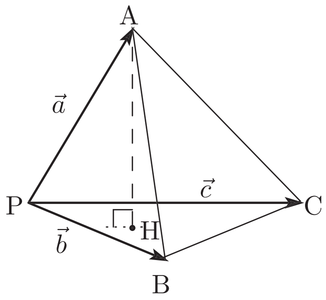
$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{18}}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1) 各辺の長さが 1 であるから

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = 1$$

また，各面が正三角形であるから

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ \\ &= \mathbf{\frac{1}{2}} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$



同様にして

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 平面 PBC において

$$\vec{b} \not\parallel \vec{c},\ \ \vec{b} \neq \vec{0},\ \ \vec{c} \neq \vec{0}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = s\vec{b} + t\vec{c} \qquad (s,\ t \text{ は実数})$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{PH}} - \overrightarrow{\mathrm{PA}} = s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}$$

H は A から平面 PBC に下ろした垂線であるから，AH ⊥ PB，AH ⊥ PC である．
(1) の結果を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{b}\cdot\left(s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}\right) = s + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{c}\cdot\left(s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}s + t - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots\cdots②$$

①，② より

$$s = \frac{1}{3},\ t = \frac{1}{3} \qquad \therefore\ \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}} \qquad \text{(答)}$$

(3) △PBC は，1 辺の長さ 1 の正三角形であるから

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a}$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|^2 = \frac{1}{9}\left|\vec{b}\right|^2 + \frac{1}{9}\left|\vec{c}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|^2 + \frac{2}{9}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{c}\cdot\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{2}{3}$$

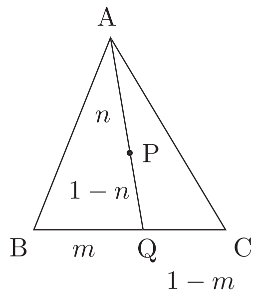
$$\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

よって，求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{12}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) △ABC の周またはその内部にある任意の点を P とする．
直線 AP と辺 BC との交点を Q とし

$$\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = m : (1-m)$$
$$\mathrm{AP} : \mathrm{PQ} = n : (1-n)$$



とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-m)\vec{b} + m\vec{c}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-n)\vec{a} + n\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ &= (1-n)\vec{a} + n(1-m)\vec{b} + mn\vec{c}\end{aligned}$$

いま

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} \quad \cdots\cdots(*)$$

より

$$\begin{cases} p = 1-n \\ q = n(1-m) \\ r = mn \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

である．ここで

$$p+q+r = (1-n)+n(1-m)+mn = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

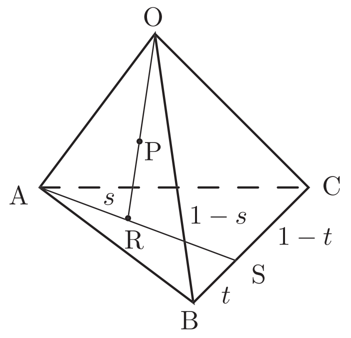
また，P が △ABC の周または内部の点であるから，$0 \leqq m \leqq 1$，$0 \leqq n \leqq 1$ であり，①，② より

$$p+q+r = 1,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0$$

これが，点 P が △ABC の周またはその内部にあるための必要条件であり，逆をたどれば十分性もみたしている．
以上より，求める条件は

$$\boldsymbol{p+q+r=1,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0} \qquad \text{(答)}$$

(2) 四面体 OABC の面上または内部の任意の点を P とする．



直線 OP が △ABC の周または内部と交わる点を R とし，直線 AR と辺 BC との交点を S とする．このとき

$\mathrm{BS} : \mathrm{SC} = t : (1-t)$

$\mathrm{AR} : \mathrm{RS} = s : (1-s)$

とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = (1-t)\,\vec{b} + t\,\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\,\vec{a} + s\overrightarrow{\mathrm{OS}} = (1-s)\,\vec{a} + s(1-t)\,\vec{b} + st\,\vec{c}$

さらに

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k(1-s)\,\vec{a} + ks(1-t)\,\vec{b} + kst\,\vec{c}$

いま

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\,\vec{a} + q\,\vec{b} + r\,\vec{c} \quad \cdots\cdots(*)$

より

$$\begin{cases} p = k(1-s) \\ q = ks(1-t) \\ r = kst \end{cases} \quad \cdots\cdots①'$$

である．ここで

$p + q + r = k(1-s) + ks(1-t) + kst = k \quad \cdots\cdots②'$

また，P が四面体 OABC の面上または内部の点であるから，$0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$，$0 \leqq k \leqq 1$ であり，①′，②′ より

$p + q + r \leqq 1$，$p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$r \geqq 0$

これが，点 P が四面体 OABC の面上またはその内部にあるための必要条件であり，逆をたどれば十分性もみたしている．

以上より，求める条件は

$\boldsymbol{p + q + r \leqq 1,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0}$ (答)

【4】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}5+t\\1+2t\\-1+t\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\,\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}6+s\\-4-s\\-s\end{pmatrix}$$

とおく.

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}1+s-t\\-5-s-2t\\1-s-t\end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{a}=0\\\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{b}=0\end{cases}\iff\begin{cases}(1+s-t)+2(-5-s-2t)+(1-s-t)=0\\(1+s-t)-(-5-s-2t)-(1-s-t)=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}-6t-2s-8=0\\2t+3s+5=0\end{cases}$$

$$\iff s=t=-1$$

よって

$$\mathbf{P(4,\,-1,\,-2),\ Q(5,\,-3,\,1)}$$ (答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta$ より

$$20+3-2=\sqrt{16+1+4}\cdot\sqrt{25+9+1}\cos\theta$$

$$21=\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}\cos\theta$$

$$21=7\sqrt{15}\cos\theta$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{15}}}{\mathbf{5}}$$ (答)

(3)

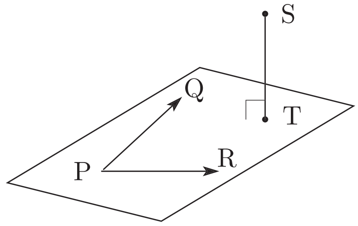
$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{21\cdot35-21^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{21(35-21)}$$

$$=\frac{\mathbf{7}\boldsymbol{\sqrt{6}}}{\mathbf{2}}$$ (答)

【5】4 点 P，Q，R，T が同一平面上にあるので



$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = s\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{PR}} \qquad (s,\ t \text{ は実数})$$

と表される．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ 4s \\ 2s+5t \end{pmatrix}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}} = \overrightarrow{\mathrm{SP}} + \overrightarrow{\mathrm{PT}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t \\ 4s \\ 2s+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3t \\ -1+4s \\ 1+2s+5t \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{ST}}$ は 3 点 P，Q，R を通る平面に直交するから

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{ST}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

$$\therefore \begin{cases} (2-3t)\cdot 0 + (-1+4s)\cdot 4 + (1+2s+5t)\cdot 2 = 0 \\ (2-3t)\cdot(-3) + (-1+4s)\cdot 0 + (1+2s+5t)\cdot 5 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 10s + 5t = 1 \\ 10s + 34t = 1 \end{cases}$$

$$\therefore\ s = \frac{1}{10},\ t = 0$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PT}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

また，求める球は原点 O を通るので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OT}}\right|^2 = 3^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 9 + \frac{1}{5} = \frac{46}{5}$$

よって，求める球は

中心の座標 $\left(3,\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right)$，半径 $\sqrt{\frac{46}{5}}$

であり，その方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{46}{5}} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) 平行な 2 平面を第 3 の平面で切ったとき，その 2 つの交線が平行線となるから

$$\mathrm{OP} \mathbin{/\!/} \mathrm{QC} \quad かつ \quad \mathrm{PC} \mathbin{/\!/} \mathrm{OQ}$$

である．よって，四角形 OQCP は平行四辺形であるから

$$\mathrm{OP} = \mathrm{CQ},\ \mathrm{OG} = \mathrm{CB},\ \angle\mathrm{OGP} = \angle\mathrm{CBQ} = 90^\circ$$

以上より

$$\triangle\mathrm{OPG} \equiv \triangle\mathrm{CQB} \qquad \therefore\ \mathrm{BQ} = \mathrm{GP} = \boldsymbol{t} \qquad (答)$$

(2) $\mathrm{O}(0,\,0,\,0)$,　$\mathrm{E}(a,\,0,\,0)$,
$\mathrm{G}(0,\,a,\,0)$,　$\mathrm{A}(0,\,0,\,a)$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ t \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a-t \end{pmatrix}$$

と表すことができる．このとき

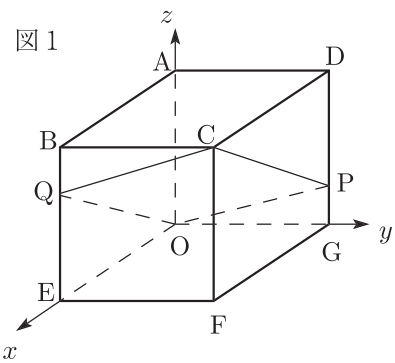
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = a^2 + t^2,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 = a^2 + (a-t)^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t(a-t)$$

したがって

$$S^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2$$
$$= \boldsymbol{2a^2(t^2 - at + a^2) \quad (0 \leqq t \leqq a)} \qquad (答)$$

図 1



(3) $f(t) = t^2 - at + a^2 \quad (0 \leqq t \leqq a)$

とおくと

$$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2$$

と変形されることから，図 2 より，$f(t)$ の最大値は

$$f(0) = f(a) = a^2$$

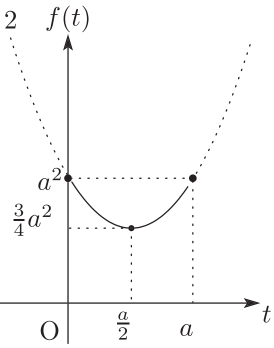
同様に考えて，最小値は

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3}{4}a^2$$

したがって

$$\begin{cases} \textbf{最大値：}\boldsymbol{\sqrt{2}a^2} \quad \boldsymbol{(t = 0,\ a\ \textbf{のとき})} \\ \textbf{最小値：}\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}a^2} \quad \boldsymbol{\left(t = \dfrac{a}{2}\ \textbf{のとき}\right)} \end{cases} \qquad (答)$$

図 2



M1JS/M1J
高１選抜東大数学
高１東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	