M1JS/M1J

冬期講習　確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

高１選抜東大数学

高１東大数学

【1】(1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7$ より

$$\begin{aligned}
&\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=49\\
\iff\ &\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=49\\
\iff\ &6^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2=49\\
\iff\ &-2\vec{a}\cdot\vec{b}=-3\\
\iff\ &\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(2) ① $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-4x+\frac{8}{3}$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^2-4x+\frac{8}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{f(x)=3x-4} \qquad \text{(答)}$$

また，与式で $x=a$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\int_a^a f(t)dt=\frac{3}{2}a^2-4a+\frac{8}{3}\\
\iff\ &0=\frac{3}{2}a^2-4a+\frac{8}{3}\\
\iff\ &9a^2-24a+16=0\\
\iff\ &(3a-4)^2=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=\frac{4}{3}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

② $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=k$　(k は定数) とおくと

$$f(x)=x-k$$

となるから

$$\begin{aligned}
k&=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x-k)dx\\
k&=\left[\frac{x^2}{2}-kx\right]_0^2\\
k&=2-2k \qquad \therefore\ k=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

したがって，求める $f(x)$ は，$\boldsymbol{f(x)=x-\frac{2}{3}}$ 　　(答)

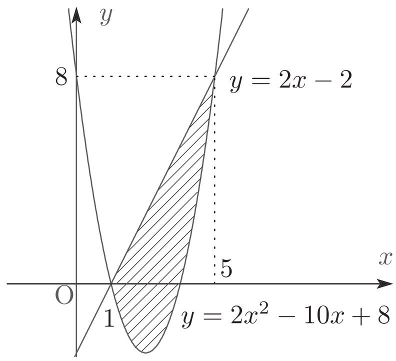
(3) ①

$$\begin{aligned}
\int_1^{-1}(x^3+2)dx&=-\int_{-1}^1(x^3+2)dx\\
&=-2\int_0^1 2dx \qquad (\because\ x^3\text{は奇関数, 2 は偶関数})\\
&=-2\Big[2x\Big]_0^1=\boldsymbol{-4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

② 連立させて y を消去すると

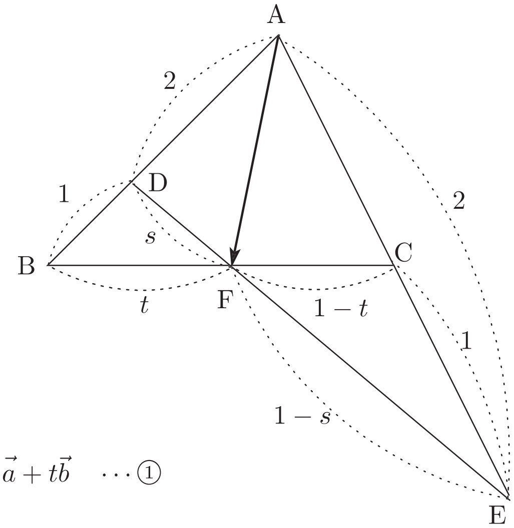
$$2x^2-10x+8=2x-2$$
$$2x^2-12x+10=0$$
$$2(x-1)(x-5)=0$$

となるから，交点の x 座標は 1, 5 であり，グラフは右図のようになる．したがって，求める面積は図の斜線部分であり，これを S とおくと



$$S=\int_1^5\{(2x-2)-(2x^2-10x+8)\}dx$$
$$=-2\int_1^5(x-1)(x-5)dx=2\times\frac{1}{6}(5-1)^3=\boldsymbol{\frac{64}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【2】A を基準点として，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とおく．



仮定より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{2}{3}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=2\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\vec{b}$$

である．

点 F が線分 BC 上の内分点であることから，t を実数として

$$\mathrm{BF}:\mathrm{FC}=t:(1-t)$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \quad \cdots ①$$

とおける．

また，点 F が線分 DE 上の内分点であることから，s を実数として $\mathrm{DF}:\mathrm{FE}=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-s)\times\frac{2}{3}\vec{a}+s\times2\vec{b}$$
$$=\frac{2}{3}(1-s)\vec{a}+2s\vec{b} \quad \cdots ②$$

とおける．ここで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，① と ② の係数を比較すると

$$\begin{cases}1-t=\dfrac{2}{3}(1-s)\\ t=2s\end{cases} \iff \therefore \begin{cases}t=\dfrac{1}{2}\\ s=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) l_1 は，O を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし，} t \text{ は任意の実数})$$

よって

$$l_1 : \boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \textbf{(ただし, } \boldsymbol{t} \textbf{ は任意の実数)} \qquad (\text{答})$$

同様に，l_2 は，B を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に平行な直線なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし，} s \text{ は任意の実数})$$

よって

$$l_2 : \boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \quad \textbf{(ただし, } \boldsymbol{s} \textbf{ は任意の実数)} \qquad (\text{答})$$

(2) l_1 と l_2 の交点を求める．

$$t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 1 + s & \cdots\cdots ① \\ 2t = s & \cdots\cdots ② \\ t = 2 - 2s & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

をみたす s，t を考えればよい．① より

$$s = -1$$

これを，② に代入すると

$$2t = -1 \qquad \therefore \quad t = -\frac{1}{2}$$

$t = -\dfrac{1}{2}$，$s = -1$ は ③ をみたさない．

よって，l_1 と l_2 の交点は存在しないので，直線 l_1 と直線 l_2 が交わることはない．

〔証明終〕

(3) l_1 と l_2 のどちらにも直交する直線と l_1，l_2 の交点を T，S とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と表せて

$$\overrightarrow{\mathrm{TS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s \\ s-2t \\ 2-2s-t \end{pmatrix}$$

l_1 の方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix} 1+s \\ s-2t \\ 2-2s-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -5t + 2 = 0 \iff t = \frac{2}{5}$$

l_2 の方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{pmatrix} 1+s \\ s-2t \\ 2-2s-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6s-3=0 \quad \Longleftrightarrow \quad s=\frac{1}{2}$$

これらより

$$\overrightarrow{\mathrm{TS}} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{10} \\ \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

また，T の座標が

$\left(0, \dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$

であることから，求める直線のベクトル方程式は

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \textbf{(ただし, } \boldsymbol{u} \textbf{ は任意の実数)} \qquad (答)$$

【4】(1) $y' = 3x^2 - 1$

であり，ここで $x = s$ での接線は

$y = (3s^2-1)(x-s) + s^3 - s + 6$

$\boldsymbol{y = (3s^2-1)x - 2s^3 + 6}$ (答)

(2) (1) の接線が点 $(t, 0)$ を通るので

$0 = (3s^2-1)t - 2s^3 + 6$

これを s の方程式とみて異なる 3 つの実数解をもてばよい．ここで

$f(s) = 2s^3 - 3ts^2 + t - 6$

とおく．

$f'(s) = 6s^2 - 6ts = 6s(s-t)$

より，$t > 0$ のとき，$s = 0, t$ で極値をもつ．

よって，異なる 3 つの実数解をもつためには

$$\begin{aligned} & f(0)\cdot f(t) < 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (t-6)(-t^3+t-6) < 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (t-6)(t^3-t+6) = (t-6)(t+2)(t^2-2t+3) > 0 \end{aligned}$$

ここで

$t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2 > 0,\ \ t > 0$

であるから

$\boldsymbol{t > 6}$ (答)

【5】まず

$$y = \left|x(x^2-1)\right| = \begin{cases} -x(x^2-1) & (x < -1,\ 0 < x < 1 \text{ のとき}) \\ x(x^2-1) & (-1 \leqq x \leqq 0,\ x \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

(1) $0<x<1$ において

$$\left|x(x^2-1)\right|=-x(x^2-1)$$

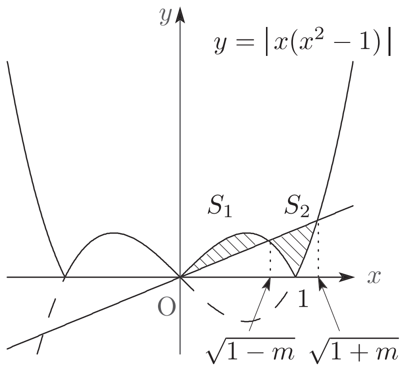
したがって

$$-x(x^2-1)=mx \qquad \therefore \quad x\{x^2-(1-m)\}=0$$

$0<x<1$ の範囲で実数解をもつには，$0<x^2<1$ より

$$0<1-m<1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{0<m<1} \qquad \text{(答)}$$

(2) $0<m<1$ であるから，$0<x<1$ と $x>1$ の範囲でそれぞれ 1 点ずつの 2 点で交わる．



$0<x<1$ における交点の x 座標は

$$x=\sqrt{1-m}$$

$x>1$ における交点の x 座標は，同様にして求めると

$$x=\sqrt{1+m}$$

となる．したがって，図のように S_1，S_2 とすると

$$\begin{aligned}
S_1&=\int_0^{\sqrt{1-m}}(-x^3+x-mx)dx\\
&=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{1-m}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{1-m}}\\
&=-\frac{1}{4}(1-m)^2+\frac{1}{2}(1-m)^2\\
&=\frac{1}{4}(1-m)^2\\
S_2&=\int_{\sqrt{1-m}}^{1}\{mx-(-x^3+x)\}dx+\int_1^{\sqrt{1+m}}\{mx-(x^3-x)\}dx\\
&=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{1-m}{2}x^2\right]_{\sqrt{1-m}}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{1+m}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{1+m}}\\
&=\frac{1}{4}(1-m)^2+\frac{1}{4}(1+m)^2-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

題意より，$S_1=S_2$ であるから

$$\frac{1}{4}(1-m)^2=\frac{1}{4}(1-m)^2+\frac{1}{4}(1+m)^2-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad (1+m)^2=2$$

$0<m<1$ を考慮してこれを解くと

$$\boldsymbol{m=\sqrt{2}-1} \qquad \text{(答)}$$