M1JK

冬期講習

解答

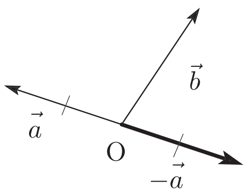
Ｚ会東大進学教室

高１東大数学Ｋ

1章　ベクトル（1）－ベクトルとその演算－

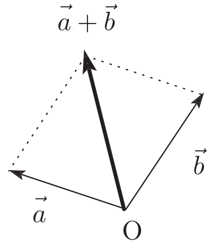
問題

【1】(1)



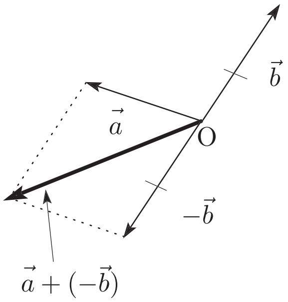
(答)

(2)



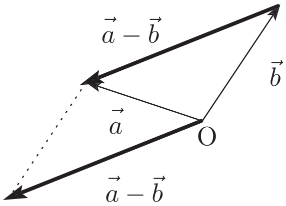
(答)

(3) ＜逆ベクトルから＞



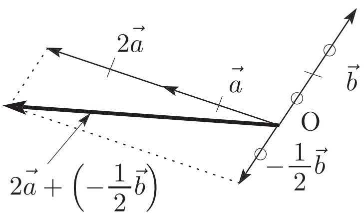
(答)

＜対角線から＞



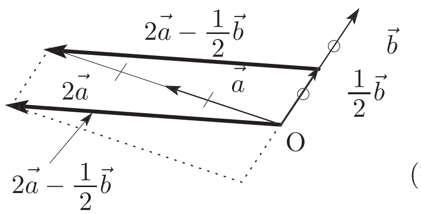
(答)

(4) ＜逆ベクトルから＞



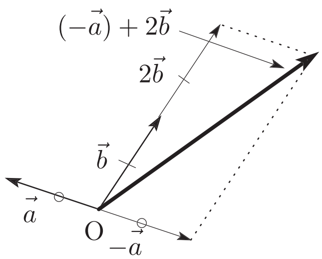
(答)

＜対角線から＞



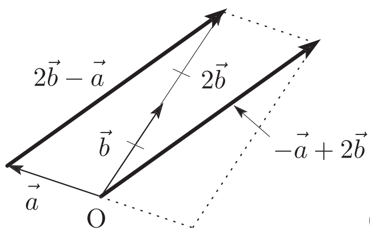
(答)

(5) ＜逆ベクトルから＞



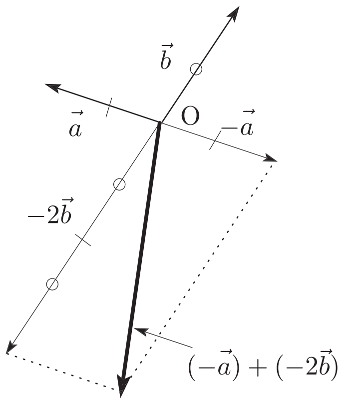
(答)

＜対角線から＞



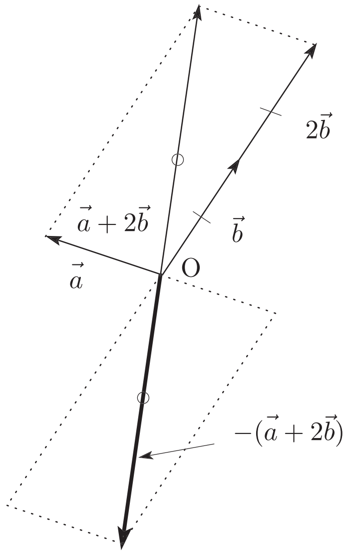
(答)

(6) ＜逆ベクトルから①＞



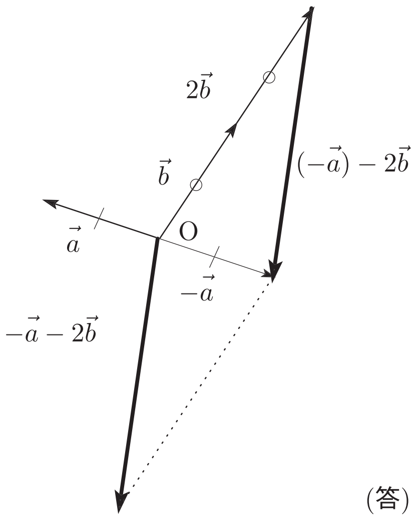
(答)

＜逆ベクトルから②＞



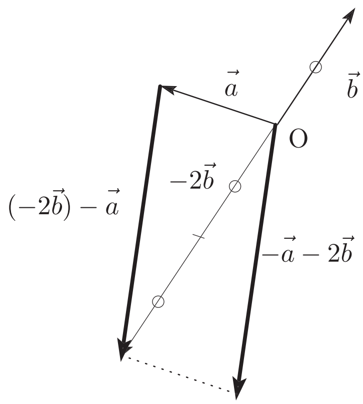
(答)

＜対角線から①＞



(答)

＜対角線から②＞



(答)

【2】(1) ≪証明≫

始点を A にそろえる.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) - \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \vec{0} = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

〔証明終〕

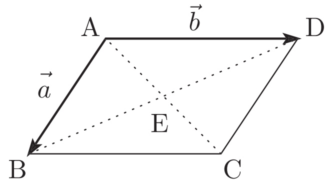
(2) ≪証明≫

始点を A にそろえる.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

〔証明終〕

【3】(1)



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\
&= \boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

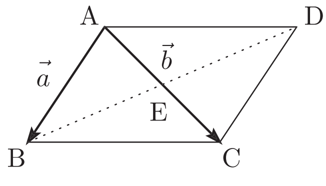
平行四辺形の 2 本の対角線の交点は，それぞれの対角線を 2 等分するから

$$
\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad (\text{答})
$$

一方，

$$
\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad (\text{答})
$$

(2)

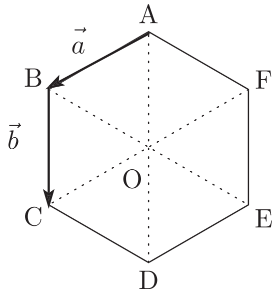


$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \left(\vec{b} - \vec{a}\right) - \vec{a} \\
&= \boldsymbol{\vec{b} - 2\vec{a}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

【4】正六角形の中心を O とする．

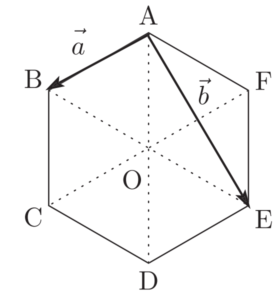
(1)



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AF}} &= \overrightarrow{\mathrm{BO}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \boldsymbol{2\vec{b} - \vec{a}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

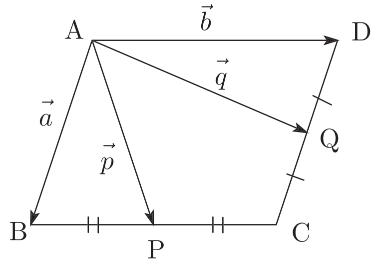
(2)



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \boldsymbol{\vec{a} + \vec{b}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\
&= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【5】点 P，Q は，辺 BC，CD の中点であるから，



$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DQ}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

① × 2 − ② より

$$2\vec{p} - \vec{q} = \frac{3}{2}\vec{a} \qquad \therefore \boldsymbol{\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}} \qquad \text{(答)}$$

① − ② × 2 より

$$\vec{p} - 2\vec{q} = -\frac{3}{2}\vec{b} \qquad \therefore \boldsymbol{\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}} \qquad \text{(答)}$$

【6】ベクトルの成分を縦書きで表す．すなわち，$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ と表す．

(1)

$$2\vec{a}-3\vec{b}=2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-6\\6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{12}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

また，

$$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2^2+12^2}=\mathbf{2\sqrt{37}}\qquad\text{(答)}$$

(2) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\qquad\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ より，

$\vec{a}$ に平行な単位ベクトルは，

$$\pm\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

$\vec{b}$ に平行な単位ベクトルは，

$$\pm\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

(3)

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2t\\3-2t\end{pmatrix}$$

であり，

$$\vec{a}+t\vec{b}\ /\!/\ \vec{c}\iff\text{「}\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}\text{となる }0\text{ でない実数 }k\text{ が存在する」}\cdots(*)$$

ゆえに，k を実数として，

$$\begin{pmatrix}4+2t\\3-2t\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\iff\begin{cases}4+2t=-2k & \cdots①\\3-2t=k & \cdots②\end{cases}$$

① + ② より，

$$-k=7\qquad\therefore\ k=-7$$

② より，

$$-2t=-7-3\qquad\therefore\ t=5$$

このとき $(*)$ はみたされるから，求める t の値は，$\quad\boldsymbol{t=5}\qquad$ (答)

【7】(1)

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}$$

であり,

$$\begin{aligned}\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\2x+y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに

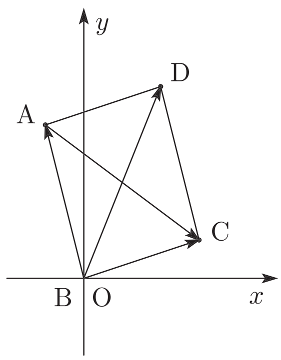
$$\begin{cases}11=x+2y & \cdots ①\\ 10=2x+y & \cdots ②\end{cases}$$

① × 2 − ② より,　$3y=12$　　$\therefore\ y=4$
② × 2 − ① より,　$3x=9$　　$\therefore\ x=3$
よって

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 4)} \qquad \text{(答)}$$

(2) B を原点として，平行四辺形 ABCD を図示すると右のようになる.

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}} \quad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}} \quad \cdots ②$$



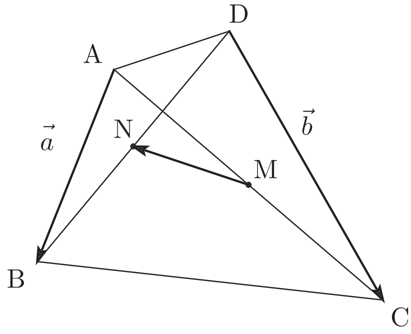
① + ② より,

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}\\ &=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

② − ① より,

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ \overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\}\\ &=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{4}\end{pmatrix} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【8】A を始点として考える．



$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BN}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{AN}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}\\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

ところで四角形 ABCD について

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \cdots①\end{aligned}$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{DA}} = \vec{0}$$

より

$$\begin{aligned}-\overrightarrow{\mathrm{DA}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}} \quad \cdots②\end{aligned}$$

であるから，② を ① へ代入して，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right) - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}} \quad \cdots③\end{aligned}$$

よって，(∗) に ③ を代入して，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

<別解>

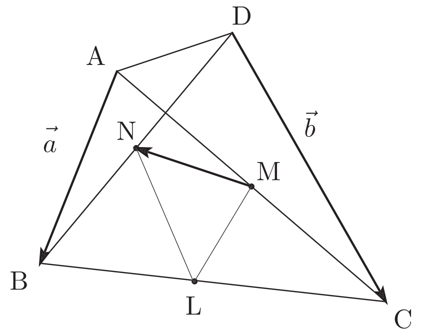
BCの中点をLとする．

MはACの中点であるから，△ABCにおいて中点連結定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

NはBDの中点であるから，△DBCにおいて中点連結定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{LN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\frac{1}{2}\vec{b}$$



以上から

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{ML}} + \overrightarrow{\mathrm{LN}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}$$

【9】 ≪証明≫

「四角形ABCDが平行四辺形である」 $\iff$ 「$\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$」を示す．

（$\Longrightarrow$ の証明）

与えられたベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表す．

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

（$\Longleftarrow$ の証明）

「四角形ABCDが平行四辺形である」 $\iff$ 「$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$」であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

を示す．

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ \iff &\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ \iff &\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ \iff &\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}\end{aligned}$$

以上より，題意は示された． 〔証明終〕

【10】残りの頂点を D とする．頂点の順序が指定されていないので，四角形 ABCD，四角形 ABDC，四角形 ADBC が平行四辺形の 3 通りの場合を考える．

(i) 四角形 ABCD が平行四辺形のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

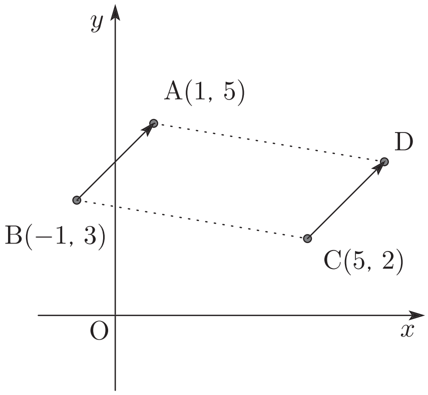
点 D$(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x-5=2 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$\therefore\ (x,\ y) = (7,\ 4)$



(ii) 四角形 ABDC が平行四辺形のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

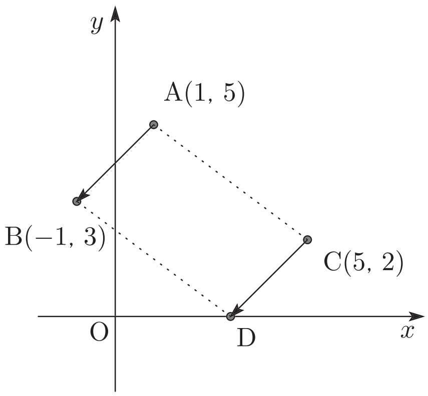
点 D$(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x-5=-2 \\ y-2=-2 \end{cases}$$

$\therefore\ (x,\ y) = (3,\ 0)$



(iii) 四角形 ADBC が平行四辺形のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

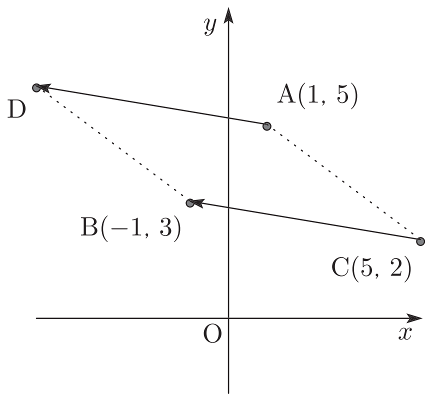
点 D$(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x-1=-6 \\ y-5=1 \end{cases}$$

$\therefore\ (x,\ y) = (-5,\ 6)$



(i)〜(iii) より，求める点の座標は，　**(7, 4)，　(3, 0)，　(−5, 6)**　　(答)

【11】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ より，

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

であるから，求める単位ベクトルは

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \qquad \text{(答)}$$

(2) AB の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ である．

$\triangle$ABC は正三角形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ は垂直である．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{a}$ も垂直であるから，$\overrightarrow{\mathrm{MC}} \parallel \vec{a}$ とわかる．よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|\times(\vec{a}\text{と同方向の単位ベクトル})$$

と表すことができる．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ であり，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MC}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|\times(\vec{a}\text{と同方向の単位ベクトル})\\&=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad(\because (1)\text{ より})\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\\&=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\1+2\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，求める座標は，

$$\boldsymbol{\mathrm{C}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)} \qquad \text{(答)}$$

２章　ベクトル（２）ーベクトルの内積ー

問題

【1】AD $=2$，AB $=1$，AC $=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$AB $=\sqrt{3}$ であり，また，正六角形 ABCDEF は 1 辺の長さが 1 の 6 つの正三角形に分割される．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos 0^\circ=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\mathbf{1}$　　(答)

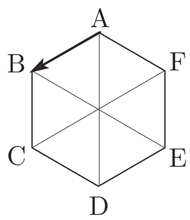
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cos 30^\circ=2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}$　　(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CG}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CF}}\right|\cos 120^\circ=2\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-2}$　　(答)

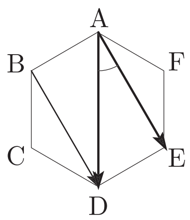
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right|\cos 120^\circ=1\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$　　(答)

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right|\cos 90^\circ=2\cdot\sqrt{3}\cdot 0=\mathbf{0}$　　(答)

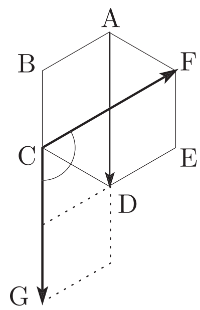
〔図 1〕



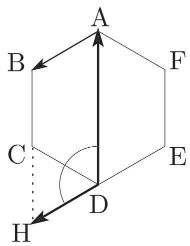
〔図 2〕



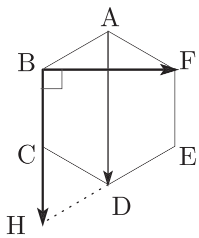
〔図 3〕



〔図 4〕



〔図 5〕



【2】 $\triangle$ABC は直角三角形であるから，$\mathrm{AC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=1$，また，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=\dfrac{\pi}{6}$ である．これより，$\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{BC}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\dfrac{\pi}{6}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}$　　(答)

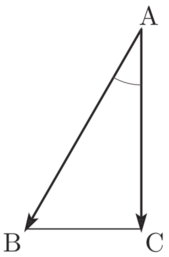
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cos\dfrac{2}{3}\pi=2\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$　　(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{1}$　　(答)

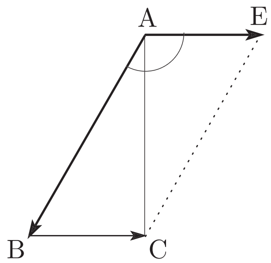
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right|\cos\dfrac{2}{3}\pi=\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$　　(答)

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|\cos\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot1\cdot0=\mathbf{0}$　　(答)

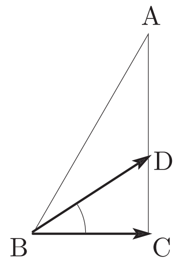
〔図 1〕



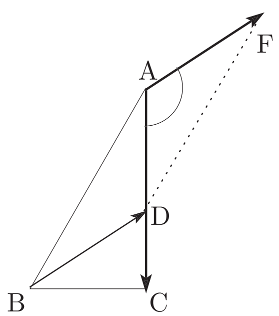
〔図 2〕



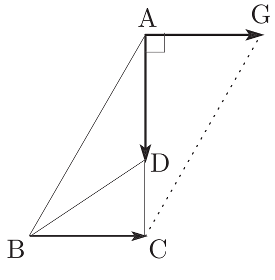
〔図 3〕



〔図 4〕



〔図 5〕



【3】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ より，

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2t\\-3+t\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2&=(4+2t)^2+(-3+t)^2\\&=5t^2+10t+25\\&=5(t+1)^2+20\end{aligned}$$

よって，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ は $t=-1$ のとき最小値 20 をとる．このとき，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ も最小となる．

ゆえに，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ は，

$\boldsymbol{t=-1}$**のとき，最小値** $\sqrt{20}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$ **をとる．** (答)

(2) (1) より $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|=\sqrt{5t^2+10t+25}$

また，

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}4+2t\\-3+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=8+4t-3+t=5t+5$$

条件より，

$$\frac{\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|}=\cos\frac{\pi}{4}\iff 5t+5=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{5t^2+10t+25}\sqrt{5}\right\}$$
$$\iff \sqrt{2}(t+1)=\sqrt{t^2+2t+5}\quad\cdots①$$

ここで，右辺は正であるから，左辺について

$$t+1>0\iff t>-1$$

この条件のもとで ① の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned}2(t+1)^2&=t^2+2t+5\\t^2+2t-3&=0\\(t+3)(t-1)&=0\end{aligned}$$

$t>-1$ を考え，

$\boldsymbol{t=1}$ (答)

【4】(1) $\left|4\vec{a}-3\vec{b}\right|=4\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗して

$$\left|4\vec{a}-3\vec{b}\right|^2=32$$
$$16\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2-24\vec{a}\cdot\vec{b}=32$$

ここで，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$，$\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{2}$ より

$$24\vec{a}\cdot\vec{b}=16\cdot 2+9\cdot 8-32$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=3}\qquad\text{(答)}$$

(2) $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ が最小 $\iff$ $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ が最小であり，

$$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+t^2\left|\vec{b}\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}\quad\cdots(*)$$

ここで，与えられた条件より $\left|\vec{a}\right|^2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求める．
$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=6$ の両辺を 2 乗して，

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=36$$
$$\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=27\quad(\because\ \left|\vec{b}\right|=3)\quad\cdots①$$

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2$ の両辺を 2 乗して，

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=4$$
$$\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=-5\quad(\because\ \left|\vec{b}\right|=3)\quad\cdots②$$

① + ② より

$$2\left|\vec{a}\right|^2=22\qquad\therefore\ \left|\vec{a}\right|^2=11$$

① − ② より

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}=32\qquad\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=8$$

ゆえに $(*)$ について，

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2&=11+9t^2+16t\\&=9\left(t+\frac{8}{9}\right)^2+\frac{35}{9}\end{aligned}$$

よって，$t=-\dfrac{8}{9}$ のとき $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ は最小となる．
したがって，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ を最小にする t の値は，

$$\boldsymbol{t=-\frac{8}{9}}\qquad\text{(答)}$$

【5】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$ より,

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$$

ここで $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角を α $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とすると,

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=-12+12=0 \qquad \therefore\ \alpha=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(答)}$$

同様に,

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角を β $(0\leqq\beta\leqq\pi)$ とすると,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=30-4=26$$

また,

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|&=\sqrt{10^2+(-2)^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}\\ \left|\vec{a}\right|&=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\end{aligned}$$

であるから,

$$\cos\beta=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|}=\frac{26}{2\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \beta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ より,

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+t\\3+2t\end{pmatrix},\quad \vec{a}-t\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-t\\3-2t\end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-t\vec{b}\right)=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix}2+t\\3+2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-t\\3-2t\end{pmatrix}=0\\ &\Longleftrightarrow\quad 4-t^2+9-4t^2=0\\ &\Longleftrightarrow\quad 13-5t^2=0\end{aligned}$$

ゆえに

$$t=\pm\sqrt{\frac{13}{5}}=\pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{65}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

【6】

ポイント

ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ である.
(2 つのベクトルの内積をとることで容易に証明できる)

(1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ より, $\vec{b}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である. また,

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

であるから, 求める単位ベクトルは

$$\pm \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{13}}} \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ より,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} p + 1 = 2 & \cdots ① \\ q + r = -1 & \cdots ② \end{cases}$$

また, $\vec{x} \parallel \vec{y}$ より, $\vec{x} = k\vec{y}$ となる 0 でない実数 k が存在する. ゆえに,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \iff \begin{cases} p = k & \cdots ③ \\ q = kr & \cdots ④ \end{cases}$$

① より $p = 1$, ③ より $k = 1$. ④ に代入して

$$q = r \quad \cdots ⑤$$

②, ⑤ を連立して解いて

$$q = r = -\frac{1}{2}$$

以上より,

$$\boldsymbol{p = 1,\ q = r = -\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$ より,

$$\left| \vec{a} + \vec{b} \right| = 2, \quad \left| \vec{y} \right| = \sqrt{1 + r^2}$$

また,

$$\left(\vec{a} + \vec{b} \right) \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = 2r$$

であるから，

$$\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{y}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{y}\right|}=\cos 30^\circ \iff 2r=2\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\iff 2r=\sqrt{3}\sqrt{1+r^2}$$

右辺は正であるから，左辺について $r>0$. この条件のもとで両辺を 2 乗して

$$4r^2=3(1+r^2) \iff r^2=3$$

$r>0$ を考え，

$$\boldsymbol{r=\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=2-1=\mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$
$$\therefore\ \cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}} \quad (\because\ \sin\angle\mathrm{BAC}\geqq 0)$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}} \qquad \text{(答)}$$

(4)

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【8】与えられた条件は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \quad \cdots(*)$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\sqrt{2}$$

である．$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であるから,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$$

この両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 &= \left|-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \\
\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \\
4+1+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= 2 \\
\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

よって求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 1^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【9】(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とすると

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta} \qquad (\because\ 0<\theta<\pi\text{より}, \sin\theta>0) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}$$

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とする．(1) の結果より

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2-2a_1b_1a_2b_2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}\\&=\frac{1}{2}|\,a_1b_2-a_2b_1\,|\end{aligned}$$

〔証明終〕

【10】点 P は，円 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 上を動くから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\cos\theta\\2+\sin\theta\end{pmatrix}$$

とおける．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2+\cos\theta\\2+\sin\theta\end{pmatrix}=2+\cos\theta$$

ゆえに $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ を考え，求める最大値，最小値は

$$\begin{cases}\textbf{最大値 3}\quad(\cos\boldsymbol{\theta}=\mathbf{1},\ \ \text{つまり }\mathbf{P(3,\ 2)}\text{ のとき})\\\textbf{最小値 1}\quad(\cos\boldsymbol{\theta}=\mathbf{-1},\ \text{つまり }\mathbf{P(1,\ 2)}\text{ のとき})\end{cases}$$

(答)

【11】$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\quad\cdots(*)$ の両辺と $\vec{a}$ との内積をとると，

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{0}\quad&\Longleftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{0}\\&\Longleftrightarrow\quad\left|\vec{a}\right|^2-1-1=0\\&\Longleftrightarrow\quad\left|\vec{a}\right|^2=2\qquad\therefore\ \left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}\end{aligned}$$

また $(*)$ の両辺と $\vec{b}$ との内積をとると，

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\vec{0}\quad&\Longleftrightarrow\quad\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{0}\\&\Longleftrightarrow\quad-1+\left|\vec{b}\right|^2-1=0\\&\Longleftrightarrow\quad\left|\vec{b}\right|^2=2\qquad\therefore\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\theta}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}\qquad\text{(答)}$$

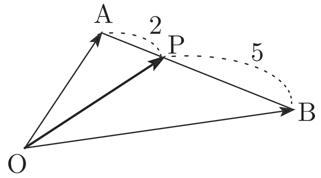
３章　ベクトル（３）ー位置ベクトルー

問題

【1】位置ベクトルの基準点を O とし，求める点をそれぞれ，$\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{Q}(\vec{q})$ とする．

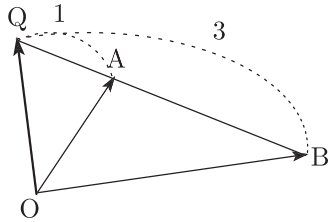
(1) 右の図で AP: PB= 2: 5 より，

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= \frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+5}\\ &= \boldsymbol{\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$



(2) 右の図で AQ: QB = 1: 3 より，

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= \frac{(-3)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1-3}\\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

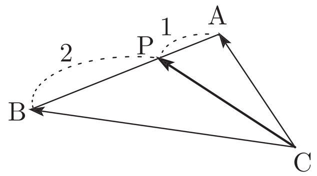


【2】(1)

$$\vec{p}=\frac{2\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}}{1+2}$$

であるから，$\mathrm{P}(\vec{p})$ は

線分 AB を 1 : 2 に内分する点　　(答)

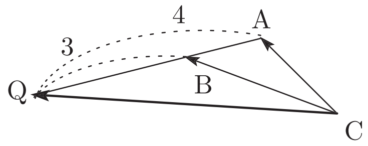


(2)

$$\vec{q}=\frac{-3\vec{a}+4\vec{b}}{4+(-3)}$$

であるから，$\mathrm{Q}(\vec{q})$ は

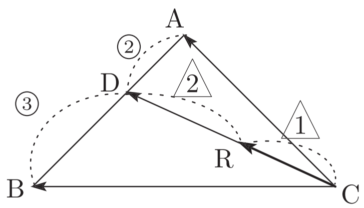
線分 AB を 4 : 3 に外分する点　　(答)



(3)

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{15}\\ &= \frac{5}{15}\cdot\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}\end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{R}(\vec{r})$ は

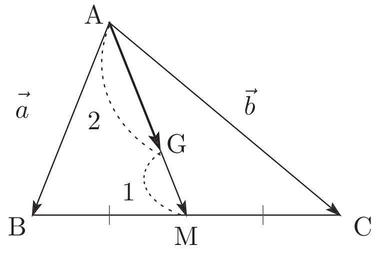


線分 AB を 2 : 3 に内分する点を D としたとき，
線分 CD を 1 : 2 に内分する点　　(答)

【3】辺 BC の中点を M とすると

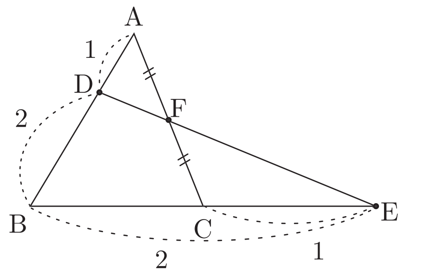
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

であり，また重心 G は AM を 2: 1 に内分する点であるから，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【4】(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{c}$ とおくと，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \frac{2}{3}\vec{a} \\ \overrightarrow{\mathrm{BF}} &= \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right) \\ \overrightarrow{\mathrm{BE}} &= 2\vec{c}\end{aligned}$$

であるから，

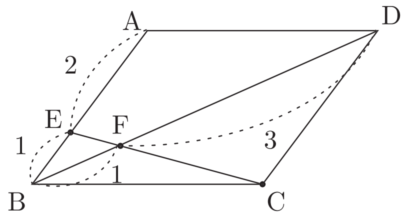
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= \overrightarrow{\mathrm{BE}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= 2\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DF}} &= \overrightarrow{\mathrm{BF}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{a} \\ &= \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{a} \\ &= \frac{1}{4}\left(2\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\end{aligned}$$

ゆえに 3 点 D，E，F は同一直線上にある．　〔証明終〕

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とおくと,



$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{2}{3}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{3\vec{b} + \vec{d}}{4}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{b} + \vec{d}$$

よって

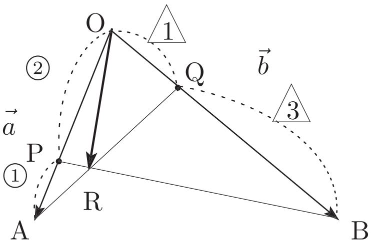
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EF}} &= \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= \frac{3\vec{b} + \vec{d}}{4} - \frac{2}{3}\vec{b} \\ &= \frac{1}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d}\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= \vec{b} + \vec{d} - \frac{2}{3}\vec{b} \\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{d} \\ &= 4\left(\frac{1}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d}\right) \\ &= 4\overrightarrow{\mathrm{EF}}\end{aligned}$$

ゆえに 3 点 C, E, F は同一直線上にある.　　　〔証明終〕

【5】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とする.



3 点 P, R, B が共線であるから,

$$\mathrm{PR}:\mathrm{RB}=s:(1-s)\quad (s\text{ は実数})$$

とおくと, $\vec{p}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$ であり,

$$\begin{aligned}\vec{r}&=(1-s)\vec{p}+s\vec{b}\\&=\frac{2}{3}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\qquad \cdots①\end{aligned}$$

また, 3 点 A, R, Q が共線であるから,

$$\mathrm{AR}:\mathrm{RQ}=t:(1-t)\quad (t\text{ は実数})$$

とおくと, $\vec{q}=\dfrac{1}{4}\vec{b}$ であり,

$$\begin{aligned}\vec{r}&=(1-t)\vec{a}+t\vec{q}\\&=(1-t)\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}\qquad \cdots②\end{aligned}$$

ここで, $\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから, ①, ② の係数を比較して,

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}(1-s)=1-t\\ s=\dfrac{1}{4}t\end{cases}$$

これを解いて,

$$s=\frac{1}{10},\ t=\frac{2}{5}$$

② に代入して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}}\qquad (\text{答})$$

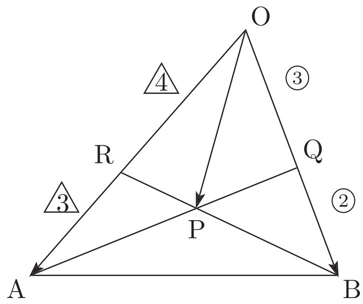
(2) (1) の結果より

$$\mathrm{AR}:\mathrm{RQ}=t:(1-t)=\frac{2}{5}:\frac{3}{5}=\mathbf{2:3}\qquad (\text{答})$$

【6】$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{5}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{4}{7}\vec{a}$$

である．



3 点 A,P,Q は共線であるから，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=s:(1-s)\quad (s \text{ は実数})$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}\quad\cdots①\end{aligned}$$

また，3 点 B,P,R は共線であるから，

$$\mathrm{RP}:\mathrm{PB}=t:(1-t)\quad (t \text{ は実数})$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{4}{7}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\quad\cdots②\end{aligned}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$\begin{cases}1-s=\dfrac{4}{7}(1-t)\\ \dfrac{3}{5}s=t\end{cases}$$

これを解いて，

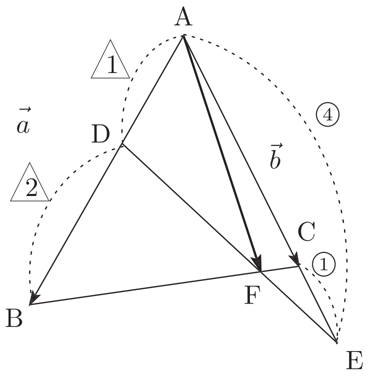
$$s=\frac{15}{23},\quad t=\frac{9}{23}$$

① に代入して，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{23}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{9}{23}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}\qquad (\text{答})$$

【7】(1) 3 点 D($\vec{d}$)，F($\vec{f}$)，E($\vec{e}$) が共線であるから，

$$\mathrm{DF} : \mathrm{FE} = t : (1-t) \qquad (t\ は実数)$$



とおくと，$\vec{d} = \dfrac{1}{3}\vec{a}$，$\vec{e} = \dfrac{4}{3}\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{f} &= (1-t)\vec{d} + t\vec{e} \\ &= \frac{1}{3}(1-t)\vec{a} + \frac{4}{3}t\vec{b} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

また，3 点 B($\vec{a}$)，F($\vec{f}$)，C($\vec{b}$) が共線であるから，

$$\frac{1}{3}(1-t) + \frac{4}{3}t = 1$$

$$\therefore\ t = \frac{2}{3}$$

① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \boldsymbol{\frac{1}{9}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b}} \qquad (答)$$

(2) (1) の結果より

$$\mathrm{DF} : \mathrm{FE} = t : (1-t) = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = \mathbf{2 : 1} \qquad (答)$$

(3) (1) の結果より

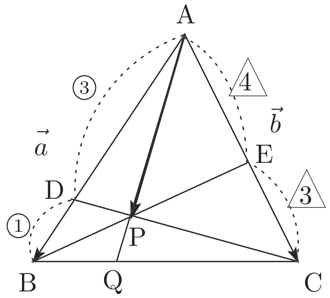
辺 BC を 8 : 1 に内分する点　　(答)

【8】3 点 D，P，C が共線であるから，

$$\mathrm{DP} : \mathrm{PC} = s : (1-s) \qquad (s \text{ は実数})$$

として，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots ① \\ &= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{7}{4}s\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$



3 点 B，P，E が共線であるから，

$$\frac{3}{4}(1-s) + \frac{7}{4}s = 1$$

これを解いて

$$s = \frac{1}{4}$$

① に代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{9}{16}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

また 3 点 A，P，Q が共線であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= k\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \frac{9}{16}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

3 点 B，Q，C が共線であるから

$$\frac{9}{16}k + \frac{1}{4}k = 1$$

これを解いて

$$k = \frac{16}{13}$$

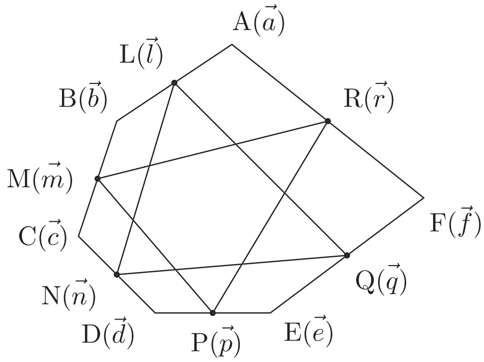
ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{9}{13}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{13}{16}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

以上より，

点 Q は **BC** を **4: 9** に内分する点　　(答)
点 P は **AQ** を **13: 3** に内分する点　　(答)

【9】 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$, $\dots$, $\mathrm{F}(\vec{f})$,
点 $\mathrm{L}(\vec{l})$, $\mathrm{M}(\vec{m})$, $\dots$, $\mathrm{R}(\vec{r})$,
$\mathrm{G}(\vec{g})$, $\mathrm{H}(\vec{h})$ とする.



$$\vec{l}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{n}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\ \vec{q}=\frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\vec{g}&=\frac{\vec{l}+\vec{n}+\vec{q}}{3}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}\right)\\&=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}\end{aligned}$$

また

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \vec{p}=\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2},\ \vec{r}=\frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}$$

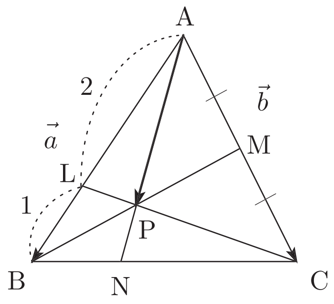
であるから

$$\begin{aligned}\vec{h}&=\frac{\vec{m}+\vec{p}+\vec{r}}{3}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}+\frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}\right)\\&=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}\end{aligned}$$

以上より, $\vec{g}=\vec{h}$ となり, 点 G と点 H は一致する. 〔証明終〕

【10】(1) A を始点として考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}} = \frac{2}{3}\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\vec{b}$$



であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BM}} &= \overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \boldsymbol{-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CL}} &= \overrightarrow{\mathrm{AL}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 条件より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \vec{a} + m\overrightarrow{\mathrm{BM}}\\ &= \vec{a} + m\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\\ &= (1-m)\,\vec{a} + \frac{1}{2}m\vec{b} \qquad \cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \vec{b} + n\overrightarrow{\mathrm{CL}}\\ &= \vec{b} + n\left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right)\\ &= \frac{2}{3}n\vec{a} + (1-n)\vec{b} \qquad \cdots②\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$\begin{cases}1 - m = \dfrac{2}{3}n\\ \dfrac{1}{2}m = 1 - n\end{cases} \qquad \therefore\ \boldsymbol{m = \frac{1}{2},\ n = \frac{3}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

であり，3 点 A，P，N は共線であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{4}k\vec{b}$$

また 3 点 B，N，C は共線であるから

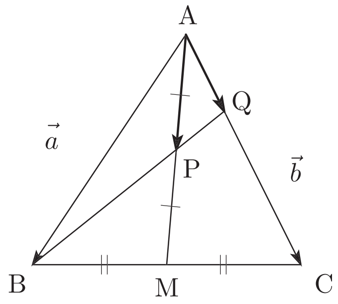
$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{4}k = 1 \qquad \therefore\ k = \frac{4}{3}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}} \qquad \text{(答)}$$

【11】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{m}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{q}$ とする．

$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ であるから，条件より



$$
\begin{aligned}
\vec{p}&=\frac{1}{2}\vec{m}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\\
&=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

また，

$$
\begin{aligned}
\vec{q}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BP}} \quad (\because\ 3\text{ 点 B, P, Q は共線})\\
&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\
&=\vec{a}+s\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}\right)\\
&=\left(1-\frac{3}{4}s\right)\vec{a}+\frac{1}{4}s\vec{b} \quad \cdots①
\end{aligned}
$$

また 3 点 A，Q，C は共線より，

$$\vec{q}=t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\vec{b} \quad \cdots②$$

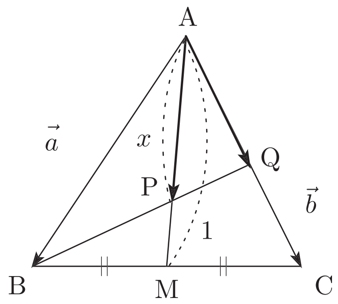
$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立より，①，② の係数を比較して

$$\begin{cases}1-\dfrac{3}{4}s=0\\ \dfrac{1}{4}s=t\end{cases} \qquad \therefore\ s=\frac{4}{3},\ t=\frac{1}{3}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

(2) 点 P は線分 AM 上の点であるから，$0 \leqq x \leqq 1$ であり，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AM}} = x$ より，



$$
\begin{aligned}
\vec{p} &= x\vec{m} \\
&= x\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\
&= \frac{x}{2}\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b}
\end{aligned}
$$

3 点 B，P，Q は共線より，

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{BP}} \qquad (s \text{ は実数})$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BP}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\
&= \vec{a} + s\left(\frac{x}{2}\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \\
&= \left(1 - s + \frac{sx}{2}\right)\vec{a} + \frac{sx}{2}\vec{b} \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

また 3 点 A，Q，C は共線より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad (t \text{ は実数})$$

ゆえに

$$\vec{q} = t\vec{b} \qquad \cdots ②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$
\begin{cases}
1 - s + \dfrac{sx}{2} = 0 \\
\dfrac{sx}{2} = t
\end{cases}
\qquad \therefore\ s = \frac{2}{2-x},\ t = \frac{x}{2-x}
$$

ゆえに ② から

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boldsymbol{\frac{x}{2-x}\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

問題

【1】求める直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，点 A，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{p}$ とする．またベクトルの成分を縦書きで表示する．

(1) 求める直線のベクトル方程式は，t を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+4t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = 1-3t & \cdots① \\ y = 2+4t & \cdots② \end{cases}$$

① × 4 + ② × 3 より t を消去すると

$$\boldsymbol{4x + 3y = 10} \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める直線は点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

t を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+7t \\ -1+4t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = -3+7t & \cdots③ \\ y = -1+4t & \cdots④ \end{cases}$$

③ × 4 − ④ × 7 より t を消去すると

$$\boldsymbol{4x - 7y = -5} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める直線は点 A を通り，$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする直線であるから，

$$\begin{aligned}\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\vec{n}&=0\\ \begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}&=0\\ 3(x-3)-2y&=0\end{aligned}$$

よって求める直線は

$\boldsymbol{3x-2y=9}$　　(答)

【2】求める円周上の点を P$(x,\ y)$，P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする.

(1) $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ とすると，

$$\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=4 \quad\Longleftrightarrow\quad \left|\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}\right|=4$$

両辺を 2 乗して，求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-3)^2=16}$　　(答)

(2) 求める円の中心を C$(\vec{c})$ とすると，C は AB の中点であるから

$$\begin{aligned}\vec{c}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\}\\ &=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

また半径を r とすると

$$\begin{aligned}r&=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\\ &=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\\ &=\left|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right|\\ &=\left|\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right|\\ &=\sqrt{5}\end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=5}$　　(答)

<別解>

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ とすると，円周上の点 P(ただし，P$\neq$ A，P$\neq$ B) に対し AP $\perp$ BP であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

となる．これは点 P が点 A または点 B と一致するときにも成立する．ゆえに

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right) &= 0\\
\begin{pmatrix} x-2\\ y+3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-4\\ y-1 \end{pmatrix} &= 0\\
(x-2)(x-4)+(y+3)(y-1) &= 0\\
x^2-6x+y^2+2y+5 &= 0
\end{aligned}
$$

ゆえに求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=5} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める円の半径を r とすると，

$$r=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\begin{pmatrix} -2-1\\ 5-6 \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} -3\\ -1 \end{pmatrix}\right|=\sqrt{10}$$

ゆえに $\vec{c}=\begin{pmatrix} -2\\ 5 \end{pmatrix}$ として

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{p}-\vec{c}\right| &= \sqrt{10}\\
\left|\begin{pmatrix} x+2\\ y-5 \end{pmatrix}\right| &= \sqrt{10}
\end{aligned}
$$

よって求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-5)^2=10} \qquad \text{(答)}$$

【3】原点を O とする．

(1) $\vec{p} \neq \vec{a}$ のとき，OB⊥AP である．また $\vec{p}=\vec{a}$ のとき，点 P は点 A に一致する．よって点 P は，次の図形上の点である．(図 1 参照)

点 A を通り，直線 OB に垂直な直線　　(答)

(2) $\vec{p} \neq \vec{0}$ のとき AB⊥OP である．また $\vec{p}=\vec{0}$ のとき，点 P は点 O に一致するから，点 P は，次の図形上の点である．(図 2 参照)

点 O を通り，直線 AB に垂直な直線　　(答)

(3) $\vec{p} \neq \vec{c}$ のとき，AB⊥PC である．また $\vec{p}=\vec{c}$ のとき，点 P は点 C に一致する．よって点 P は，次の図形上の点である．(図 3 参照)

点 C を通り，直線 AB に垂直な直線　　(答)

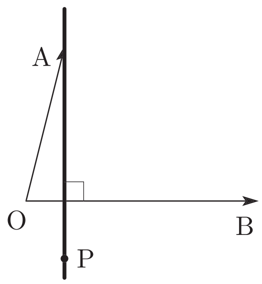
(4) $\vec{p} \neq \vec{a}$ かつ $\vec{p} \neq \vec{b}$ のとき，AP ⊥ BP，すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\vec{p}-\vec{a}\right) \cdot \left(\vec{p}-\vec{b}\right) = 0$$

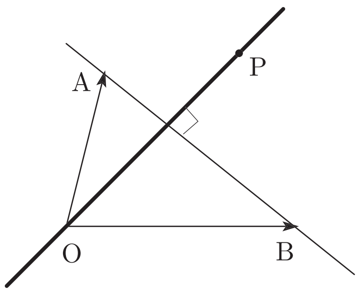
である．$\vec{p}=\vec{a}$ または $\vec{p}=\vec{b}$ のときも上式はみたされる．ゆえに点 P は，次の図形上の点である．(図 4 参照)

線分 AB を直径とする円周　　(答)

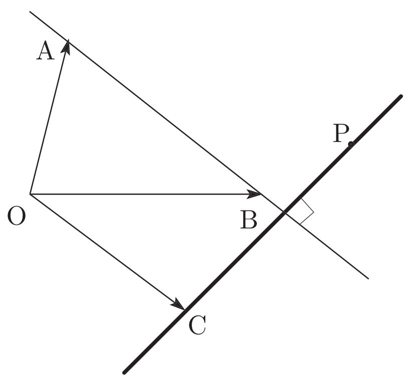
〔図 1〕



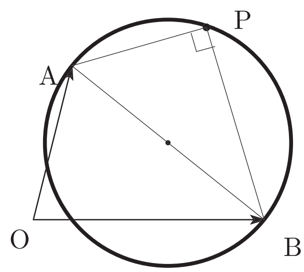
〔図 2〕



〔図 3〕



〔図 4〕



【4】(1) l_1 の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ であるから，t を実数として

$$l_1\ :\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+t\\t\end{pmatrix}$$

また l_2 は 2 点 A(0, 1)，B(2, -3) を通るから，s を実数として

$$l_2\ :\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1-s)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2s\\1-4s\end{pmatrix}$$

以上より，

$$\begin{cases} l_1\ :\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2+t}\\\boldsymbol{t}\end{pmatrix} \\ l_2\ :\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2s}\\\boldsymbol{1-4s}\end{pmatrix}\end{cases}\qquad (s,\ t\text{ は実数})\qquad (\text{答})$$

(2) l_1，l_2 を連立して

$$\begin{cases} 2+t=2s & \cdots ① \\ t=1-4s & \cdots ② \end{cases}$$

これを解いて，

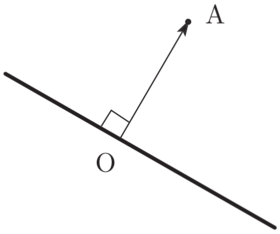
$$s=\frac{1}{2},\quad t=-1$$

l_1 の方程式に代入して，求める交点は

(1, − 1)　　(答)

【5】(1) 与式の両辺を 2 乗して

$$\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}-2\vec{a}\right|^2$$
$$\left|\vec{p}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\left|\vec{a}\right|^2$$
$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{p}=0$$



よって，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき OA ⊥ OP である．
また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも，この式はみたされる．
ゆえに点 P は

点 O を通り，直線 OA に垂直な直線　　(答)

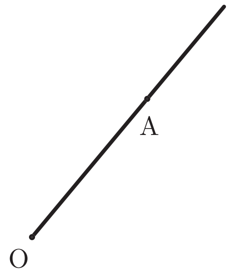
上の点である．

(2) $\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta$$

であるから

$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$
$$\cos\theta=1\qquad\therefore\ \theta=0$$



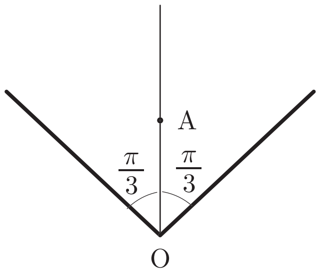
となる．また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも与式はみたされ，このとき点 P は点 O に一致する．よって点 P は

半直線 OA　　(答)

上の点である．

(3) $\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$2\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$
$$2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$
$$\cos\theta=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$$



である．
また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも与式はみたされ，このとき点 P は点 O に一致する．
したがって，点 P は

半直線 OA と $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ の角をなす半直線　　(答)

上の点である．

【6】 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

ゆえに三角形 ABC は,

$$\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$$

の直角三角形である．また,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

より，点 A を始点として変形すると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ に注意して整理すると

$$3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|^2=\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

ゆえに

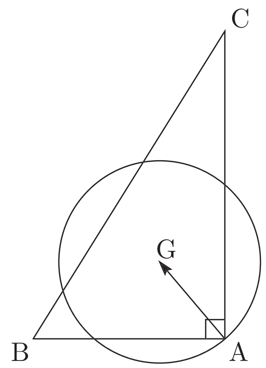
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$

三角形 ABC の重心を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ より，上式は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|$$

ゆえに点 P は,

三角形 ABC の重心 G を中心とし,
半径 AG の円周上の点. (答)



【7】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ である．これが直線 l の方向ベクトルであるから，直線 l のベクトル方程式は s を実数として

$$l:\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3s\\4-s\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

一方，A(3, 2)，B(−2, 7) を通る直線 m の方向ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$$

であるから，m のベクトル方程式は，t を実数として

$$m:\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-5t\\2+5t\end{pmatrix}\quad\cdots②$$

交点においては $\vec{p}=\vec{q}$ であるから

$$\begin{cases}1+3s=3-5t\\4-s=2+5t\end{cases}$$

これを解くと，

$$(s,\ t)=\left(0,\ \frac{2}{5}\right)$$

① に代入して，求める交点は

(1, 4)　　(答)

(2) 直線 n のベクトル方程式を求める．
A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を 3 頂点とする三角形の重心を G($\vec{g}$) とすると

$$\vec{g}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

より，

$$\vec{g}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3+2+4\\0+5+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

また n の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ であるから，n 上の点を P($\vec{p}$) とすると，直線 n のベクトル方程式は $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ として

$$n:\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\3-t\end{pmatrix}\quad\cdots①$$

一方，D(−1, 3)，E(1, 9) とすると，D($\vec{d}$)，E($\vec{e}$) を直径の両端とする円 C の中心の位置ベクトルは

$$\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+1\\3+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$$

である．また円 C の直径は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(9-3)^2}=2\sqrt{10}$$

であるから，半径を r とすると

$$r = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$$

円周上の点を $\mathrm{Q}(\vec{q})$ とすれば，$\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{10}$$
$$x^2 + (y-6)^2 = 10 \quad \cdots ②$$

交点において $\vec{p} = \vec{q}$ であるから，$x = 2t+1$，$y = -t+3$ を ② に代入すると，

$$\begin{aligned} (2t+1)^2 + (-t+3-6)^2 &= 10 \\ t(t+2) &= 0 \\ t &= 0,\ -2 \end{aligned}$$

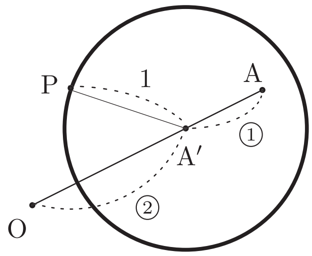
① に代入して，求める交点は

$t = 0$ のとき　**(1, 3)**　　(答)
$t = -2$ のとき　**(−3, 5)**　　(答)

【8】 原点を O とする.

(1)

$$\left|3\left(\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\right|=3$$
$$\left|\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}\right|=1$$



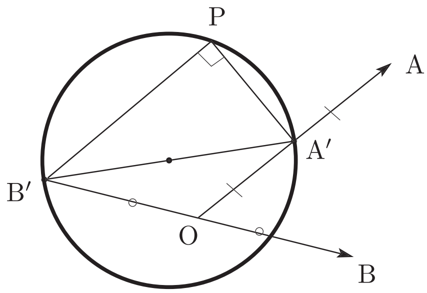
よって，線分 OA を 2: 1 に内分する点を A′ とすると，点 P は

点 A′ を中心とする半径 1 の円周　　(答)

上の点である.

(2)

$$2\left(\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot(\vec{p}+\vec{b})=0$$
$$\left(\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\{\vec{p}-(-\vec{b})\}=0$$



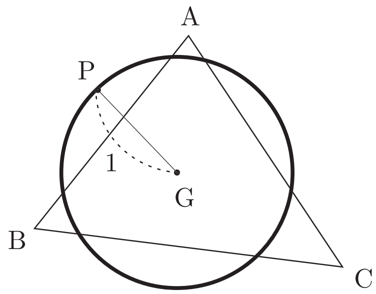
$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}=-\vec{b}$ とすると，
$\mathrm{A'P}\perp\mathrm{B'P}$ である.
また，点 P が A′ または B′ と一致するときも上式はみたされる．ゆえに線分 OA の中点を A′，O に関して B と対称な点を B′ とすると，点 P は

線分 A′B′ を直径とする円周上　　(答)

の点である.

(3)

$$\left|(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})\right|=3$$
$$\left|3\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|=3$$
$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=1$$



ここで，△ABC の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$ とすると

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

であるから

$$\left|\vec{p}-\vec{g}\right|=1 \qquad \therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{GP}}\right|=1$$

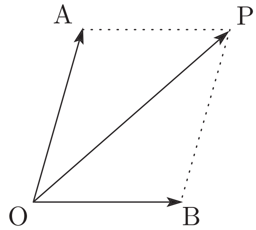
よって，点 P は

△ABC の重心 G を中心とする半径 1 の円周上　　(答)

の点である.

【9】$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots (*)$ とおく.

(1) 四角形 OAPB が平行四辺形となるとき

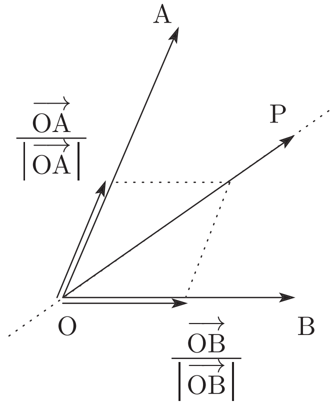


$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから, $(*)$ と係数を比較して, 求める値は

$$\boldsymbol{s = t = 1} \quad \textbf{(答)}$$

(2) 点 P は ∠AOB の二等分線であるから, k を実数として



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\right) \\ &= \frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

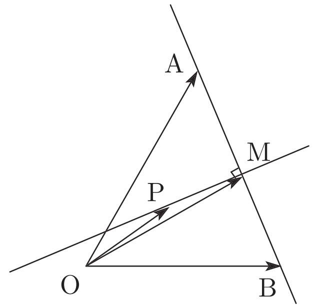
$(*)$ と係数を比較して

$$s = \frac{k}{3}, \quad t = \frac{k}{2}$$

k を消去して, 求める関係式は

$$\boldsymbol{3s = 2t} \quad \textbf{(答)}$$

(3) 線分 AB の中点を M とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \quad \cdots (\#)$$

点 P は, 線分 AB の垂直二等分線上にあるから

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$(*)$, $(\#)$ を代入して

$$\begin{aligned}&\left\{\left(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right\} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0 \\ &\left\{(2s-1)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (2t-1)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0 \\ -(2s-1)&\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + (2t-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + \{(2s-1) - (2t-1)\}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3 \cdot 2 \cdot \dfrac{5}{6} = 5$ より

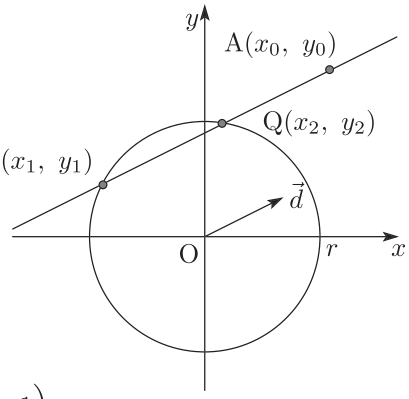
$$\begin{aligned}-(2s-1) \cdot 3^2 + (2t-1) \cdot 2^2 + 2(s-t) \cdot 5 = 0 \\ \therefore \quad -8s - 2t + 5 = 0\end{aligned}$$

ゆえに求める関係式は

$$\boldsymbol{8s + 2t = 5} \quad \textbf{(答)}$$

【10】 A$(x_0,\ y_0)$，P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ とし，
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に平行な単位ベクトルを $\vec{d}$ とする．
すなわち

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad a^2+b^2=1$$



とおく．このとき実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\vec{d}$$

と表されるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\left|s\vec{d}\right|\cdot\left|t\vec{d}\right|=|st|\quad\left(\because\ \left|\vec{d}\right|=1\right)$$

となる．ところで

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\vec{d}$$

であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=r$ であるから，上式の両辺それ自身との内積をとって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\vec{d}\right|^2\\ r^2&=\left|\begin{pmatrix}x_0+sa\\y_0+sb\end{pmatrix}\right|^2\\ &=(x_0+sa)^2+(y_0+sb)^2\\ &=x_0^2+2sax_0+s^2a^2+y_0^2+2sby_0+s^2b^2\end{aligned}$$

$a^2+b^2=1$ に注意して，s に関して整理すると

$$s^2+2(ax_0+by_0)s+x_0^2+y_0^2-r^2=0\quad\cdots①$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}$$

であるから，上と同様の計算により

$$t^2+2(ax_0+by_0)t+x_0^2+y_0^2-r^2=0\quad\cdots②$$

①，② は，s，t が x の 2 次方程式

$$x^2+2(ax_0+by_0)x+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

の 2 解であることを示す．ゆえに解と係数の関係より

$$\begin{aligned}st&=x_0^2+y_0^2-r^2\\ |st|&=\left|x_0^2+y_0^2-r^2\right|\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=x_0^2+y_0^2$ であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\left|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-r^2\right|$$

〔証明終〕

問題

【1】

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = -\overrightarrow{\mathrm{EA}} = \boldsymbol{-\,\vec{a}} \qquad \text{(答)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{c}} \qquad \text{(答)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{EG}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}} + \overrightarrow{\mathrm{EH}} = \boldsymbol{\vec{b} + \vec{c}} \qquad \text{(答)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right) = \boldsymbol{\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{GN}} - \overrightarrow{\mathrm{GM}} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EH}}\right) - \overrightarrow{\mathrm{GM}} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\\ &= \boldsymbol{-\,\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-0 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2} = \boldsymbol{\sqrt{19}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-0 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-3 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{22}$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

よって

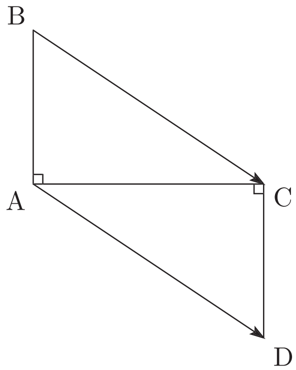
$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$$

であるから

$$\boldsymbol{\angle \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{2}} \text{ の直角三角形} \qquad \text{(答)}$$

(3) 右図より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$



原点を O とすると，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

D$(\mathbf{6,\ 0,\ -6})$　　(答)

(4) 求める点を E とし，その座標を $(3,\ x,\ y)$ とすると

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|^2 &= 1 + y^2 + (z+1)^2 \quad \cdots\cdots ① \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2 &= 4 + (y-3)^2 + (z-2)^2 \quad \cdots\cdots ② \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2 &= 4 + (y-3)^2 + (z+3)^2 \quad \cdots\cdots ③ \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right| &= \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right| \quad \cdots\cdots (*) \end{aligned}$$

であるから，$(*)$ に ②，③ を代入して

$$\begin{aligned} (z-2)^2 &= (z+3)^2 \\ 10z &= -5 \\ \therefore \quad z &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

①，② に代入して，再び $(*)$ とから

$$\begin{aligned} 1 + y^2 + \frac{1}{4} &= 4 + (y-3)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 2\right)^2 \\ 6y &= 18 \\ \therefore \quad y &= 3 \end{aligned}$$

したがって，求める点の座標は

$\left(\mathbf{3,\ 3,\ -\frac{1}{2}}\right)$　　(答)

(5) (2) より，$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \cdot \sqrt{22} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{418}}{2}} \end{aligned}$$　　(答)

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \mathbf{3} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

よって

$$\cos \angle \mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \angle \mathrm{BAC} \leqq \pi$ より

$$\angle \mathrm{BAC} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \sin \angle \mathrm{BAC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4) 求めるベクトルを $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{n} = -x + z = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

また $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \vec{n} = -x + 2y + 2z = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

$\vec{n}$ は単位ベクトルであるから

$$\left|\overrightarrow{n}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots\cdots ③$$

① より

$$z = x \quad \cdots\cdots ④$$

④ を ② に代入して

$$y = -\frac{1}{2}x \quad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤ を ③ に代入して

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{4}{9}$$

$$\therefore\ x = \pm\frac{2}{3}$$

それぞれ ④，⑤ に代入して

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \text{のとき} \quad y = -\dfrac{1}{3},\ z = \dfrac{2}{3} \\ x = -\dfrac{2}{3} \text{のとき} \quad y = \dfrac{1}{3},\ z = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

よって，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

<別解>

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの一つを $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく．条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \cdots ① \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \cdots ②$$

① より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -x + z = 0 \quad \cdots ①'$$

また ② より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -x + 2y + 2z = 0 \quad \cdots ②'$$

ここで $x = 2$ とおくと，

①$'$より　$z = 2$

②$'$より　$y = \frac{1}{2}(2 - 4) = -1$

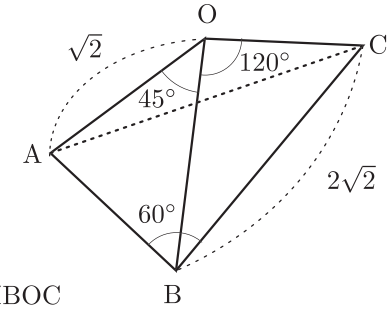
ゆえに

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ここで $\left|\overrightarrow{n}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$ より，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{n}}\right|} = \pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}$$
$$2=\sqrt{2}\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\therefore\ \left|\vec{b}\right|=\mathbf{2}\qquad(\text{答})$$

(2) △OBC に余弦定理を用いると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-2\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\angle\mathrm{BOC}$$
$$(2\sqrt{2})^2=2^2+\left|\vec{c}\right|^2-2\cdot2\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\ \left|\vec{c}\right|^2+2\left|\vec{c}\right|-4=0$$

$\left|\vec{c}\right|>0$ に注意してこれを解いて

$$\left|\vec{c}\right|=\boldsymbol{\sqrt{5}-1}\qquad(\text{答})$$

(3) △OAB に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}\\&=(\sqrt{2})^2+2^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=2\end{aligned}$$

また △ABC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\angle\mathrm{ABC}\\&=2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=6\end{aligned}$$

△OAC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{AOC}&=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2-\mathrm{AC}^2}{2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|}\\&=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5}-1)^2-6}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)}\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\angle\mathrm{AOC}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}\qquad(\text{答})$$

【5】(1) G は △OAB の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}}}{\mathbf{3}} \qquad (答)$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} \\ &= \vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(-\left|\vec{a}\right|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \left|\vec{b}\right|^2 + 3\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

ここで OA = OB = OC であるから

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right|$$

また △OAB は正三角形より，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \dfrac{\pi}{3}$ だから

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2$$

これらを $(*)$ に代入して

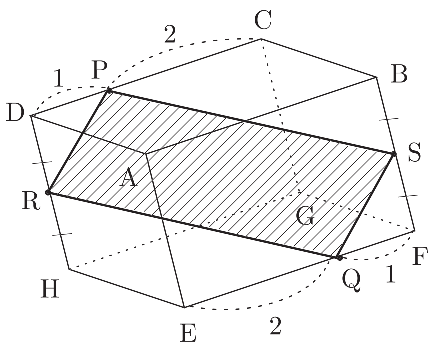
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \frac{1}{9}\left(-\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 + \frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ゆえに

OG⊥GC　〔証明終〕

【6】(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{DR}} - \overrightarrow{\mathrm{DP}} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DH}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}} \\ &= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\vec{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\vec{c}} \qquad (答)\end{aligned}$$



(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{FQ}} - \overrightarrow{\mathrm{FS}} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{FE}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FB}} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{SQ}}$$

すなわち，四角形 PRQS の 1 組の対辺が平行でかつ長さが等しいので
四角形 PRQS は平行四辺形である．　　〔証明終〕

【7】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ 5-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

以上より，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-5)\cdot(-1) + 1\cdot(-4) + 3\cdot 2 = \mathbf{7} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{35\cdot 21 - 7^2} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{14}}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 7-5 \\ 5-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot(-5) + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ &= \mathbf{0} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot(-1) + 1\cdot(-4) + 3\cdot 2 \\ &= \mathbf{0} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \perp \triangle\mathrm{BCD}$ であるから，四面体 ABCD の体積を V とすると

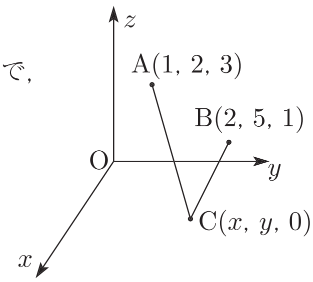
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{BA} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{7\sqrt{14}}{2}\cdot\sqrt{14} \\ &= \boldsymbol{\frac{49}{3}} \quad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

【8】 (1) C の座標を C$(x, y, 0)$ とおく．$\mathrm{AC}^2+\mathrm{CB}^2$ の値を最小にする (x, y) の値の組を求める．

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2+\mathrm{CB}^2 &= \{(x-1)^2+(y-2)^2+(-3)^2\}+\{(2-x)^2+(5-y)^2+1^2\}\\ &= 2x^2-6x+2y^2-14y+44\\ &= 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+15\end{aligned}$$

よって，$(x, y)=\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ のとき，最小値 15 をとるので，

C$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}, 0\right)$ のとき，最小値 15　(答)



(2) xy 平面に関して A と対称な点を A$'$ とすると

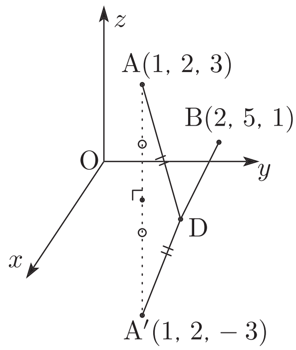
A$'(1,\ 2,\ -3)$

である．また xy 平面上にとった点 D に対し

$\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=\mathrm{A'D}+\mathrm{DB} \geqq \mathrm{A'B}$
(等号は D が A$'$B 上にあるとき成立)

ゆえに求める最小値は

$$\begin{aligned}\mathrm{A'B} &= \sqrt{(2-1)^2+(5-2)^2+\{1-(-3)\}^2}\\ &= \boldsymbol{\sqrt{26}}\quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$



【9】 **【解 1】**

ポイント

△ABC の外心を P とすると，

AP = BP = CP

であることを利用する．

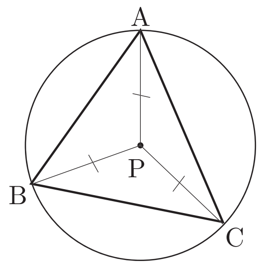
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| &= \sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| &= \sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}\quad\cdots(*)\\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (-2)\cdot1+3\cdot(-3)+1\cdot(-2)=-13\end{aligned}$$

△ABC の外心を P とおくと，P は平面 ABC 上にあるから実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



と表される．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|$$

に代入すると

$$\left|s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \left|(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \left|s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + t^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2st\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= (s-1)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + t^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2(s-1)t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + (t-1)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2s(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

ここに $(*)$ を用いると

$$14s^2+14t^2-26st = 14(s-1)^2+14t^2-26(s-1)t = 14s^2+14(t-1)^2-26s(t-1)$$

ここで，$14s^2+14t^2-26st = 14(s-1)^2+14t^2-26(s-1)t$ より

$$7s^2+7t^2-13st = 7s^2-14s+7+7t^2-13st+13t$$
$$\therefore\ 14s-13t=7 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$14(s-1)^2+14t^2-26(s-1)t = 14s^2+14(t-1)^2-26s(t-1)$ より

$$7s^2-14s+7+7t^2-13st+13t = 7s^2+7t^2-14t+7-13st+13s$$
$$27s = 27t$$
$$\therefore\ s=t \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より

$$s=t=7$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 7\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ &= \begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix}-2+1\\3-3\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これより

$\mathrm{P}\boldsymbol{(-3,\ -1,\ -5)}$　　(答)

【解 2】

> ポイント
>
> △ABC の外心を P とすると，
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2,\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$
>
> であることを利用する．

△ABC の外心を P とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2-4\\2+1\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}5-4\\-4+1\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

より，

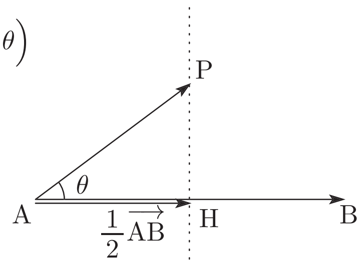
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\sqrt{14}$$

また，外心 P は平面 ABC 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2s+t\\3s-3t\\s-2t\end{pmatrix}\quad(s,\ t\text{ は実数})\quad\cdots①$$

とおける．P から AB に下ろした垂線の足を H とすると，次の図より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\quad\left(\because\quad\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cos\theta\right)\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=7\quad\cdots②\\&\qquad\qquad\left(\because\quad\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\right)\end{aligned}$$



同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=7\quad\cdots③$$

であるから，①，②，③ より

$$\begin{pmatrix}-2s+t\\3s-3t\\s-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=14s-13t=7\quad\cdots④$$
$$\begin{pmatrix}-2s+t\\3s-3t\\s-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}=-13s+14t=7\quad\cdots⑤$$

④ − ⑤ より

$$s=t$$

④ に代入して

$$s=7 \quad \therefore \quad t=7$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}-7\\0\\-7\end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\0\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって

$\mathrm{P}(\boldsymbol{-3,\ -1,\ -5})$ (答)

＜コメント＞
$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心は，角 A の二等分線（つまり辺 BC の垂直二等分線）上にある．ゆえに

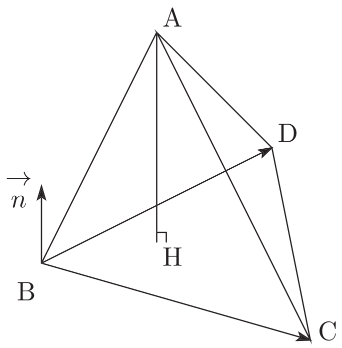
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

とおける．これを用いるともう少しだけ計算が楽になる．

【10】 (1) 平面 BCD に垂直なベクトルの一つを $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると，

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

である．



$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

より，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-x+y+z=0 \quad \cdots①$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=x+y+2z=0 \quad \cdots②$$

ここで $z=2$ とおくと，

①より　$-x+y=-2 \quad \cdots ①'$
②より　$x+y=-4 \quad \cdots ②'$

$(①'+②')\times\dfrac{1}{2}$ より　$y=-3$

$(①'-②')\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ より　$x=-1$

ゆえに

$$x:y:z=(-1):(-3):2=1:3:(-2)$$

であるから，$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ とおける．

ここで $\left|\overrightarrow{n}\right|=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$ より，$\overrightarrow{n}$ と同じ方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{n}_0$ とおくと

$$\overrightarrow{n}_0=\frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix}$ より

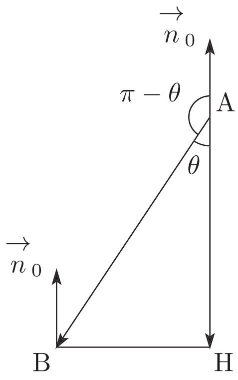
$$\overrightarrow{n}_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix}=-\frac{6}{\sqrt{14}}<0$$

となるから $\overrightarrow{n}_0$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角は鈍角であり，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{n}_0$ の位置関係は図のようになる．ここで

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-4)^2}=6$$

であり，さらに $\overrightarrow{n}_0 \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから，$\angle\mathrm{BAH}=\theta$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$



ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta \quad \left(=\left|\overrightarrow{n}_0\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\right)\\&=6\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\\&=\boldsymbol{\frac{6}{\sqrt{14}}}\end{aligned}$$
(答)

(2)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 2 = 2$$

より，

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot 6 - 2^2} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

であるから，求める体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{BCD} \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{14}} = \mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

M1JK

高 1 東大数学 K

Z-KAI

会員番号		氏　名	