M1T

冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高１難関大数学

問題

【1】(1) $-1 \leqq x \leqq 3$ における平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} &= \frac{18-(-2)}{4} \\ &= \mathbf{5} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+3(1+h)-(1+3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+5h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(h+5) \\ &= \mathbf{5} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+3(a+h)-(a^2+3a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+3h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2a+3+h) \\ &= \boldsymbol{2a+3} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1) $y' = \mathbf{4}$　　(答)

(2) $y' = \boldsymbol{-6x+6}$　　(答)

(3) $y' = \boldsymbol{3x^2-10x}$　　(答)

(4) $y = 3x(2x-1) = 6x^2-3x$

より

$y' = \boldsymbol{12x-3}$　　(答)

<別解>積の微分法を用いる.

$$\begin{aligned}y' &= (3x)'(2x-1)+3x(2x-1)' \\ &= 3(2x-1)+3x(2) \\ &= \boldsymbol{12x-3} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【3】(1) $f(x)=x^2-3x+4$ とおくと，

$$f'(x)=2x-3$$

$f'(1)=-1$ であるから，$y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線の方程式は

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$f(1)=2$ より，

$$y=-1(x-1)+2$$

ゆえに

$$\boldsymbol{y=-x+3} \qquad \text{(答)}$$

(2) $f(x)=-x^3+5x$ とおくと，

$$f'(x)=-3x^2+5$$

$f'(2)=-7$，$f(2)=2$ であるから，$y=f(x)$ 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2)+f(2) \\ &= -7(x-2)+2 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{y=-7x+16} \qquad \text{(答)}$$

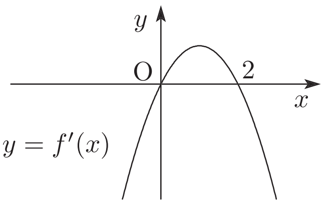
【4】(1) $f(x)=-x^3+3x^2-20$ とおくと，

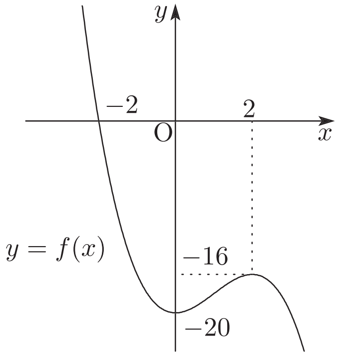
$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

よって $y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる．　　(答)

また増減表は以下のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$



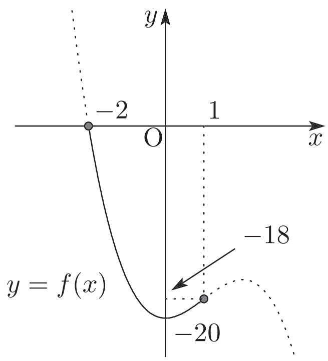


(2)
$$f(-2)=-(-2)^3+3\cdot(-2)^2-20=0$$
$$f(1)=-1^3+3\cdot1^2-20=-18$$

より $y=f(x)$ のグラフは右のようになる．

また増減表は下のようになる．

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0
y	0	$\searrow$	-20	$\nearrow$	-18



よって，求める最大値，最小値は

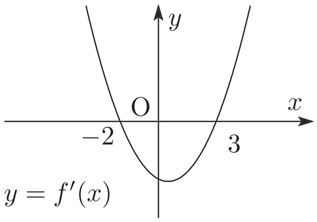
$$\begin{cases} \textbf{最大値 } \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(x=-2\text{ のとき})} \\ \textbf{最小値 } \boldsymbol{-20} & \boldsymbol{(x=0\text{ のとき})} \end{cases}$$

(答)

【5】(1) $f(x)=2x^3-3x^2-36x$ とおくと

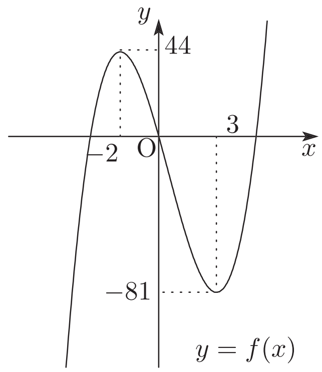
$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x-3)(x+2)$$

よって $y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる．　　(答)



また増減表は以下のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	44	$\searrow$	-81	$\nearrow$

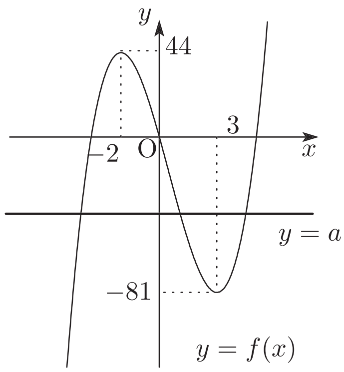


(2)　　「方程式 $f(x)=a$ が異なる正の解を 2 つと，負の解を 1 つもつ」

$\iff$　「$y=f(x)$ のグラフと $y=a$ のグラフが $x>0$ で 2 つ，$x<0$ で 1 つの異なる共有点をもつ」

$y=2x^3-3x^2-36x$ のグラフと $y=a$ のグラフとが上記の共有点をもつような a の値の範囲は，右の図より

$\boldsymbol{-81<a<0}$　　(答)



【6】 $f(x)$ を n 次式とすると, $f'(x)$ は $(n-1)$ 次式である．よって, $f(x)\cdot f'(x)$ は

$$n+n-1=2n-1\ (\text{次式})$$

であるから, (ii) より

$$2n-1=5 \qquad \therefore\quad n=3$$

(i) より, $f(x)$ は

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

とおけるから

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

(iii) より

$$f(1)=1+a+b+c=0 \quad \cdots①$$

(iv) より

$$f(x)-1=f'(x)(dx+e)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c-1 &= (3x^2+2ax+b)(dx+e) \\ &= 3dx^3+(2ad+3e)x^2+(bd+2ae)x+be \end{aligned}$$

これは x についての恒等式であるから, 両辺の係数を比較して

$$3d=1,\ 2ad+3e=a,\ bd+2ae=b,\ be=c-1$$

これらより

$$d=\frac{1}{3},\ e=\frac{1}{9}a,\ b=\frac{1}{3}a^2,\ c=\frac{1}{27}a^3+1$$

これらを①に代入すると

$$\begin{aligned} & 1+a+\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{27}a^3+1=0 \\ \Longleftrightarrow\quad & a^3+9a^2+27a+54=0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (a+6)(a^2+3a+9)=0 \end{aligned}$$

a は実数なので

$$a=-6$$

よって

$$b=\frac{1}{3}\cdot 36=12, \quad c=-\frac{6^3}{27}+1=-7$$

以上より, $f(x)$ は

$$f(x)=\boldsymbol{x^3-6x^2+12x-7} \qquad (\text{答})$$

【7】(1) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

これより, $x > 1$ で $f(x)$ は単調増加である. また

$$f(2) = 8 - 6 - 1 = 1 > 0$$

より

$$x > 2 \text{ で } f(x) > 0$$

したがって, 与不等式が成立する. 〔証明終〕

(2) $y \geqq 0,\ x + y = 2$ より

$$y = 2 - x \geqq 0$$

$x \geqq 0$ より

$$0 \geqq x \geqq 2$$

ここで $f(x) = x^3 - (y^2 - 5y + 4)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - \{(2-x)^2 - 5(2-x) + 4\} \\ &= x^3 - (x^2 - 4x + 4 - 10 + 5x + 4) \\ &= x^3 - x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

これより

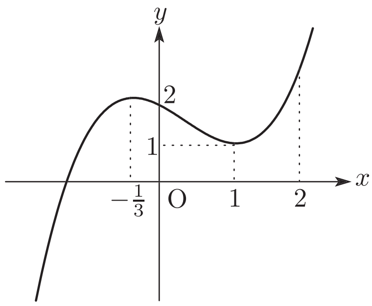
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

そして

$$f(1) = 1 - 1 - 1 + 2 = 1 > 0$$

よって

$$0 \leqq x \leqq 2 \text{ で } f(x) > 0$$



したがって, 与不等式が成立する. 〔証明終〕

【8】

$$y' = 3x^2 - 1$$

であり, ここで $x = s$ での接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3s^2 - 1)(x - s) + s^3 - s + 6 \\ &= (3s^2 - 1)x - 2s^3 + 6 \end{aligned}$$

これが, $(t,\ 0)$ を通るので

$$0 = (3s^2 - 1)t - 2s^3 + 6$$

これを s の方程式とみて異なる 3 つの実数解をもてばよい. ここで

$$f(s) = 2s^3 - 3ts^2 + t - 6$$

とおく.

$$f'(s) = 6s^2 - 6ts = 6s(s - t)$$

より, $t > 0$ のとき, $s = 0,\ t$ で極値をもつ.
よって, 異なる 3 実解をもつためには

$$\begin{aligned} & f(0) \cdot f(t) < 0 \\ \iff & (t - 6)(-t^3 + t - 6) < 0 \\ \iff & (t - 6)(t^3 - t + 6) = (t - 6)(t + 2)(t^2 - 2t + 3) > 0 \end{aligned}$$

よって, $t^2 - 2t + 3 = (t - 1)^2 + 2 > 0,\ t > 0$ より

$$t > 6$$

問題

【1】C を積分定数とする．

(1)
$$\int -5dx = \boldsymbol{-5x + C} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$\int (3x+4)dx = \boldsymbol{\frac{3}{2}x^2 + 4x + C} \qquad \text{(答)}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int 2(x-1)dx &= \int (2x-2)dx \\ &= \boldsymbol{x^2 - 2x + C} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4)
$$\int (-3x^2+2x+1)dx = \boldsymbol{-x^3 + x^2 + x + C} \qquad \text{(答)}$$

(5)
$$\begin{aligned}\int (x+2)(x-1)dx &= \int (x^2+x-2)dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}\int (x+1)^2dx &= \int (x^2+2x+1)dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

＜別解＞

$$\int (x+1)^2dx = \boldsymbol{\frac{1}{3}(x+1)^3 + C} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1)

$$\int_1^2 (-3)dx = \Big[-3x \Big]_1^2$$
$$= -3(2-1)$$
$$= \mathbf{-3} \qquad (答)$$

(2)

$$\int_0^3 (2x-1)dx = \Big[x^2 - x \Big]_0^3$$
$$= (3^2-3)-(0^2-0)$$
$$= (9-3)-0 = \mathbf{6} \qquad (答)$$

(3)

$$\int_0^2 (x^3-3x^2+2x)dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \Big]_0^2$$
$$= \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2^3 + 2^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 0^3 + 0^2\right)$$
$$= (4-8+4)-0 = \mathbf{0} \qquad (答)$$

(4)

$$\int_{-2}^6 (x+2)^3 dx = \int_{-2}^6 \left(x^3+6x^2+12x+8\right)dx$$
$$= \Big[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x \Big]_{-2}^6$$
$$= \mathbf{1024} \qquad (答)$$

＜別解＞

$$\int_{-2}^6 (x+2)^3 dx = \Big[\frac{1}{4}(x+2)^4 \Big]_{-2}^6$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 8^4 = \mathbf{1024} \qquad (答)$$

(5)

$$\int_{-3}^0 x(x+3)dx = \int_{-3}^0 \left(x^2+3x\right)dx$$
$$= \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big]_{-3}^0$$
$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 + \frac{3}{2}\cdot 0^2\right) - \left\{\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 + \frac{3}{2}(-3)^2\right\}$$
$$= 0 - \left(-9 + \frac{27}{2}\right)$$
$$= -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} \qquad (答)$$

＜別解＞

$$\int_{-3}^0 x(x+3)dx = -\frac{\{0-(-3)\}^3}{6}$$
$$= -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} \qquad (答)$$

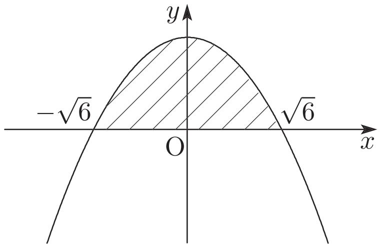
(6)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)dx &= \left[\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\ \right]_{-1}^{2}\\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^2-2\cdot 2\right)\\ &\quad -\left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{1}{2}(-1)^2-2\cdot(-1)\right\}\\ &= -\frac{10}{3}-\frac{7}{6}\\ &= \boldsymbol{-\frac{9}{2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

＜別解＞
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)dx &= \int_{-1}^{2}(x-2)(x+1)dx\\ &= -\frac{\{2-(-1)\}^3}{6}\\ &= \boldsymbol{-\frac{9}{2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(7) $f(x)=x^3$ は奇関数より
$$\int_{-2}^{2}x^3dx=\mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

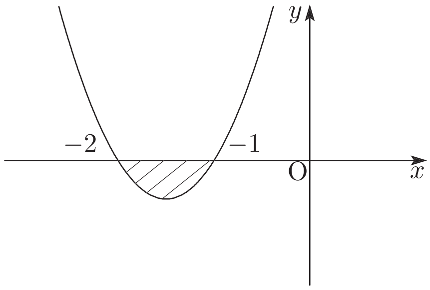
(8)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(x^3+3x^2-x+1\right)dx &= 2\int_{0}^{1}\left(3x^2+1\right)dx\\ &= 2\Big[\ x^3+x\Big]_{0}^{1}\\ &= \mathbf{4} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【3】(1) $y=-x^2+6$ のグラフは右の図のようになるから，求める斜線部分の面積は



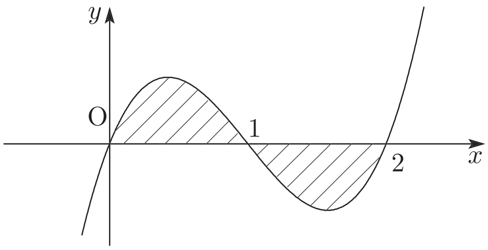
$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} y\,dx \\ &= -\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(x^2-6\right) dx \\ &= -\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(x+\sqrt{6}\right)\left(x-\sqrt{6}\right) dx \\ &= \frac{\{\sqrt{6}-(-\sqrt{6})\}^3}{6} \\ &= \mathbf{8\sqrt{6}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) $y=x^2+3x+2$ のグラフは右の図のようになるから，求める斜線部分の面積は



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} (-y)\,dx \\ &= -\int_{-2}^{-1} (x+2)(x+1)\,dx \\ &= \frac{\{-1-(-2)\}^3}{6} \\ &= \mathbf{\frac{1}{6}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

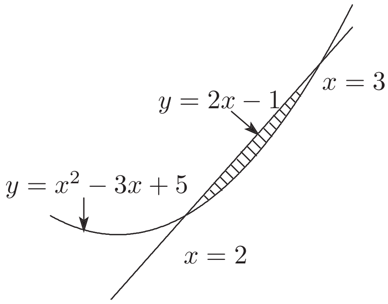
(3) $y=x^3-3x^2+2x$ のグラフは右の図のようになるから，求める斜線部分の面積は



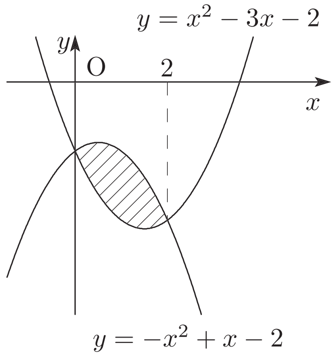
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y\,dx + \int_1^2 (-y)\,dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3-3x^2+2x\right) dx \\ &\quad - \int_1^2 \left(x^3-3x^2+2x\right) dx \\ &= \left[\ \frac{x^4}{4}-x^3+x^2\ \right]_0^1 - \left[\ \frac{x^4}{4}-x^3+x^2\ \right]_1^2 \\ &= \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【4】(1) 曲線と直線のグラフは右の図のようになるから，求める斜線部分の面積は

$$S=\int_2^3\left\{(2x-1)-\left(x^2-3x+5\right)\right\}dx$$
$$=-\int_2^3\left(x^2-5x+6\right)dx$$
$$=-\int_2^3(x-2)(x-3)dx$$
$$=\frac{(3-2)^2}{6}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$ (答)

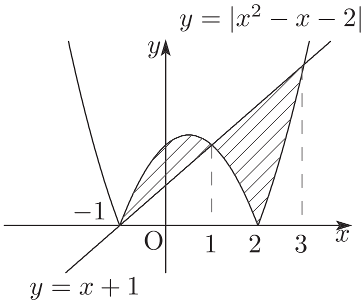


(2) 2 つの曲線のグラフは右の図のようになるから，求める斜線部分の面積は



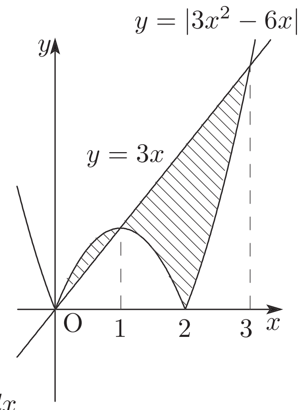
$$S=\int_0^2\left\{(-x^2+x-2)-(x^2-3x-2)\right\}dx$$
$$=-2\int_0^2 x(x-2)dx$$
$$=2\cdot\frac{(2-0)^3}{6}=\mathbf{\frac{8}{3}}$$ (答)

(3) 曲線と直線のグラフは右の図のようになるから，求める斜線部分の面積は



$$S=\int_2^3\left\{(x+1)-(x^2-x-2)\right\}dx$$
$$+\int_1^2\left[(x+1)-\left\{-(x^2-x-2)\right\}\right]dx$$
$$+\int_{-1}^1\left\{-(x^2-x-2)-(x+1)\right\}dx$$
$$=\int_2^3\left(-x^2+2x+3\right)dx$$
$$+\int_1^2\left(x^2-1\right)dx-\int_{-1}^1\left(x^2-1\right)dx$$
$$=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$$
$$=\mathbf{\frac{13}{3}}$$ (答)

(4) 曲線と直線のグラフは右の図のようになるから，求める斜線部分の面積は



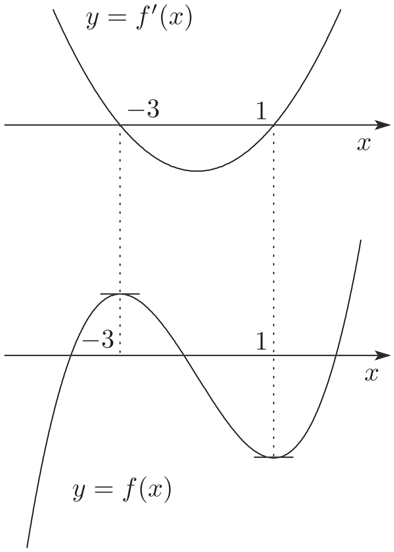
$$
\begin{aligned}
S &= \int_2^3 \left\{3x-(3x^2-6x)\right\}dx \\
&\quad + \int_1^2 \left[3x-\left\{-(3x^2-6x)\right\}\right]dx \\
&\quad + \int_0^1 \left\{-\left(3x^2-6x\right)-3x\right\}dx \\
&= -3\int_2^3 \left(x^2-3x\right)dx \\
&\qquad + 3\int_1^2 \left(x^2-x\right)dx - 3\int_0^1 \left(x^2-x\right)dx \\
&= \frac{7}{2}+\frac{5}{2}+\frac{1}{2} \\
&= \boldsymbol{\frac{13}{2}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【5】
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-1}^{x} (t^2+2t-3)dt \\
&= \int_{-1}^{x} (t-1)(t+3)dt
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x} (t-1)(t+3)dt \\
&= (x-1)(x+3)
\end{aligned}
$$

ゆえに $y=f'(x)$，$y=f(x)$ のグラフは右のようになり，$f(x)$ は $x=1$ で極小となる．



求める極小値は

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \int_{-1}^{1} (t^2+2t-3)dt \\
&= 2\int_{0}^{1} (t^2-3)dt \\
&= 2\left[\frac{1}{3}t^3-3t\right]_0^1 \\
&= 2\left(\frac{1}{3}-3\right) \\
&= -\boldsymbol{\frac{16}{3}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【6】(1)

$$a=\int_0^1 f(t)dt,\quad b=\int_0^2 f(t)dt$$

とおくと

$$f(x)=x^2+ax+b$$

したがって

$$a=\int_0^1(t^2+at+b)dt=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b$$

$$b=\int_0^2(t^2+at+b)dt=\frac{8}{3}+\frac{4a}{2}+2b$$

これを解いて

$$\therefore\quad a=-\frac{14}{15},\ b=-\frac{4}{5}$$

よって求める関数は

$$f(x)=\boldsymbol{x^2-\frac{14}{15}x-\frac{4}{5}}\qquad(\text{答})$$

(2)

$$f(x)=1+x\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 tf(t)dt$$

ここで

$$a=\int_0^1 f(t)\,dt,\quad b=\int_0^1 tf(t)\,dt$$

とおくと

$$f(x)=1+ax-b=ax+(1-b)$$

したがって

$$a=\int_0^1\{at+(1-b)\}dt=\frac{a}{2}+1-b$$

$$b=\int_0^1\{at^2+(1-b)t\}dt=\frac{a}{3}+\frac{1-b}{2}$$

これを解いて

$$a=\frac{12}{13},\quad b=\frac{7}{13}$$

よって求める関数は

$$f(x)=\boldsymbol{\frac{12}{13}x+\frac{6}{13}}\qquad(\text{答})$$

【7】両辺を x で微分すると

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

$x = 1$ のとき, 両辺 $= 0$ より

$$1 - 3 + a = 0 \qquad \therefore \quad a = 2$$

【8】$2x < 0$ のとき

$$F(x) = \int_0^1 (t - 2x)dt = \frac{1}{2} - 2x$$

$0 \leqq 2x < 1$ のとき

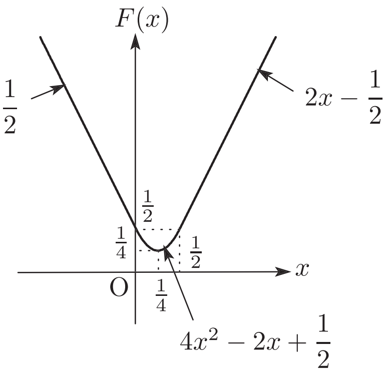
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{2x} (-t + 2x)\,dt + \int_{2x}^1 (t - 2x)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^2}{2} + 2xt\right]_0^{2x} + \left[\frac{t^2}{2} - 2xt\right]_{2x}^1 \\ &= 2\left\{-\frac{(2x)^2}{2} + (2x)^2\right\} + \frac{1}{2} - 2x \\ &= 4x^2 - 2x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$1 \leqq 2x$ のとき

$$\int_0^1 (-t + 2x)\,dt = -\frac{1}{2} + 2x$$

したがって

$$F(x) = \begin{cases} -2x + \dfrac{1}{2} & (x < 0) \\ 4x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} & \left(0 \leq x < \dfrac{1}{2}\right) \\ 2x - \dfrac{1}{2} & \left(\dfrac{1}{2} \leq x\right) \end{cases}$$



$4x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 4\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$ より

$x = \dfrac{1}{4}$ のとき　最小値 $\dfrac{1}{4}$

問題

【1】(1) 与えられた条件より

$$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{6}$$

両辺 2 乗して

$$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$$

$$\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=6$$

整理して

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\frac{1}{2}(1+9-6)=\mathbf{2}\qquad\text{(答)}$$

(2) (1) の結果より

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\qquad\text{(答)}$$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 9-2^2}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(4) $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|\geqq 0$ より

$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ が最小 $\iff$ $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2$ が最小

ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2&=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+t^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2+2t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\\&=9t^2+4t+1\\&=9\left(t+\frac{2}{9}\right)^2+\frac{5}{9}\end{aligned}$$

したがって $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|^2$，すなわち $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ を最小にする t の値は,

$$\boldsymbol{t=-\frac{2}{9}}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より，C の座標は **(5, 12)**　　(答)

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 12 \cdot 5 + (-5) \cdot 12 = 0$$

ゆえに

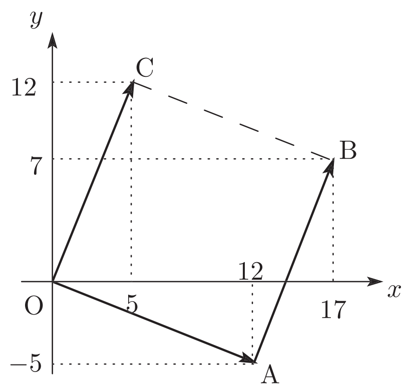
$$\therefore \cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|} = \mathbf{0} \qquad (答)$$

(3)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 13 \quad かつ \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

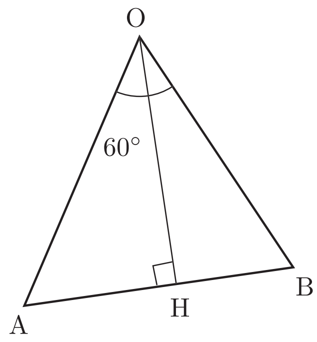
であるから，平行四辺形 OABC は正方形である．その面積 S は

$S = 13^2 = \mathbf{169}$　　(答)



【3】3 点 A，B，H は共線であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (t \text{ は実数})$$



ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ \iff\ &\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0 \\ \iff\ &(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - (1-t)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0\end{aligned}$$

ここで

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 5, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 4, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 10$$

であるから，これを代入して

$$\begin{aligned}(1-2t) \cdot 10 - (1-t) \cdot 5^2 + t \cdot 4^2 &= 0 \\ 21t &= 15 \\ t &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

よって，$(*)$ とから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad (\text{答})$$

【4】(1) 始点を A にそろえる.

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\overrightarrow{0}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}\\&=\frac{5}{6}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}\end{aligned}$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}'=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$$

とすると, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}'=\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より D′ は直線 AP 上にあり, さらに線分 BC を 3: 2 に内分する点である. すなわち D′ と D は一致する. よって

BD : DC = **3 : 2**　　(答)

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

より, P は線分 AD を 5: 1 に内分する点である. つまり, △ABC の内部にある.

〔証明終〕

【5】求める直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，点 A，P の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{p}$ とする．
またベクトルの成分を縦書きで表示する．

(1) 求める直線のベクトル方程式は，t を実数として

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{d}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2t \\ 1+3t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = 4-2t & \cdots ① \\ y = 1+3t & \cdots ② \end{cases}$$

① × 3 + ② × 2 より t を消去すると

$$\boldsymbol{3x+2y=14} \qquad (\text{答})$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

求める直線は点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線であるから，t を実数として

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5t \\ 4-6t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = -3+5t & \cdots ③ \\ y = 4-6t & \cdots ④ \end{cases}$$

③ × 6 + ④ × 5 より t を消去すると

$$\boldsymbol{6x+5y=2} \qquad (\text{答})$$

(3) 求める直線は点 A を通り，$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする直線であるから，

$$\left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$3(x+2) + 4(y-4) = 0$$

よって求める直線は

$$\boldsymbol{3x+4y=10} \qquad (\text{答})$$

【6】求める円周上の点を P$(x,\ y)$，P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{p}$ とする．

(1) 求める円の半径を r とすると，

$$r = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6-3 \\ 6-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25} = 5$$

ゆえに $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ として

$$\left|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right| = 5$$
$$\left|\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}\right| = 5$$

よって求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25} \qquad \text{(答)}$$

(2) 【解 1】

求める円の中心を C$(\overrightarrow{c})$ とすると，C は AB の中点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{c} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また半径を r とすると

$$\begin{aligned} r &= \left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\left|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}\right| = \sqrt{5}$$
$$\left|\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}$$

両辺 2 乗して，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5} \qquad \text{(答)}$$

【解 2】

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると，円周上の点 P に対し $\mathrm{AP} \perp \mathrm{BP}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$

となる．これは点 P が点 A または点 B と一致するときにも成立する．よって

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right) \cdot \left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}\right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ (x-1)(x-3) + (y-4)y &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 4y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5} \qquad \text{(答)}$$

【7】原点を O とする．

(1) $\left|2\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|=6$ より

$$\left|\overrightarrow{p}-\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|=3$$

よって点 P の軌跡は

線分 OA の中点を中心とする半径 3 の円　　(答)

である．

(2) $\left(2\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)=0$ より，

$$\left(\overrightarrow{p}-\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)=0$$

ここで，辺 AB の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}$

ゆえに

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\quad\cdots(*)$$

点 M と点 P が一致するときは，点 P は辺 AB の中点と一致する．

点 M と点 P が一致しないときは，$(*)$ から

MP ⊥ AB

である．よって，点 P の軌跡は，

辺 AB の垂直二等分線　　(答)

である．

(3) 与式の両辺を 2 乗して，

$$\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|^2=4\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right|^2$$

$$\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right)=4\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{p}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}+\left|\overrightarrow{a}\right|^2=4\left(\left|\overrightarrow{p}\right|^2-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)$$

$$3\left|\overrightarrow{p}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}-8\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p}-\left|\overrightarrow{a}\right|^2+4\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$$

$$3\left|\overrightarrow{p}\right|^2+2\left(\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{p}-\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)=0$$

$$\left\{3\overrightarrow{p}-(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\right\}\cdot\left\{\overrightarrow{p}+(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})\right\}=0$$

$$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{p}-\frac{\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}}{2+1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{p}-\frac{-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}}{2-1}\right)=0}$$

よって，点 P の軌跡は，

線分 AB を 2 : 1 に内分，外分する点をそれぞれ C, D とするとき，
線分 CD を直径とする円　　(答)

【8】 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b}$， $s+t \leqq 2$， $s \geqq 0$， $t \geqq 0$

$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ より $0 \leqq s+t \leqq 2$.

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とし，$s+t=k$ とおく.

(i) $0 < s+t \leqq 2$ のとき

$$\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1,\quad \frac{s}{k} \geqq 0,\quad \frac{t}{k} \geqq 0 \quad \cdots(*)$$

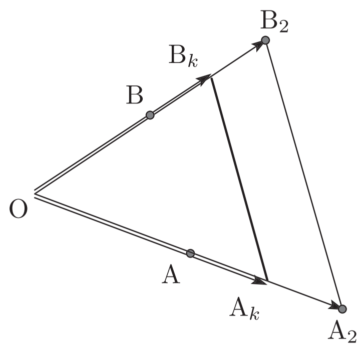
であり，

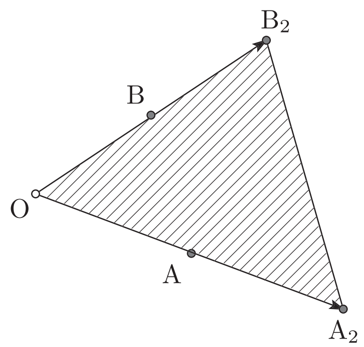
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{s}{k}\left(k\vec{a}\right) + \frac{t}{k}\left(k\vec{b}\right) = \frac{s}{k}\overrightarrow{a_k} + \frac{t}{k}\overrightarrow{b_k}$$

（ただし $\overrightarrow{a_k} = k\vec{a}$，$\overrightarrow{b_k} = k\vec{b}$ とおいた）

半直線 OA，OB 上の 2 点 A_k，B_k をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}_k} = \overrightarrow{a_k}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_k} = \overrightarrow{b_k}$ で定めると，$(*)$ より点 P は左下図の線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ 上を動く（両端含む）.

ここで k を $0 < k \leqq 2$ の範囲で動かすと，線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ は平行に移動するから，P は右下図の 3 角形 $\mathrm{OA}_2\mathrm{B}_2$ の内部および周上を動く（ただし O をのぞく）.





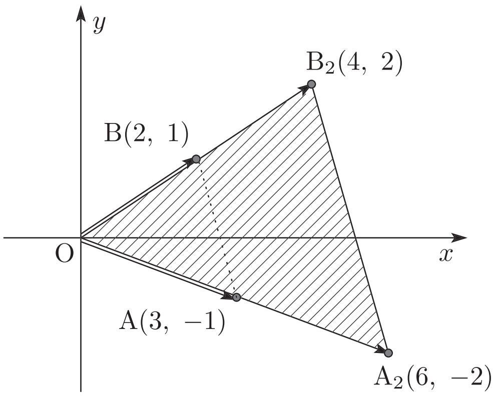
(ii) $k=0$ のとき

$$s+t=0,\quad s \geqq 0,\quad t \geqq 0 \text{ より},\ s=t=0$$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{0}$ より P は原点 O と一致する.

以上より，求める領域は 3 角形 OA_2B_2 の内部および周上．

A(3, -1)，B(2, 1) より，求める領域は下図のようになる．　　　(答)



問題

【1】

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} a \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ a-3 \end{pmatrix}$$

であり，3 点 A，B，C が共線（同一直線上にある）のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots (*)$$

をみたす実数 k が存在する．

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a-1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ a-3 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} a-1 = 3k & \cdots ① \\ -5 = -3k & \cdots ② \\ 5 = k(a-3) & \cdots ③ \end{cases}$$

② より

$$k = \frac{5}{3}$$

① より

$$a = 3 \cdot \frac{5}{3} + 1 = 6$$

これらは ③ をみたすから，求める a の値は

$$a = \mathbf{6} \qquad (答)$$

【2】 $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす実数 α，β が存在すればよく，

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha+2\beta \\ -\alpha+3\beta \\ 2\alpha+4\beta \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{cases} x+1 = 3\alpha+2\beta \\ 2x = -\alpha+3\beta \\ 3x = 2\alpha+4\beta \end{cases}$$

これを解くと，$x = \dfrac{10}{7}$，$(\alpha,\ \beta) = \left(\dfrac{1}{7},\ 1\right)$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{10}{7}}$　**(答)**

【3】

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ここで $\theta = \angle\mathrm{BAC}$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 + 2 - 4 = -6$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{6}, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 2\sqrt{6}$$

であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$$

ゆえに

$$\theta = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$

また 3 角形 ABC の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boldsymbol{3\sqrt{3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【4】 (1) l_1 は，O を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線であるから, t を実数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

よって

$$l_1 : \ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{t}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{t} \text{ は実数}) \qquad (\text{答})$$

同様に l_2 は，B を通り $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に平行な直線であるから，s を実数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix}$$

よって

$$l_2 : \ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} + \boldsymbol{s}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{s} \text{ は実数}) \qquad (\text{答})$$

(2) l_1 と l_2 の交点を求める．交点において

$$t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{cases} 0 = 1 + s & \cdots\cdots ① \\ 2t = s & \cdots\cdots ② \\ t = 2 - 2s & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

をみたす s，t を求める．① より

$$s = -1$$

② に代入して

$$2t = -1 \qquad \therefore \quad t = -\frac{1}{2}$$

ところが $t = -\dfrac{1}{2}$，$s = -1$ は ③ をみたさない.

ゆえに l_1 と l_2 の交点は存在しない．すなわち直線 l_1 と直線 l_2 は交わらない.

〔証明終〕

(3) l_1 と l_2 のどちらにも直交する直線と l_1，l_2 の交点を T，S とおくと，求める直線の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{TS}}$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

と表せるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{TS}} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}}\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+s\\s-2t\\2-2s-t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$l_1 \perp \overrightarrow{\mathrm{TS}}$ より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1+s\\s-2t\\2-2s-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} &= 0\\ -5t+2 &= 0\\ t &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

また $l_2 \perp \overrightarrow{\mathrm{TS}}$ より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1+s\\s-2t\\2-2s-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0\\ 6s-3 &= 0\\ s &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

以上より

$$\overrightarrow{\mathrm{TS}} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{10}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix} = \frac{3}{10}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} \quad /\!/ \quad \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$$

また，T の座標は

$$\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$$

であることから，求める直線のベクトル方程式は

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{u}\ \textbf{は実数)} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 各辺の長さが 1 であるから

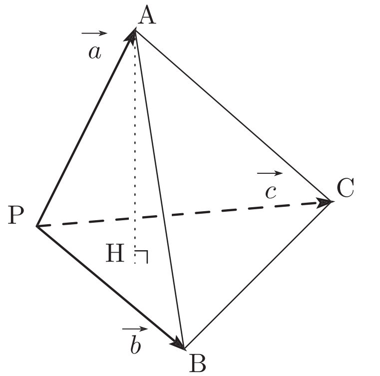
$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{c}\right| = 1$$

また，各面が正三角形であるから

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} = 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ は 1 次独立であるから，A から平面 PBC に 下ろした垂線の足 H は，s，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$$



とおくことができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{PH}} - \overrightarrow{\mathrm{PA}} = s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$$

ここで AH ⊥ PB，AH ⊥ PC であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{b}\cdot\left(s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\right)\\ &= s + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots\cdots ①\\ \overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{c}\cdot\left(s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\right)\\ &= \frac{1}{2}s + t - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

①，② より

$$s = \frac{1}{3},\quad t = \frac{1}{3}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}} \qquad \text{(答)}$$

(2) △PBC は 1 辺の長さ 1 の正三角形であるから，その面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$$

より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|^2 &= \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{b}\right|^2 + \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{c}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \frac{2}{9}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} - \frac{2}{3}\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} - \frac{2}{3}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

よって求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\vec{b}+5\vec{c}}{8}-\frac{4}{7}\vec{a}=-\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\vec{a}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}-\vec{a}=-\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}+\frac{5}{16}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ とする.

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\left(1-\frac{5}{7}k\right)\vec{a}+\left(\frac{3}{16}k\right)\vec{b}+\left(\frac{5}{16}k\right)\vec{c}$$

S は△ OBC 上にあるので

$$1-\frac{5}{7}k=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{7}{5}$$

よって

$$\mathrm{AR}:\mathrm{AS}=1:\frac{7}{5}=5:7$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\angle\mathrm{AOQ}$ より

$$\vec{a}\cdot\left(\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)=|\vec{a}|\left|\frac{3\vec{b}+5\vec{c}}{8}\right|\cos\angle\mathrm{AOQ} \quad \cdots(*)$$

正四面体の一辺の長さを l とおく.

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=l,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=l^2\cos 60^\circ=\frac{l^2}{2}$$

$(*)$ より

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{l^2}{2}+\frac{5}{8}\cdot\frac{l^2}{2}=l\cdot\frac{\sqrt{9l^2+2\cdot3\cdot5\cdot\frac{l^2}{2}+25l^2}}{8}\cos\angle\mathrm{AOQ}$$

よって

$$\cos\angle\mathrm{AOQ}=\frac{4}{7}$$

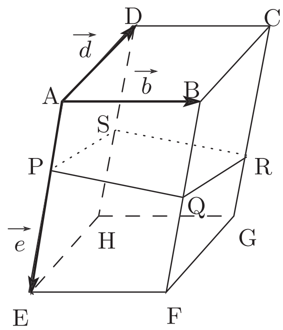
【7】■ 確認

4 点 P, Q, R, S は同一平面上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = m\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + n\overrightarrow{\mathrm{PR}} \quad (m,\ n \text{ は実数})$$

と書ける. $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ を 2 通りで表すことを目標とする.

■ 解答



(1)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} \\
&= -p\vec{e} + \vec{b} + q\vec{e} \\
&= \vec{b} + (q-p)\vec{e} \\
\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CR}} \\
&= -p\vec{e} + \vec{b} + \vec{d} + r\vec{e} \\
&= \vec{b} + \vec{d} + (r-p)\vec{e}
\end{aligned}$$

(2) 点 S は平面 PQR 上にあるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = m\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + n\overrightarrow{\mathrm{PR}} \quad (m,\ n \text{ は実数})$$

と表せる. (1) より,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PS}} &= m\{\vec{b} + (q-p)\vec{e}\} + n\{\vec{b} + \vec{d} + (r-p)\vec{e}\} \\
&= (m+n)\vec{b} + n\vec{d} + \{m(q-p) + n(r-p)\}\vec{e} \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DS}} &= -p\vec{e} + \vec{d} + s\vec{e} \\
&= \vec{d} + (s-p)\vec{e} \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

①と②とを比較すると,

$$\begin{cases} m+n=0 \\ n=1 \\ m(q-p)+n(r-p)=s-p \end{cases}$$

よって,

$$s = p - q + r$$

(3) $p+r=1$ を $s=p-q+r$ に代入すると,

$$s = 1-q$$

$0<q<1$ より,

$$0<s<1, \quad \overrightarrow{\mathrm{DS}} = s\overrightarrow{\mathrm{DH}}$$

が成り立つ. よって, 点 S は辺 DH 上の点であり, 平面 PQR は辺 DH と交わる.

【8】■ テーマ

・平面と直線の交点

・四面体の体積比

■ 解答

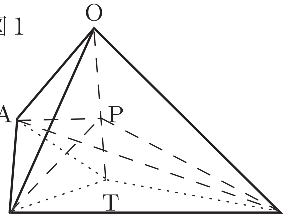
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{p} - \vec{a}$

(2) 条件より

$$2\vec{p} + 3(\vec{p} - \vec{a}) + 5(\vec{p} - \vec{b}) + 7(\vec{p} - \vec{c}) = \vec{0}$$
$$17\vec{p} = 3\vec{a} + 5\vec{b} + 7\vec{c}$$
$$\therefore \quad \vec{p} = \frac{1}{17}(3\vec{a} + 5\vec{b} + 7\vec{c})$$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = k\vec{p} = \frac{3k}{17}\vec{a} + \frac{5k}{17}\vec{b} + \frac{7k}{17}\vec{c}$$

図 1



T は平面 ABC 上にあるので

$$\frac{3k}{17} + \frac{5k}{17} + \frac{7k}{17} = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{17}{15}$$

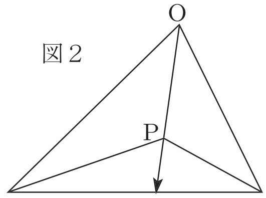
よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{17}{15}\vec{p}$$

(4) 四面体 OABC の体積を，OABC のように表す．このとき，(3) より

$$\mathrm{PABC} = \frac{2}{17}\mathrm{OABC} \quad \cdots ①$$

図 2



一方，図 2 を参照すると，面積比と線分比の関係は

$$\frac{\triangle\,\mathrm{OBP}}{\triangle\,\mathrm{OAP}} = \frac{\triangle\,\mathrm{OBT}}{\triangle\,\mathrm{OAT}} = \frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{AT}}$$

となり，これを 3 次元に応用すれば

$$\mathrm{PBCO} : \mathrm{PCOA} : \mathrm{POAB} = \triangle\,\mathrm{TBC} : \triangle\,\mathrm{TCA} : \triangle\,\mathrm{TAB}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}} = \overrightarrow{\mathrm{OT}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{15}(3\vec{a} + 5\vec{b} + 7\vec{c}) - \vec{a}$$
$$= \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{7}{15}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{7}{15}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= \frac{12}{15} \cdot \frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 7\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12}$$

$$\therefore \quad \triangle\,\mathrm{TAB} : \triangle\,\mathrm{TAC} = 7 : 5$$

そして

$$\triangle\,\mathrm{TBC} = \frac{3}{15}\triangle\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{5}\triangle\,\mathrm{ABC}$$
$$\triangle\,\mathrm{TAB} = \frac{7}{12}\cdot\frac{12}{15}\triangle\,\mathrm{ABC} = \frac{7}{15}\triangle\,\mathrm{ABC}$$
$$\triangle\,\mathrm{TAC} = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{5}\triangle\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{3}\triangle\,\mathrm{ABC}$$

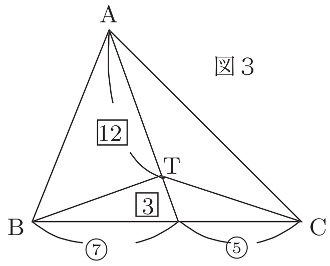


図3

これより

$$\triangle\,\mathrm{TBC} : \triangle\,\mathrm{TCA} : \triangle\,\mathrm{TAB} = 3:5:7$$

①より

$$\mathrm{PBCO} + \mathrm{PCOA} + \mathrm{POAB} = \frac{15}{17}\mathrm{OABC}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{PBCO} &= \frac{3}{15}\cdot\frac{15}{17}\mathrm{OABC} = \frac{3}{17}\mathrm{OABC} \\ \mathrm{PCOA} &= \frac{5}{15}\cdot\frac{15}{17}\mathrm{OABC} = \frac{5}{17}\mathrm{OABC} \\ \mathrm{POAB} &= \frac{7}{15}\cdot\frac{15}{17}\mathrm{OABC} = \frac{7}{17}\mathrm{OABC} \end{aligned}\right\} \quad \cdots ②$$

①，②より，求める体積比は

$2:3:5:7$

M1T
高１難関大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	