M1TK

冬期講習　確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

高１数学Ｋ～数学Ⅰ・Ａ総復習～

高１難関大数学Ｋ

【1】$x+y=3$ より，$y=3-x$ $\cdots$ ①

また，$y=3-x \geqq 0$ より，$x \leqq 3$

よって，$0 \leqq x \leqq 3$

① を x^2+3y^2 に代入して

$$\begin{aligned} x^2+3y^2 &= x^2+3(3-x)^2 \\ &= 4x^2-18x+27 \\ &= 4\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{27}{4} \end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq x \leqq 3$ より，

最大値は，$x=0$ のとき 27

最小値は，$x=\dfrac{9}{4}$ のとき $\dfrac{27}{4}$

であり，① より

$x=0$ のとき，$y=3$

$x=\dfrac{9}{4}$ のとき，$y=\dfrac{3}{4}$

であることから，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=0,\ y=3} \text{ のとき，最大値 } \mathbf{27} \\ \boldsymbol{x=\dfrac{9}{4},\ y=\dfrac{3}{4}} \text{ のとき，最小値 } \boldsymbol{\dfrac{27}{4}} \end{cases}$$ **(答)**

【2】(1) 3 人の選び方は，全部で，

$${}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56\ (\text{通り})$$

また，男子を 3 人選ぶ選び方は，全部で，

$${}_5\mathrm{C}_3=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10\ (\text{通り})$$

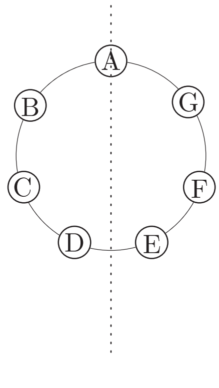
よって，女子を少なくとも 1 人選ぶ選び方は，

$56-10=\mathbf{46}$ **(通り)**　　(答)

(2)

① 図の Ⓐ に黒球を固定すると，残りの 6ヶ所に赤球 4 個，白球 2 個を入れればよく，

$\dfrac{6!}{4!2!}=\mathbf{15}$ **(通り)**　　(答)



② ① のうち，図の点線に関して対称な並び方を考えると，白球が，Ⓑとⓖ，Ⓒとⓕ，Ⓓとⓔに入る場合の 3 通り．
これ以外の並び方は，点線に関してひっくり返すと一致するものが存在するので，できる数珠は，

$$\frac{15-3}{2}+3=\mathbf{9}\ \text{(通り)} \qquad \text{(答)}$$

(3) ① (6, 0)，(5, 1)，(4, 2)，(3, 3) の **4 通り**　　(答)

② 2 つの箱を A，B とすると，

$$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(6,\ 0),\ (5,\ 1),\ (4,\ 2),\ (3,\ 3),\ (2,\ 4),\ (1,\ 5),\ (0,\ 6)$$

の **7 通り**　　(答)

③ 6 個の球をそれぞれ箱 A，B のどちらに入れるかを考えて，

$$2^6=\mathbf{64}\ \text{(通り)} \qquad \text{(答)}$$

(4) 全ての取り出し方は，

$$ {}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35\ \text{(通り)}$$

白球 3 個，黒球 1 個を取り出す取り出し方は，

$$ {}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1=12\ \text{(通り)}$$

白球 1 個，黒球 3 個を取り出す取り出し方は，

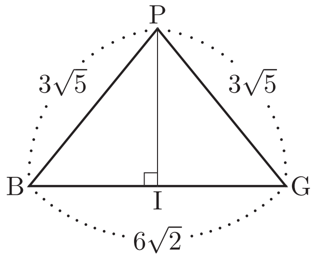
$$ {}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_3=4\ \text{(通り)}$$

これらの事象は互いに排反なので，求める確率は，

$$\frac{12}{35}+\frac{4}{35}=\boldsymbol{\frac{16}{35}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 三平方の定理より，

$$\mathrm{BP} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\mathrm{GP} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\mathrm{BG} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$



よって，△BPG において，P から BG に下ろした垂線の足を I とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PI}^2 &= \left(3\sqrt{5}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 27\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{PI} = 3\sqrt{3}$
これより，△BPG の面積 S は，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} \\ &= \boldsymbol{9\sqrt{6}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 四面体 BCGP について，体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{CGP} \cdot \mathrm{BC} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\right) \cdot 6 \\ &= 18\end{aligned}$$

よって，C から △BPG に下ろした垂線の長さを h とすれば，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}Sh \\ 18 &= \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{6} \cdot h \\ \therefore\ h &= \boldsymbol{\sqrt{6}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) 内接球の半径を r とすると，

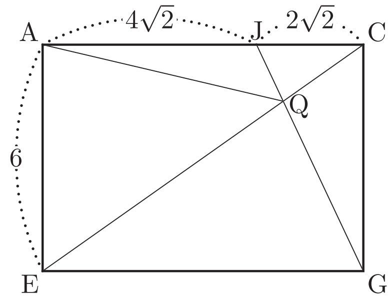
$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot r\,(\triangle\mathrm{BCG} + \triangle\mathrm{BCP} + \triangle\mathrm{CGP} + \triangle\mathrm{BPG}) \\ 18 &= \frac{1}{3} \cdot r \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 + 9\sqrt{6}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot r(36 + 9\sqrt{6}) \\ &= 3r(4 + \sqrt{6})\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}r &= \frac{18}{3(4 + \sqrt{6})} \\ &= \frac{6(4 - \sqrt{6})}{(4 + \sqrt{6})(4 - \sqrt{6})} \\ &= \boldsymbol{\frac{12 - 3\sqrt{6}}{5}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4) AC と BP の交点を J とする．
すると，$\triangle\mathrm{ABJ} \backsim \triangle\mathrm{CPJ}$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AJ}:\mathrm{CJ} &= \mathrm{AB}:\mathrm{CP}\\ &= 2:1\end{aligned}$$



立方体を A，C，G，E を通る平面で切ると，Q は右の図のようになる．
ここで，

$$\begin{aligned}\mathrm{CE}^2 &= \mathrm{AE}^2 + \mathrm{AC}^2\\ &= 108\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{CE} = 6\sqrt{3}$
また，$\triangle\mathrm{JQC} \backsim \triangle\mathrm{GQE}$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{CQ}:\mathrm{QE} &= \mathrm{JC}:\mathrm{GE}\\ &= 1:3\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{EQ} = \dfrac{3}{1+3}\mathrm{CE} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ また，$\cos\angle\mathrm{AEQ} = \dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{EC}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ これより，

$$\begin{aligned}\mathrm{AQ}^2 &= 6^2 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\cdot 6\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\\ &= 36 + \frac{243}{4} - 54 = \frac{171}{4}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AQ} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{19}}{2}}$ (答)

【4】(1)

$$\begin{aligned}&x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a\\ =&x^2 - (3a+1)x + 2a(a+1)\\ =&\boldsymbol{(x-2a)(x-a-1)}\end{aligned}$$ (答)

(2) (1) より

$$(x-2a)(x-a-1) \leqq 0$$

$a > 1$ だから，$2a > a+1$．よって，$\boldsymbol{a+1 \leqq x \leqq 2a}$ **(答)**

(3) $a > 1$ のとき，区間 $a+1 \leqq x \leqq 2a$ にただ 1 つの整数が含まれるにはグラフを利用するとわかりやすい．
$y = a+1$ と $y = 2a$ の 2 本の直線ではさまれた部分に整数の y 座標がただ 1 つ含まれていればよい．
グラフより，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{3}{2} \leqq a < 2,\ 2 < a < \frac{5}{2}}$$ (答)