M2JC

冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高２東大理系数学Ⅲ

問題

【1】(1) 点 $(x,\ y)$ を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を $(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{aligned} X+Yi &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(x+yi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)i \end{aligned}$$

より

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\quad Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\qquad \cdots ①$$

一方，G の方程式は

$$\begin{aligned} & x^2-2xy+y^2-2\sqrt{2}(x+y)+2=0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (x-y)^2-2\sqrt{2}(x+y)+2=0 \end{aligned}$$

となるから，① を代入して

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2}X\right)^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}Y+2=0 \\ \therefore\quad & X^2-2Y+1=0 \end{aligned}$$

以上より，求める放物線 F の方程式は

$$\begin{aligned} & x^2-2y+1=0 \\ \therefore\quad & y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\qquad \cdots ② \end{aligned}$$

(2) ② と $y=\pm x$ を連立すると

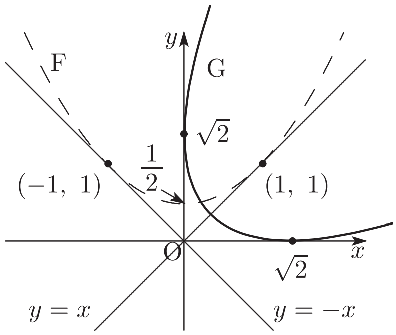
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}=\pm x\quad &\Longleftrightarrow\quad x^2\mp 2x+1=0 \\ &\Longleftrightarrow\quad (x\mp 1)^2=0\ \ (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

となり，いずれも重解をもつ．よって，F は 2 直線

$$y=x,\quad y=-x$$

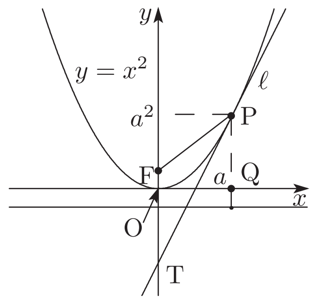
と接している．〔証明終〕

(3) (2) より，② と $y=\pm x$ は点 $(\pm 1,\ 1)$ で接しており，原点と接点の距離はともに $\sqrt{2}$ である．したがって，G は x 軸，y 軸とそれぞれ点 $\left(\sqrt{2},\ 0\right)$，$\left(0, \sqrt{2}\right)$ で接する放物線であるから，その概形は下図のようになる．



【2】(1) $y=x^2 \quad \cdots ①$ より

$$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}y$$



よって，① の焦点，および準線は

$$\text{焦点 : F} \ \left(0,\ \frac{1}{4}\right),\quad \text{準線 : } y=-\frac{1}{4}$$

一方，$\mathrm{P}(a,\ a^2)$ のとき，ℓ の方程式は

$$\frac{1}{2}\left(y+a^2\right) = ax$$
$$\therefore \quad y = 2ax - a^2$$

(2) T の座標は，ℓ の方程式において $x=0$ として

$$\mathrm{T}(0,\ -a^2)$$

よって

$$\mathrm{FT} = \frac{1}{4} - (-a^2) = \frac{1}{4} + a^2 \quad \cdots ②$$

一方

$$\mathrm{FP}^2 = a^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^2$$

であるから

$$\mathrm{FP} = a^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots ③$$

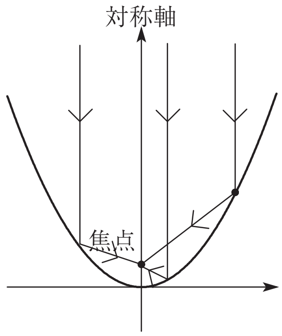
したがって，②，③ より

$$\mathrm{FT} = \mathrm{FP}$$

すなわち，$\triangle\mathrm{PFT}$ は二等辺三角形である．

(3) $\mathrm{PQ} /\!/ \mathrm{FT}$ より

$$\angle\mathrm{FTP} = \angle\mathrm{QPT}$$



一方，(2) より

$$\angle\mathrm{FTP} = \angle\mathrm{FPT}$$

したがって，$\angle\mathrm{FPT} = \angle\mathrm{QPT}$ が成り立つ．

≪注≫

本問の結果から，放物線の対称軸に平行に入射した光は，放物線で反射して，すべて焦点に集まることがわかる．

【3】(1) 与えられた双曲線の中心は原点であり，焦点は x 軸上に存在する．よって，$\sqrt{16+9}=5$ であることから，求める焦点の座標は

$$(\pm 5,\ 0)\ \ (=\mathrm{F},\ \mathrm{F}')$$

(2) 双曲線上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ における接線の方程式は

$$\frac{Xx}{16}-\frac{Yy}{9}=1$$

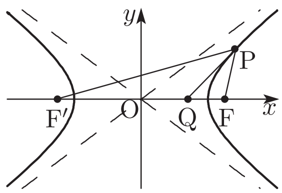
ここで，$y=0$ とすると

$$x=\frac{16}{X}\quad (\because\ X\fallingdotseq 0)$$

となるので点 Q の座標は

$$\left(\frac{16}{X},\ 0\right)$$

(3) 与えられた双曲線を



$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\quad \cdots ①$$

とし，その焦点を

$$\mathrm{F}(5,\ 0),\quad \mathrm{F}'(-5,\ 0)$$

とする．このとき，右上図に注意して，示すべき命題を言い換えると

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{FPQ}=\angle\mathrm{F'PQ}\quad &\Longleftrightarrow\quad \mathrm{PQ}\text{ は }\angle\mathrm{FPF'}\text{の二等分線}\\ &\Longleftrightarrow\quad \mathrm{PF}:\mathrm{PF'}=\mathrm{QF}:\mathrm{QF'}\quad\cdots ②\end{aligned}$$

そこで，② が成り立つことを示せばよい．$\mathrm{P}(X,\ Y)$ は ① 上の点であるから

$$\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1\qquad \therefore\ \ Y^2=9\left(\frac{X^2}{16}-1\right)$$

これを用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}&=\sqrt{(X-5)^2+Y^2}=\sqrt{(X-5)^2+9\left(\frac{X^2}{16}-1\right)}\\ &=\sqrt{\frac{25}{16}X^2-10X+16}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}X-4\right)^2}\\ &=\left|\frac{5}{4}X-4\right|=\frac{1}{4}|5X-16|\end{aligned}$$

同様にして

$$\mathrm{PF'}=\frac{1}{4}|5X+16|$$

が成り立つから

$$\mathrm{PF}:\mathrm{PF'}=|5X-16|:|5X+16|\quad\cdots ③$$

一方，(1)，(2) の結果より

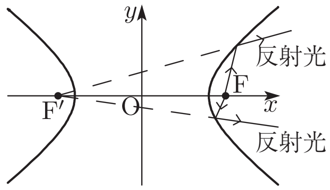
$$\mathrm{QF}=\left|5-\frac{16}{X}\right|=\frac{|5X-16|}{|X|},\quad \mathrm{QF'}=\left|5+\frac{16}{X}\right|=\frac{|5X+16|}{|X|}$$

$$\therefore\quad \mathrm{QF}:\mathrm{QF'}=|5X-16|:|5X+16|\quad\cdots④$$

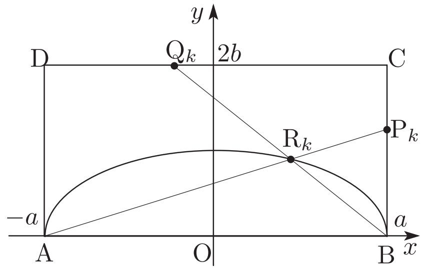
③，④ より，② が成り立つ.

よって，$\angle\mathrm{FPQ}=\angle\mathrm{F'PQ}$ が示された. 〔証明終〕

≪注≫ 本問の結果から，右図のように 1 つの焦点 F から出た光は，双曲線上で反射して，あたかももう 1 つの焦点 F′ から出た光のように進むことがわかる.



【4】 辺 AB，AD の長さをそれぞれ $2a$，$2b$ とし，図のように AB を x 軸，AB の垂直二等分線を y 軸とする座標を設定する．このとき，$\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{P}_k\left(a,\ \dfrac{2b}{n}k\right)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ であるから，直線 AP_k の方程式は



$$y=\frac{\frac{2b}{n}k}{2a}(x+a)$$

$$\therefore\quad y=\frac{bk}{an}(x+a)\quad\cdots①$$

また，$\mathrm{B}(a,\ 0)$，$\mathrm{Q}_k\left(a-\dfrac{2a}{n}k,\ 2b\right)$

$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

であるから直線 BQ_k の方程式は

$$y=\frac{-2b}{\frac{2a}{n}k}(x-a)\qquad\therefore\quad y=\frac{-bn}{ak}(x-a)\quad\cdots②$$

よって，①，② を連立して，n，k を消去すると

$$\left(\frac{k}{n}=\right)\frac{ay}{b(x+a)}=\frac{-b(x-a)}{ay}$$

より

$$a^2y^2=-b^2\left(x^2-a^2\right)$$

$$\therefore\quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

したがって，AP_k と BQ_k の交点 R_k はつねに 1 つの楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にある ($k=0$ のとき，$\mathrm{R}_k=\mathrm{B}$ だから，このときも成り立つ)．　〔証明終〕

【5】(1) 題意より，直線 ℓ は,

「$\mathrm{P}(0,\ 0,\ k)$ を通り，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\alpha,\ \beta,\ -k)$ を方向ベクトルとする直線」

とみることができる．よって，t をパラメータとして

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -k \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\ell : x = \alpha t,\quad y = \beta t,\quad z = -kt + k$$

(2) (1) の結果を，$S : x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ に代入すると

$$\begin{aligned} &\alpha^2 t^2 + (\beta t - 1)^2 + (-kt + k - 1)^2 = 1 \\ \iff\quad &\left(\alpha^2 + \beta^2 + k^2\right) t^2 - 2\left(\beta + k^2 - k\right) t + (k-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

$k > 0$ より，これは t の 2 次方程式となる．

ℓ が S と接する条件は，この 2 次方程式が重解をもつことであるから

$$\text{判別式} : (\beta + k^2 - k)^2 - \left(\alpha^2 + \beta^2 + k^2\right)(k-1)^2 = 0$$

$$\therefore\quad (k-1)^2\alpha^2 + k(k-2)\beta^2 - 2k(k-1)\beta = 0 \ \cdots ①$$

したがって

$$A = (k-1)^2,\quad B = k(k-2)$$

(3) ① より，E の方程式は

$$\begin{cases} (k-1)^2 x^2 + k(k-2)y^2 - 2k(k-1)y = 0 \quad \cdots ② \\ \quad \text{かつ} \\ z = 0 \end{cases}$$

であるから，これが点 $(2\sqrt{2},\ \ 2,\ \ 0)$ を通るとき

$$\begin{aligned} &8(k-1)^2 + 4k(k-2) - 4k(k-1) = 0 \\ \iff\quad &2k^2 - 5k + 2 = 0 \\ \iff\quad &(2k-1)(k-2) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つから

$$k = 2,\ \frac{1}{2}$$

ここで，$k = 2$ のとき，② は

$$x^2 - 4y = 0 \quad \iff \quad y = \frac{1}{4}x^2$$

また，$k = \dfrac{1}{2}$ のとき，② は

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}y = 0 \quad \iff \quad 3x^2 - 9\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = -1$$

以上より，求める k の値，および E が表す図形は,

$k = 2$ のとき「放物線」，$k = \dfrac{1}{2}$ のとき「双曲線」

(4) E が双曲線となるためには，

「② の x^2，y^2 の係数が異符号」

となることが必要である．すなわち

$$\begin{aligned} & k-1 \neq 0 \quad \text{かつ} \quad k(k-2)<0 \\ \iff \ & 0<k<1 \quad \text{または} \quad 1<k<2 \end{aligned}$$

このとき，② は

$$\frac{2-k}{k}x^2-\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2\left(y-\frac{k-1}{k-2}\right)^2=-1$$

となり，E は双曲線となる．よって，求める k の範囲は

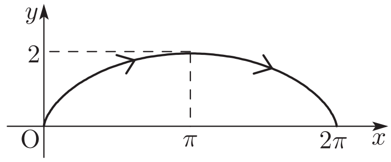
$$0<k<1 \text{ または } 1<k<2$$

問題

【1】(1) $\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\dfrac{dy}{dt} = \sin t$ であるから，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\nearrow$	$(\pi,\ 2)$	$\searrow$	$(2\pi,\ 0)$

よって，概形は下図のようになる．



≪注≫　$x = x(t) = t - \sin t$，$y = y(t) = 1 - \cos t$ とおくと

$$y(t) = y(2\pi - t), \quad \frac{x(t) + x(2\pi - t)}{2} = \pi$$

が成り立つので，グラフは直線 $x = \pi$ に関して対称である．

また，$\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$ から上に凸である．

(2) (1) の概形から

$$S = \int_0^{2\pi} y\,dx$$

ここで，$\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t$,

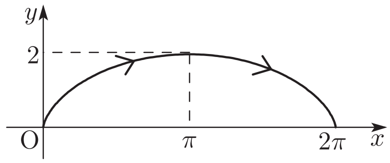
x	$0 \to 2\pi$
t	$0 \to 2\pi$

より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

【2】(1) $\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$ であるから，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\nearrow$	$(\pi,\ 2)$	$\searrow$	$(2\pi,\ 0)$



よって，概形は右上図のようになるので

$$V=\int_0^{2\pi}\pi y^2 dx=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt \quad \left(\because\ dx=(1-\cos t)dt,\ \begin{array}{|c|ccc|}\hline x & 0 & \to & 2\pi \\ \hline t & 0 & \to & 2\pi \\ \hline\end{array}\right)$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}-\frac{\cos 3t+3\cos t}{4}\right)dt$$

$$=\pi\left[\frac{5}{2}t-\frac{15}{4}\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t-\frac{1}{12}\sin 3t\right]_0^{2\pi}=5\pi^2$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$, $\dfrac{dy}{dt}=\sin t$ であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=\sqrt{2-2\cos t}=\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}$$

$0 \leqq \dfrac{t}{2} \leqq \pi$ では $\sin\dfrac{t}{2} \geqq 0$ より，求める長さを ℓ とすると

$$\ell=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8$$

≪注≫ (1) の体積の計算については

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}\ (2\text{ 倍角の公式}) \qquad \cos^3 t=\frac{\cos 3t+3\cos t}{4}\ (3\text{ 倍角の公式})$$

を用いているが，次のようにして求めることもできる.

$$V=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=\pi\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3 dt=8\pi\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt$$

$$=16\pi\int_0^{\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt \quad (\because\ t=\pi\ \text{に関する対称性})$$

$$=32\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,d\theta \quad (\because\ t=2\theta)$$

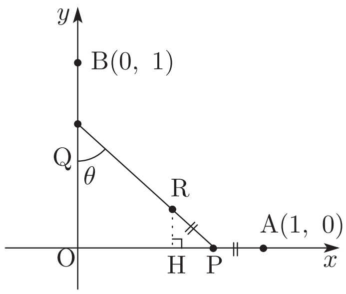
$$=32\pi\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=5\pi^2$$

最後の積分計算において，次の公式を用いた.

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数})\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1 & (n:\text{奇数})\end{cases}}$$

【3】(1) $\mathrm{OP} = \sin\theta$ より

$$\mathrm{AP} = \mathrm{PR} = 1 - \mathrm{OP} = 1 - \sin\theta$$



ここで，R から x 軸への垂線の足を H とおくと，$\angle\mathrm{RPH} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{PH} &= \mathrm{PR}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\\ &= (1 - \sin\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathrm{OH} = \mathrm{OP} - \mathrm{PH} = \sin^2\theta$$

また

$$\mathrm{RH} = \mathrm{PR}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (1 - \sin\theta)\cos\theta$$

よって

$$\mathrm{R}\ \left(\sin^2\theta,\ (1 - \sin\theta)\cos\theta\right)$$

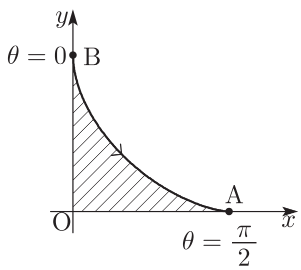
(2) 題意から，θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を動き，$\theta = 0$ のとき $\mathrm{R} = \mathrm{B}$ であり，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\mathrm{R} = \mathrm{A}$ である．また，$\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと，(1) より

$$x = \sin^2\theta,\quad y = (1 - \sin\theta)\cos\theta$$

であり

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta \geqq 0\quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

から R の描くグラフは x 方向に単調増加する．
よって，求める面積 S は



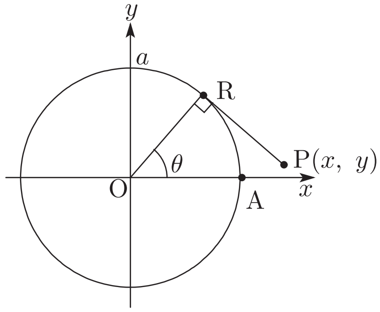
$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 y\,dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta d\theta\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta\sin\theta - \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\right) d\theta\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\cos^2\theta(\cos\theta)' - \frac{1}{4}\cdot\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\right\} d\theta\\ &= 2\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta - \frac{1}{8}\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 2\left(-\frac{\pi}{16} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

【4】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ である．$\angle\mathrm{AOR}=\theta$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$$

また，$\angle\mathrm{ORP}=90^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ 方向の単位ベクトルとして

$$(\sin\theta,\ -\cos\theta)$$



がとれる．$|\mathrm{RP}|$ は $\overset{\frown}{\mathrm{RA}}$ の長さに等しいから

$$|\mathrm{RP}|=\overset{\frown}{\mathrm{RA}}=a\theta$$

よって

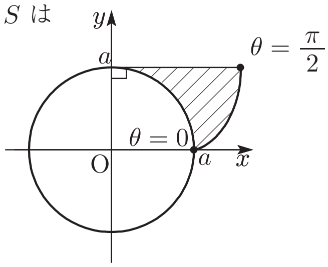
$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(a\theta\sin\theta,\ -a\theta\cos\theta)$$

となる．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a\cos\theta+a\theta\sin\theta,\ a\sin\theta-a\theta\cos\theta)$ なので

$$\begin{cases} x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta) \\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta) \end{cases}$$

(2) 求める部分は右図の斜線部分であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^a xdy-\frac{\pi}{4}a^2$$



と表される．題意より，右図における点 P が描く曲線は，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲であり，また

$$\frac{dy}{d\theta}=a(\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta)=a\theta\sin\theta$$

なので

$$\begin{aligned} S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a(\cos\theta+\theta\sin\theta)\cdot a\theta\sin\theta d\theta-\frac{\pi}{4}a^2 \\ &=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\sin^2\theta\right)d\theta-\frac{\pi}{4}a^2 \\ &=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\theta}{2}\sin 2\theta+\theta^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta-\frac{\pi}{4}a^2 \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta}{2}\sin 2\theta\,d\theta=\left[-\frac{\theta}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{8}+\left[\frac{1}{8}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}\quad\cdots①$$

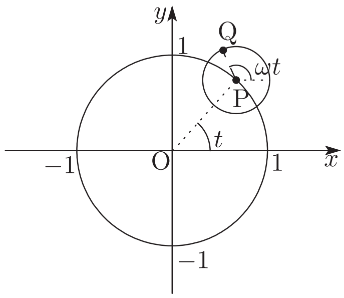
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta^2}{2}d\theta=\left[\frac{\theta^3}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{48}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta^2}{2}\cos 2\theta d\theta=\left[\frac{\theta^2}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta}{2}\sin 2\theta d\theta=-\frac{\pi}{8}\quad(\because\ ①より)$$

であるから

$$S=a^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}a^2=\frac{\pi^3}{48}a^2$$

【5】(1) 題意より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos t,\ \sin t)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)$ であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos t+r\cos\omega t,\ \sin t+r\sin\omega t)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,\ y)$ とおくと

$$x=\cos t+r\cos\omega t,\ y=\sin t+r\sin\omega t$$

より

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t-r\omega\sin\omega t,\quad \frac{dy}{dt}=\cos t+r\omega\cos\omega t$$

また

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t-r\omega^2\cos\omega t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\sin t-r\omega^2\sin\omega t$$

条件より，$\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(0,\ 0)$ であるから

$$\cos t=-r\omega^2\cos\omega t,\quad \sin t=-r\omega^2\sin\omega t$$

よって

$$\cos^2 t+\sin^2 t=r^2\omega^4(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)\qquad \therefore\quad r^2\omega^4=1$$

したがって，$r=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\omega^4=9$ より，$\omega>0$ であるから

$$\omega=\sqrt{3}$$

(2) $r=\dfrac{1}{2}$，$\omega=2$ のとき

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t-\sin 2t,\quad \frac{dy}{dt}=\cos t+\cos 2t$$

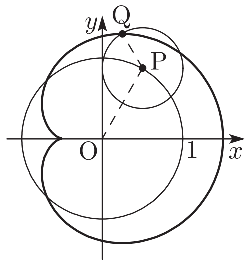
であるから

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=(-\sin t-\sin 2t)^2+(\cos t+\cos 2t)^2\\&=\sin^2 t+2\sin t\sin 2t+\sin^2 2t+\cos^2 t+2\cos t\cos 2t+\cos^2 2t\\&=2+2(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t)=2+2\cos t=4\cos^2\frac{t}{2}\end{aligned}$$

したがって，点 Q が動いた道のりを l とすると

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}dt=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=4\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt=8\left[\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=8$$

≪注≫ 点 Q の描く軌跡は右図のようになる．この曲線は，カージオイド (心臓形) である．



３章　複素数平面の応用（１）

問題

【1】

$$z^3+(1-a^2)z-a=(z-a)(z^2+az+1)$$

と因数分解できるので, 与えられた方程式の解は

$$z-a=0 \text{ または } z^2+az+1=0$$

の解, すなわち

$$\begin{cases} z=a & \cdots ① \\ z=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2} & \cdots ② \end{cases}$$

である.

すると, a が実数全体を動くとき, ①の解も実数全体を動く. よって, ②の解が虚数である場合を考える. このとき

$$-2<a<2$$

であり, $\alpha=\dfrac{-a+\sqrt{4-a^2}i}{2}$ とおくと, 2 解は α, $\overline{\alpha}$ となる. そして, 解と係数の関係より

$$\alpha\overline{\alpha}=1 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha|=1$$

また, α の実部は $-\dfrac{a}{2}$ であるが

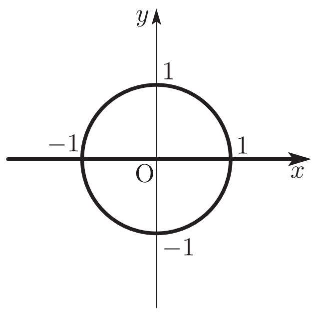
$$-1<-\frac{a}{2}<1$$

だから, 点 α は単位円周上の虚部が正である部分を動く. そして, $\overline{\alpha}$ は単位円周上の虚部が負である部分を動く.

以上より, 解の描く図形は

$$\begin{cases} \text{実軸全体} \\ \text{単位円周上の点 } \pm 1 \text{ を除いた部分} \end{cases}$$

であり, これを図示すると右図の太実線部分のようになる.



【2】(1) $z+\dfrac{1}{z}$: 実数 より

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}$$

$$\therefore \quad z-\bar{z}+\frac{\bar{z}-z}{z\bar{z}}=(z-\bar{z})\left(1-\frac{1}{z\bar{z}}\right)=0$$

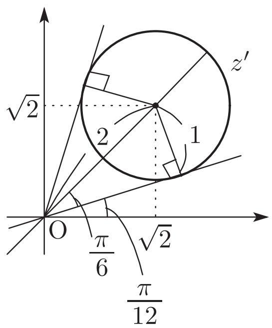
ここで，$z-\bar{z}\neq 0$ (もし $z=\bar{z}$ なら z は実数) なので

$$z\bar{z}=1$$

つまり，$z\bar{z}=|z|^2$ より

$$a=1$$

(2) $|z|=1$ のとき，$z'=z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ とおくと



$$|z|=|z'-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)|=1$$

をみたす．つまり z' は，$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ を中心とする半径 1 の円上を動く (図参照)．よって

$$1\leqq|z'|\leqq 3,\quad \frac{\pi}{12}\leqq\arg z'\leqq\frac{5}{12}\pi$$

$w=z'^4$ であるから

$$1\leqq|w|\leqq 81,\quad \frac{\pi}{3}\leqq\arg w\leqq\frac{5}{3}\pi$$

【3】 $|z|=1$ より

$$z=\cos\theta+i\sin\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおくことができる．このとき

$$z^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta, \quad \overline{z}=\cos\theta-i\sin\theta$$

$$\therefore \quad z^2-\overline{z}=(\cos 2\theta-\cos\theta)+i(\sin 2\theta+\sin\theta)$$

よって, $z^2-\overline{z}$ が実数であるとき

$$\sin 2\theta+\sin\theta=0$$

これより

$$\sin\theta(2\cos\theta+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta=0 \text{ または } \cos\theta=-\frac{1}{2}$$

となるので

$$\theta=0,\ \pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \quad z=1,\ -1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

また

$$\begin{aligned}|z^2-\overline{z}|^2&=(\cos 2\theta-\cos\theta)^2+(\sin 2\theta+\sin\theta)^2\\&=2-2(\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta)\\&=2-2\cos(2\theta+\theta)\\&=2-2\cos 3\theta\end{aligned}$$

であるから, $|z^2-\overline{z}|$ が最大となるとき

$$\cos 3\theta=-1$$

そして, $0 \leqq 3\theta < 6\pi$ なので

$$3\theta=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi \qquad \therefore \quad \theta=\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

よって

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ -1,\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

【4】(1) z の絶対値が r で偏角が θ なので

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と書ける．よって

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\cdot\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{aligned}$$

これより, 複素数 w の実部, 虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}(w)$, $\mathrm{Im}(w)$ と表すことにすると

$$\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad \mathrm{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

(2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対して, ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n + \frac{1}{r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n} \\ &= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \frac{1}{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} \\ &= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \frac{1}{r^n}(\cos n\theta - i\sin n\theta) \\ &= \left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)\cos n\theta + i\cdot\left(r^n - \frac{1}{r^n}\right)\sin n\theta \end{aligned}$$

となる．すると,

(i) $z + \dfrac{1}{z}$ が実数であるとき, (1) より $\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\theta = 0$ であるから

$$r = \frac{1}{r} \text{ または } \sin\theta = 0$$

で, $r > 0$ なので

$$r = 1 \text{ または } \theta = m\pi \ (m \text{ は整数})$$

すると, $r = 1$ のとき

$$r^n - \frac{1}{r^n} = 1 - 1 = 0 \qquad \therefore \quad \mathrm{Im}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = 0$$

また, $\theta = m\pi$ のとき, $\sin\theta = 0$ より z は実数となるので, $z^n + \dfrac{1}{z^n}$ は実数である．

(ii) $z + \dfrac{1}{z}$ が純虚数であるとき, (1) より $\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\theta = 0$ であるが, $r > 0$ なので

$$\cos\theta = 0 \qquad \therefore \quad \theta = m\pi + \frac{\pi}{2} \ (m \text{ は整数})$$

このとき, $2n\theta = 2mn\pi + n\pi$ であるから

$$\sin 2n\theta = \sin n\pi = 0$$

よって
$$\sin n\theta \cos n\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin n\theta = 0 \text{ または } \cos n\theta = 0$$
となり
$$\mathrm{Re}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = 0 \text{ または } \mathrm{Im}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = 0$$
を得るので, $z^n + \dfrac{1}{z^n}$ は純虚数または実数である.

【5】(1) B は原点 O を中心とする正 5 角形の頂点であるから

$$\angle \mathrm{AOB} = \frac{2}{5}\pi$$

そして，$\mathrm{OB} = \mathrm{OA} = 1$ なので，B を表す複素数 β は

$$\beta = 1 \cdot \left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right) = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi$$

である．すると，ド・モアブルの定理より

$$\beta^5 = \left(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

$$\therefore \quad \beta^5 - 1 = (\beta - 1)(\beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1) = 0$$

となるが，β は虚数なので

$$\beta \neq 1 \qquad \therefore \quad \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

(2) B を表す複素数を β とすれば，C，D を表す複素数はそれぞれ

$$\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi = \beta^2, \quad \cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi = \beta^3$$

である．よって

$$h = \frac{\beta^2 + \beta^3}{2}$$

これより

$$\begin{aligned}
4h^2 + 2h - 1 &= 4 \cdot \left(\frac{\beta^2 + \beta^3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\beta^2 + \beta^3}{2} - 1 \\
&= (\beta^2 + \beta^3)^2 + (\beta^2 + \beta^3) - 1 \\
&= \beta^4 + 2\beta^5 + \beta^6 + \beta^2 + \beta^3 - 1 \\
&= \beta^4 + 2 + \beta + \beta^2 + \beta^3 - 1 \quad (\because\ \beta^5 = 1) \\
&= \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 \\
&= 0 \quad (\because\ (1) \text{ より})
\end{aligned}$$

となるので，h の値を求めると

$$h = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

そして，明らかに $h < 0$ だから

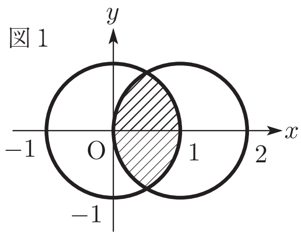
$$h = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

問題

【1】(1) $\begin{cases} |z| \leqq 1 & ：中心\mathrm{O},\ 半径1の円の内部および周 \\ |z-1| \leqq 1 & ：中心1,\ 半径1の円の内部および周 \end{cases}$

を表す．よって，図 1 の斜線部分 (境界を含む)
を表す．

図 1

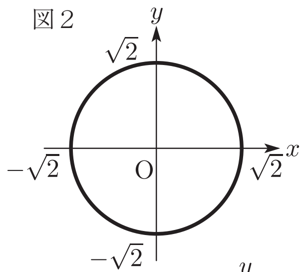


(2)

$$z \cdot \bar{z} = 2 \iff |z|^2 = 2$$
$$\iff |z| = \sqrt{2}$$

よって, 中心 O, 半径 $\sqrt{2}$ の円 (図 2) を表す.

図 2



(3) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2 \iff \dfrac{|z-3|}{|z+3|} = 2$

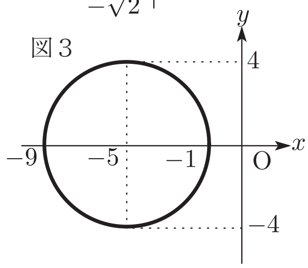
$\iff |z-3| = 2|z+3| \quad \cdots ①$

①の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}
& |z-3|^2 = 4|z+3|^2 \\
\iff\ & (z-3)\overline{(z-3)} = 4(z+3)\overline{(z+3)} \\
\iff\ & (z-3)(\bar{z}-3) = 4(z+3)(\bar{z}+3) \\
\iff\ & z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 = 4(z\bar{z} + 3z + 3\bar{z} + 9) \\
\iff\ & z\bar{z} + 5z + 5\bar{z} + 9 = 0 \\
\iff\ & (z+5)(\bar{z}+5) = 16 \\
\iff\ & |z+5|^2 = 16 \\
\iff\ & |z+5| = 4
\end{aligned}$$

よって，中心 -5, 半径 4 の円 (図 3) を表す.

図 3

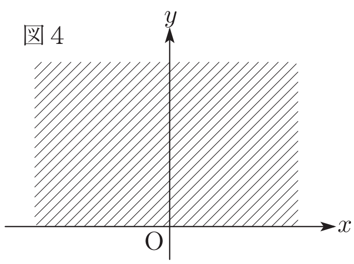


(4) $z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと

$$\mathrm{Im}(z) > 0 \iff y > 0$$

よって，図 4 の斜線部分 (境界を含まない) を表す.

図 4



(5) $z = x + yi$ ($x,\ y$ は実数) とおくと

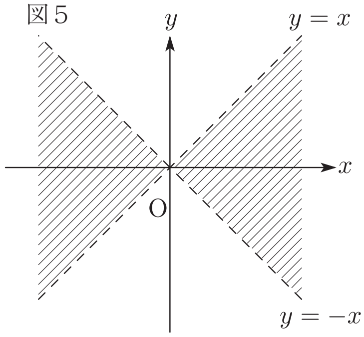
$$z^2 = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z^2) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+y)(x-y) > 0 \end{aligned}$$

よって，図 5 の斜線部分 (境界を含まない) を表す.

図 5



【2】 $w=\dfrac{1}{z-2}$ より $w\neq 0$ である.

ここで, $w(z-2)=1$ つまり $wz=1+2w$ より

$$z=\frac{1+2w}{w}=2+\frac{1}{w}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{z+\overline{z}}{2}&=\frac{1}{2}\left\{\left(2+\frac{1}{w}\right)+\overline{\left(2+\frac{1}{w}\right)}\right\}\\&=2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{\overline{w}}\right)=1\end{aligned}$$

これから

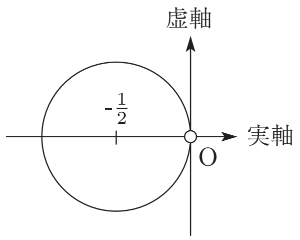
$$w\overline{w}+\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}\overline{w}=0$$

つまり

$$\begin{aligned}&\left(w+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{w}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\\\Leftrightarrow&\left(w+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(w+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \left|w+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

よって, w は中心 $-\dfrac{1}{2}$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く. ただし, $w=0$ を除く.



【3】 $z' = z + 1 - i$ とおくと, z を z' にうつす変換は

複素数 $1 - i$ で表される平行移動

に他ならない. したがって, z' の表す点の軌跡は

中心 1, 半径 1 の円

である. そして, $w = (-1+i)z'$ であり

$$\begin{aligned} -1+i &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

なので, z' を w にうつす変換は

原点中心の $\sqrt{2}$ 倍の拡大, 135° 回転の合成

に他ならない. したがって

$$(i-1)\cdot 1 = -1+i$$

より, w の表す点の軌跡は

中心 $-1+i$, 半径 $\sqrt{2}$ の円

である.

＜別解＞

z は $|z - i| = 1$ をみたす. ここで

$$w = (i-1)(z+1-i) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{w}{-1+i} - 1 + i$$

なので, w は

$$\left|\frac{w}{-1+i} - 1 + i - i\right| = 1$$

をみたす. これを変形すると

$$|w - (-1+i)| = |-1+i| = \sqrt{2}$$

から, 結論を得る.

【4】(1) $a=1$ のとき

$$z_2 = 1+i$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} &= \frac{2+2i}{-2i} \ = \ -1+i \ = \ \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \angle z_2 z_1 z_3 = \arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

(2) 求める条件は $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ が実数であることであるから

$$\begin{aligned}\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} &= \frac{(a-1)-2i}{2+2i} \ = \ \frac{1}{2}\cdot\frac{\{(a-1)-2i\}(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{a-3+(-a-1)i}{4}\end{aligned}$$

よって

$$-a-1=0 \qquad \therefore \quad a=-1$$

【5】他の 2 頂点は，点 $(a,\ b)$ を原点のまわりに $\pm\dfrac{2}{3}\pi$ 回転させたものである (図 1)．よって，他の 2 頂点に対応する複素数は

$$\begin{aligned}&(a+bi)\left\{\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\\ &= (a+bi)\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= -\frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{3}}{2}ai - \frac{1}{2}bi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}bi^2\\ &= \frac{-a\mp\sqrt{3}b}{2} + \frac{-b\pm\sqrt{3}a}{2}i \quad \text{(複号同順)}\end{aligned}$$

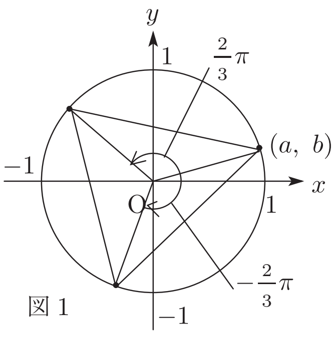


図 1

ゆえに，他の 2 頂点の x 座標は

$$\frac{-a-\sqrt{3}b}{2}, \quad \frac{-a+\sqrt{3}b}{2}$$

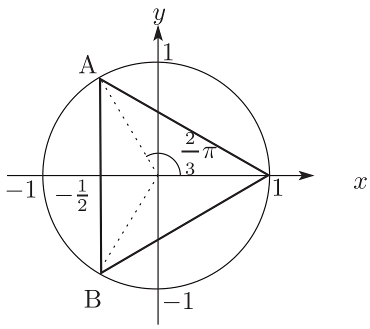
問題

【1】α，β は共役複素数なので

$$\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \alpha\beta = 1 \qquad \therefore \quad |\alpha| = |\beta| = 1$$

よって，α，β の表す頂点は図の 2 頂点 A，B である．したがって，図より，α と β は

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



である．解と係数の関係を用いると

$$\alpha + \beta = -2p$$

よって

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

【2】$w = \dfrac{z+2}{z-1}$ を z について解くと

$$(z-1)w = z+2 \qquad \therefore \quad (w-1)z = w+2$$

$w = 1$ はこれをみたさないので，$w \neq 1$ である．よって

$$z = \frac{w+2}{w-1}$$

これを $|z| = 2$ に代入すると

$$\left|\frac{w+2}{w-1}\right| = 2 \qquad \therefore \quad |w+2| = 2|w-1|$$

辺々を平方すると

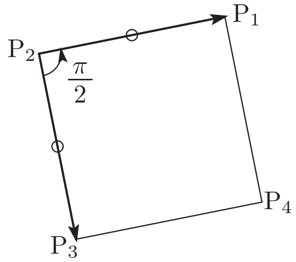
$$\begin{aligned} |w+2|^2 = 4|w-1|^2 &\iff (w+2)\overline{(w+2)} = 4(w-1)\overline{(w-1)} \\ &\iff (w+2)(\bar{w}+2) = 4(w-1)(\bar{w}-1) \\ &\iff w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} = 0 \\ &\iff (w-2)(\bar{w}-2) = 4 \\ &\iff |w-2|^2 = 4 \\ &\iff |w-2| = 2 \end{aligned}$$

よって，点 w は点 2 を中心とする半径 2 の円を描く．

【3】(1) P_1，P_2，P_3 はこの順に反時計回りに並ぶから，四角形 $P_1P_2P_3P_4$ が正方形であるとき，$\overrightarrow{P_2P_1}$ は $\overrightarrow{P_2P_3}$ を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転させたものである．よって

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$\therefore \quad \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = -i$$



(2) 四角形 $P_1P_2P_3P_4$ が正方形であるならば，(1) と同様に

$$\frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_4} = -i, \quad \frac{z_3 - z_4}{z_4 - z_1} = -i, \quad \frac{z_4 - z_1}{z_1 - z_2} = -i$$

$$\therefore \quad \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_4} = \frac{z_3 - z_4}{z_4 - z_1} = \frac{z_4 - z_1}{z_1 - z_2} \quad \cdots ①$$

逆に，①が成り立つとき，与式の値を k とおき

$$\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = k, \quad \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_4} = k, \quad \frac{z_3 - z_4}{z_4 - z_1} = k, \quad \frac{z_4 - z_1}{z_1 - z_2} = k$$

の辺々の積をとると

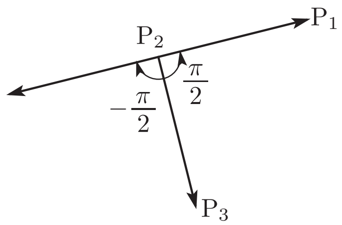
$$1 = k^4$$

これより $k^2 = \pm 1$ となり

$$k = \pm 1,\ \pm i$$

ここで，P_1，P_2，P_3 は同一直線上にないから，k は実数でない．よって，$k = \pm i$ となり

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = -k = \pm i$$



すなわち，$\overrightarrow{P_2P_1}$ は $\overrightarrow{P_2P_3}$ を $\pm\frac{\pi}{2}$ 回転させたものであるが，P_1，P_2，P_3 は反時計回りに並ぶから，$-\frac{\pi}{2}$ は不適で，$\overrightarrow{P_2P_1}$ は $\overrightarrow{P_2P_3}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転させたものに他ならない．よって

$$P_1P_2 = P_2P_3, \quad P_1P_2 \perp P_2P_3$$

他の辺についても同様であるから，四角形 $P_1P_2P_3P_4$ は正方形となる．

【4】(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転させると, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ に一致する．これより

$$d-b=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(c-b)$$

よって

$$\begin{aligned}d&=b+\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(c-b)\\&=b+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(c-b)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転させると, $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ に一致するので

$$e-c=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(a-c)$$

よって

$$e=c+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(a-c)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)c+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a$$

また, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転させると, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ に一致するので

$$f-a=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(b-a)$$

よって

$$f=a+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(b-a)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)b$$

以上より

$$d+e+f=a+b+c$$

すると, $\triangle\mathrm{DEF}$ の重心, $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を表す複素数はそれぞれ

$$\frac{d+e+f}{3},\quad \frac{a+b+c}{3}$$

であるが, 上式より

$$\frac{d+e+f}{3}=\frac{a+b+c}{3}$$

したがって, $\triangle\mathrm{DEF}$ の重心と $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心は一致する．

【5】(1) $\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数となるための条件は

$$\overline{\left\{\frac{z-2i}{i(z-2)}\right\}}=\frac{z-2i}{i(z-2)}$$

となることである．そこで，$z \neq 2$ のもとでこの等式を変形すると

$$\begin{aligned}
\overline{\left\{\frac{z-2i}{i(z-2)}\right\}}=\frac{z-2i}{i(z-2)} &\iff \overline{(z-2i)}\cdot i(z-2)=(z-2i)\cdot\overline{i(z-2)}\\
&\iff (\overline{z}+2i)\cdot i(z-2)=(z-2i)\cdot(-i)(\overline{z}-2)\\
&\iff (\overline{z}+2i)(z-2)+(z-2i)(\overline{z}-2)=0\\
&\iff z\overline{z}-(1+i)\overline{z}-(1-i)z=0\\
&\iff \{z-(1+i)\}\{\overline{z}-(1-i)\}=(1+i)(1-i)\\
&\iff \{z-(1+i)\}\overline{\{z-(1+i)\}}=2\\
&\iff |z-(1+i)|^2=2\\
&\iff |z-(1+i)|=\sqrt{2}
\end{aligned}$$

したがって，z の描く図形は

中心 $1+i$，半径 $\sqrt{2}$ の円　(ただし，点 2 を除く)

＜別解＞

$z=x+yi$ とおいて考えても面倒ではない．以下に示しておくと

$$\begin{aligned}
\frac{z-2i}{i(z-2)}&=\frac{x+(y-2)i}{i\{(x-2)+yi\}}=\frac{x+(y-2)i}{-y+(x-2)i}\\
&=\frac{\{x+(y-2)i\}\{-y-(x-2)i\}}{\{-y+(x-2)i\}\{-y-(x-2)i\}}\\
&=\frac{\{-xy+(x-2)(y-2)\}-\{x(x-2)+y(y-2)\}i}{y^2+(x-2)^2}
\end{aligned}$$

となるから，$\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数となるための条件は

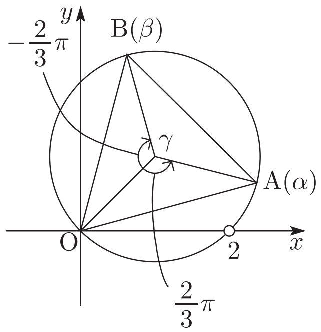
$$\mathrm{Im}\left\{\frac{z-2i}{i(z-2)}\right\}=0 \iff \frac{x(x-2)+y(y-2)}{y^2+(x-2)^2}=0$$

であり，これより

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \quad (\text{ただし，}(x,\ y)\neq(2,\ 0))$$

を得る．

(2) 条件より O，A，B の位置関係は右図のようになるから，円の中心 $1+i$ を γ とおけば



$$\alpha-\gamma=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)(0-\gamma)$$

よって

$$\begin{aligned}\alpha&=1+i+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1-i)\\&=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

また

$$\beta-\gamma=\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}(0-\gamma)$$

よって

$$\begin{aligned}\beta&=1+i+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1-i)\\&=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

添削課題

【1】

(1) 線分 AB 上の点 P(z) は $z=1+ti\ (0 \leqq t \leqq 2)$ と表せる．よって

$$z^2=1-t^2+2ti$$

z^2 の実数部分を x，虚数部分を y とすると

$$\begin{aligned} x &= 1-t^2 \\ y &= 2t \end{aligned}$$

よって

$$x=1-\left(\frac{y}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}y^2+1\ (0 \leqq y \leqq 4)$$

(2) $\arg\dfrac{1-w}{2i-w}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ かつ $|1-w|=|2i-w|$ であるから

$$\frac{1-w}{2i-w}=\pm i$$

これを解く．

(i) $\dfrac{1-w}{2i-w}=i$ の場合

$1-w=-2-iw \quad \Leftrightarrow \quad 3=(1-i)w$ より

$$w=\frac{3}{1-i}=\frac{3}{2}(1+i)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$$

(ii) $\dfrac{1-w}{2i-w}=-i$ の場合

$1-w=2+iw \quad \Leftrightarrow \quad -1=(1+i)w$ より

$$w=\frac{-1}{1+i}=-\frac{1}{2}(1-i)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

M2JC

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	