

高2 東大理系数学Ⅲ 導入



1章 2次曲線 (1)

問題

【1】(1) 与式を平方完成すると

$$(y - 2)^2 = 4(x + 1)$$

これは、放物線

$$y^2 = 4x \quad \dots \textcircled{1}$$

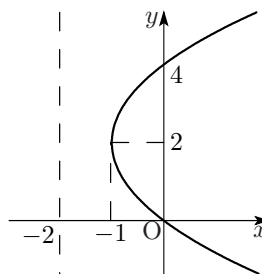
を x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである. ①の焦点, 準線, 頂点および対称軸は

$$\begin{cases} \text{焦点: } (1, 0), & \text{準線: } x = -1 \\ \text{頂点: 原点,} & \text{対称軸: } x \text{ 軸} \end{cases}$$

であるから, 求める焦点, 準線, 頂点および対称軸は

$$\begin{cases} \text{焦点: } (0, 2), & \text{準線: } x = -2 \\ \text{頂点: } (-1, 2), & \text{対称軸: } y = 2 \end{cases}$$

また, グラフは右図のようになる.



(2) まず, 放物線の頂点の座標を求める. 焦点 $F(2, 1)$ から準線 $x = 4$ に下ろした垂線の足は $H(4, 1)$ であるから, FH の中点 $(3, 1)$ が頂点である.

全体を x 軸方向に -3 , y 軸方向に -1 だけ平行移動して, 頂点を原点に移すと

$$\begin{cases} \text{焦点 } F(2, 1) \rightarrow F'(-1, 0) \\ \text{準線 } \ell: x = 4 \rightarrow \ell': x = 1 \end{cases}$$

ここで, F' を焦点, ℓ' を準線とする放物線の方程式は

$$y^2 = 4 \cdot (-1)x \quad \therefore y^2 = -4x$$

求める方程式は, これを x 軸方向に 3 , y 軸方向に 1 だけ平行移動して

$$(y - 1)^2 = -4(x - 3)$$

【2】(1) 中心 (2 焦点の中点) が原点であり, x 軸上に焦点をもつことから, 求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける. このとき, 焦点が $(\pm 1, 0)$ であることから

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 1 \quad \therefore a^2 - b^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

一方, 短軸の長さが 4 であることから

$$2b = 4 \quad \therefore b = 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

②, ③ より $a = \sqrt{5}$, $b = 2$ を得るから, これらを ① に代入して

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(2) 与式を平方完成すると

$$3(x-1)^2 + (y-3)^2 = 3 \quad \therefore (x-1)^2 + \frac{(y-3)^2}{3} = 1$$

これは楕円

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

を x 軸方向に 1, y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである. ④ の焦点は

$$(0, \pm \sqrt{2})$$

であるから, 求める焦点はこれを平行移動して

$$(1, 3 \pm \sqrt{2})$$

また, ④ において長軸, および短軸の長さの半分は, それぞれ $\sqrt{3}$, 1 である. よって, ④ によって囲まれる部分の面積, すなわち求める面積は

$$\pi \times \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}\pi$$

【3】(1) 与えられた双曲線 $\frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{(y-4)^2}{4^2} = 1$ は、双曲線

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \dots \textcircled{1}$$

を x 軸方向に 1, y 軸方向に 4 だけ平行移動したものである。① の焦点は

$$(\pm 5, 0)$$

であるから、求める焦点はこれを平行移動して

$$(6, 4), (-4, 4)$$

また、① の漸近線は $y = \pm \frac{4}{3}x$ であるから、求める漸近線はこれを平行移動して

$$\begin{aligned} y - 4 &= \pm \frac{4}{3}(x - 1) \\ \therefore y &= \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}, \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(2) 中心が原点であり、 y 軸上に焦点をもつことから、求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0) \dots \textcircled{2}$$

とおける。このとき、焦点の 1 つが $(0, 6)$ であることから

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 6 \quad \therefore a^2 + b^2 = 36 \dots \textcircled{3}$$

一方、2 頂点間の距離が 10 であることから

$$2b = 10 \quad \therefore b = 5 \dots \textcircled{4}$$

③, ④ より $a = \sqrt{11}$, $b = 5$ を得るから、これらを ② に代入して

$$\frac{x^2}{11} - \frac{y^2}{25} = -1$$

【4】(1) 与えられた放物線の式を変形して

$$y = x^2 \iff x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}y$$

この放物線の焦点は

$$F \left(0, \frac{1}{4} \right) \quad \therefore p = \frac{1}{4}$$

(2) (1) より, 準線は $y = -\frac{1}{4}$ であり, P から準線に下ろした垂線の足を K とすると, 放物線の定義より

$$PF = PK$$

が成り立つ. また, 円の方程式が

$$\begin{aligned} x^2 + (y - p)^2 &= p^2 \\ \iff x^2 + \left(y - \frac{1}{4} \right)^2 &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 \end{aligned}$$

と表されることから

$$FA = \frac{1}{4}$$

よって

$$PH = PA \quad \dots \textcircled{1}$$

がつねに成り立つから, ①のもとで, $\triangle PAH$ が正三角形という条件は, $\angle APH = 60^\circ$ と同値である. このとき, F から PH に下ろした垂線の足を B とすると

$$PB = \frac{FB}{\sqrt{3}}, \quad PF = \frac{2}{\sqrt{3}}FB$$

であることから

$$\begin{cases} PH = PB + BH = \frac{FB}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \\ PA = PF - FA = \frac{2}{\sqrt{3}}FB - \frac{1}{4} \end{cases}$$

これらを ① に代入して

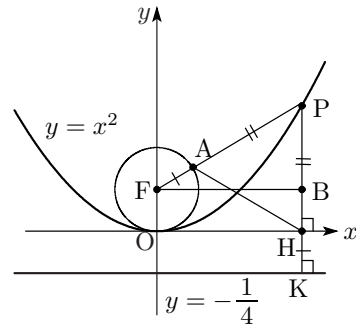
$$\frac{FB}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} = \frac{2}{\sqrt{3}}FB - \frac{1}{4} \quad \therefore FB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$PH = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

したがって

$$\triangle PAH = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{64}$$



【5】 x 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した図形を考えると

$$\text{「楕円 } C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \text{ は、円 } C': x^2 + y^2 = 1 \text{」}$$

に移る. また, この変換で, $A(2, 0)$, P , Q , および PQ の中点 M が移る点をそれぞれ, A' , P' , Q' , M' とおくと

$$A' (\sqrt{2}, 0)$$

であり, M' は C' の弦 $P'Q'$ の中点となるから, 円の性質から

$$\angle OM'A' = 90^\circ$$

となる. よって, M' は OA' を直径とする円

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

の周上にあり, かつ C' の内部にある (図 1). この円弧の上端を T' とおくと, $\triangle OT'A'$ が直角二等辺三角形となることから

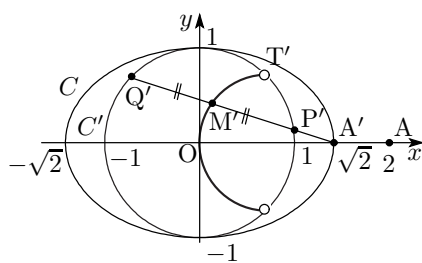
$$T' \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

したがって, M' の軌跡は

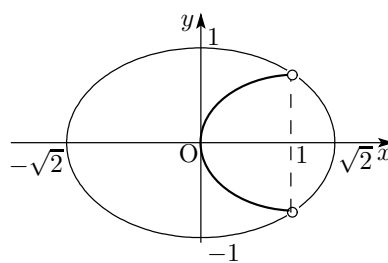
$$\text{「円 } : \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ の } 0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ の部分」}$$

である. 求める M の軌跡はこの円弧を x 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍した図形であるから

$$\text{「楕円 } (x-1)^2 + 2y^2 = 1 \text{ の } 0 \leq x < 1 \text{ の部分」}$$



〔図 1〕



〔図 2〕

2章 2次曲線 (2)

問題

【1】(1) 全体を x 軸方向に 1 だけ平行移動すると

$$\begin{cases} y^2 = -8(x+1) \rightarrow y^2 = -8x & \dots \textcircled{1} \\ \text{接点} : (-3, -4) \rightarrow \text{接点} : (-2, -4) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

放物線 ① の接点 ② における接線の方程式は

$$\begin{aligned} -4y &= -4(x-2) \\ \therefore x - y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

これを x 軸方向に -1 だけ平行移動して、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} (x+1) - y - 2 &= 0 \\ \therefore x - y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

<注>

$y^2 \rightarrow -4y$, $2x \rightarrow x-3$ の置き換えを与式にそのまま行うと

$$-4y = -4(x-3) - 8$$

これを整理すると、接線の方程式 $x - y - 1 = 0$ が得られる。

あるいは、接線の方程式を $y = m(x+3) - 4$ として、これと $y^2 = -8(x+1)$ より、 y を消去して得られる x の 2 次方程式が重解をもつことから、 m の値を求めてもよい。

(2) 与えられた楕円を $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \dots \textcircled{3}$ とし、接点の座標を (x_0, y_0) とおく。このとき、この点における ③ の接線は

$$\frac{x_0 x}{3} + \frac{y_0 y}{2} = 1 \dots \textcircled{4}$$

④ が点 $(-2, 0)$ を通ることから

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x_0 &= 1 \\ \therefore x_0 &= -\frac{3}{2} \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

一方、接点 (x_0, y_0) は ③ 上の点であるから

$$\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} = 1 \dots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥ より、 $x_0 = -\frac{3}{2}$, $y_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ を得るから、これらを ④ に代入して

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}y &= 1 \\ \therefore y &= \pm\sqrt{2}(x+2) \end{aligned}$$

【2】まず、 e に特定の値を代入せずに点 P の軌跡を表す方程式を求めてみよう。

$P(x, y)$ とすると、題意より

$$PF = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$PH = |x|$$

よって、 $e = \frac{PF}{PH}$ より

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = e|x|$$

辺々 0 以上であるから、2 乗しても同値で

$$(x-3)^2 + y^2 = e^2 x^2$$

$$\therefore (1-e^2)x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0 \dots \textcircled{1}$$

(1) ① において $e = 1$ とすると

$$y^2 - 6x + 9 = 0 \quad \therefore \text{放物線} : y^2 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

(2) ① において $e = \frac{1}{2}$ とすると

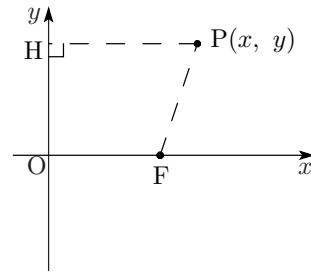
$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0 \iff 3x^2 + 4y^2 - 24x + 36 = 0$$

$$\therefore \text{楕円} : \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(3) ① において $e = 2$ とすると

$$-3x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0 \iff 3x^2 - y^2 + 6x - 9 = 0$$

$$\therefore \text{双曲線} : \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$



【3】 2接線の傾きを m , $-\frac{1}{m}$ ($m \neq 0$) とおくと, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ における 2接線の方程式は

$$\begin{cases} y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} & \dots \textcircled{1} \\ y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

と表される. ①より

$$y - mx = \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \dots \textcircled{3}$$

②より

$$my + x = \pm \sqrt{a^2 + b^2m^2} \dots \textcircled{4}$$

③, ④の両辺を平方して

$$\begin{aligned} y^2 - 2mxy + m^2x^2 &= a^2m^2 + b^2 \\ m^2y^2 + 2mxy + x^2 &= a^2 + b^2m^2 \end{aligned}$$

辺々を加えて

$$(1 + m^2)(x^2 + y^2) = (1 + m^2)(a^2 + b^2)$$

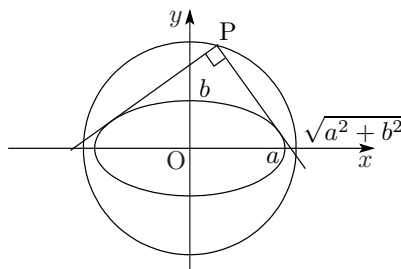
$1 + m^2 \neq 0$ より

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

これは, 原点を中心とする半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の円である ($m = 0$ のときも成り立つ).

《注》

この軌跡の円を楕円の準円という.



【4】(1) P から $y = x^2$ へ引いた 2 本の接線の接点を, それぞれ

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

とおく. このとき, 接線の方程式は, それぞれ

$$\frac{1}{2}(y + y_1) = x_1x, \quad \frac{1}{2}(y + y_2) = x_2x$$

となり, これらはともに点 P(1, -1) を通るから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-1 + y_1) &= x_1, & \frac{1}{2}(-1 + y_2) &= x_2 \\ \iff y_1 &= 2x_1 + 1, & y_2 &= 2x_2 + 1 \end{aligned}$$

これは A, B が直線 $y = 2x + 1$ 上にあることを表す. したがって, ℓ の方程式は

$$y = 2x + 1$$

(2) Q(a, b) は $y = 2x + 1$ 上にあるから

$$b = 2a + 1 \dots\dots \textcircled{1}$$

Q から引いた 2 本の接線の接点を $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$

とすると, 接線の方程式は

$$\frac{1}{2}(y + y_3) = x_3x, \quad \frac{1}{2}(y + y_4) = x_4x$$

であり, これらはともに Q(a, b) を通るから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(b + y_3) &= x_3a, & \frac{1}{2}(b + y_4) &= x_4a \\ \iff y_3 &= 2ax_3 - b, & y_4 &= 2ax_4 - b \end{aligned}$$

よって, 直線 m の方程式は $y = 2ax - b$ となり, $x = 1$ のとき

$$y = 2a - b = -1 \quad (\because \textcircled{1})$$

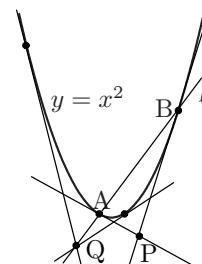
すなわち, m は P(1, -1) を通る.

【証明終】

<注>

(1) の直線 ℓ を「P に関する $y = x^2$ の極線」と呼ぶ.

また, 一般の 2 次曲線についても (2) のような性質が成り立つ.



【5】(1) $\frac{x^2}{5+k} + \frac{y^2}{3+k} = 1 \dots \textcircled{1}$ が点 (a, b) を通るとき

$$\frac{a^2}{5+k} + \frac{b^2}{3+k} = 1$$

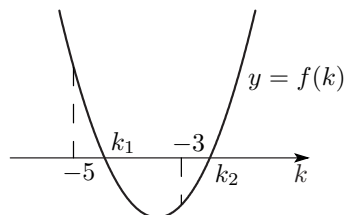
k について整理すると

$$\begin{aligned} a^2(3+k) + b^2(5+k) &= (5+k)(3+k) \\ \therefore k^2 - (a^2 + b^2 - 8)k - (3a^2 + 5b^2 - 15) &= 0 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

② の左辺を $f(k)$ とおくと, $ab \neq 0$ より

$$\begin{cases} f(-5) = 2a^2 > 0 \\ f(-3) = -2b^2 < 0 \end{cases}$$

よって, $f(k)$ のグラフは右図のようになるから,
② は異なる 2 つの実数解 k_1, k_2 ($k_1 < k_2$) をもち



$$-5 < k_1 < -3 < k_2$$

が成り立つ. ここで, $k = k_1$ のとき

$$5 + k_1 > 0, \quad 3 + k_1 < 0$$

よって, ① は双曲線となる.

一方, $k = k_2$ のとき

$$5 + k_2 > 0, \quad 3 + k_2 > 0$$

よって, ① は楕円となる.

以上より, 題意をみたす曲線は 2 つあって, その 1 つは楕円, 他の 1 つは双曲線である. 〔証明終〕

(2) (1) より, 2 曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{5+k_1} + \frac{y^2}{3+k_1} = 1, \quad \frac{x^2}{5+k_2} + \frac{y^2}{3+k_2} = 1$$

と表せ, これより, 交点 (a, b) におけるこれらの接線の方程式は

$$\frac{ax}{5+k_1} + \frac{by}{3+k_1} = 1, \quad \frac{ax}{5+k_2} + \frac{by}{3+k_2} = 1$$

よって, これらの法線ベクトル

$$\vec{\ell}_1 = \left(\frac{a}{5+k_1}, \frac{b}{3+k_1} \right), \quad \vec{\ell}_2 = \left(\frac{a}{5+k_2}, \frac{b}{3+k_2} \right)$$

が直交することを示せばよい. そこで, 2 つのベクトルの内積

$$\vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2 = \frac{a^2}{(5+k_1)(5+k_2)} + \frac{b^2}{(3+k_1)(3+k_2)} \dots \textcircled{3}$$

を考え, この値が 0 になることを示す. ② において, 解と係数の関係より

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = a^2 + b^2 - 8 \\ k_1 k_2 = -(3a^2 + 5b^2 - 15) \end{cases}$$

これを用いると

$$\begin{cases} (5+k_1)(5+k_2) = 25 + 5(k_1+k_2) + k_1k_2 = 2a^2 \\ (3+k_1)(3+k_2) = 9 + 3(k_1+k_2) + k_1k_2 = -2b^2 \end{cases}$$

であるから、これらを③に代入して

$$\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{-2b^2} = 0$$

よって、 \vec{l}_1, \vec{l}_2 は直交する。すなわち、交点における2曲線の接線は直交する。

〔証明終〕

3章 媒介変数表示

問題

【1】(1) $x = t^2 + 4t$, $y = t - 1$ より, t を消去して

$$x = (y + 1)^2 + 4(y + 1) = y^2 + 6y + 5$$

y はすべての実数を動くので, 求める曲線は

$$\text{放物線: } x = y^2 + 6y + 5$$

(2) $x = \frac{1}{1+t^2}$, $y = \frac{t^2}{1+t^2}$ より

$$x + y = \frac{1+t^2}{1+t^2} = 1$$

ここで, x の動く範囲は, $t^2 \geq 0$ から

$$0 < \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \quad \therefore 0 < x \leq 1$$

よって, 求める曲線は

$$\text{直線の一部: } x + y = 1 \quad (0 < x \leq 1)$$

(3) $x = 2 + 3 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$ より

$$\frac{x-2}{3} = \cos \theta, \quad \frac{y}{3} = \sin \theta$$

これらを $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \quad \therefore (x-2)^2 + y^2 = 9$$

θ はすべての実数を動くので

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad \therefore -3 \leq y \leq 3$$

よって, 求める曲線は

$$\text{円: } (x-2)^2 + y^2 = 9$$

(4) $x = 3 \cos \theta$, $y = -1 + 2 \sin \theta$ より

$$\frac{x}{3} = \cos \theta, \quad \frac{y+1}{2} = \sin \theta$$

これらを $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1 \quad \therefore \frac{x^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

θ はすべての実数を動くので

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \therefore -3 \leq x \leq 3$$

よって, 求める曲線は

$$\text{楕円: } \frac{x^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

(5) $x = \frac{3}{\cos\theta}$, $y = 4 \tan\theta$ より

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \frac{y}{4} = \tan\theta$$

これらを $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \quad \therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

θ が $\cos\theta \neq 0$ なる実数を動くとき, x の範囲は

$$x \leq -3 \quad \text{または} \quad 3 \leq x$$

よって, 求める曲線は

$$\text{双曲線: } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

【2】題意より，点 $(0, 1)$ を通る直線は y 軸に平行ではなく，かつ 2 直線 $y = \pm 2x - 1$ にも平行でもないから

$$y = mx + 1 \quad (\text{ただし, } m \neq \pm 2) \cdots \textcircled{1}$$

とおける． $\textcircled{1}$ と直線 $y = 2x - 1$ との交点を P とおくと

$$P \left(\frac{2}{2-m}, \frac{2+m}{2-m} \right)$$

同様に， $\textcircled{1}$ と直線 $y = -2x - 1$ との交点を Q とおくと

$$Q \left(\frac{-2}{2+m}, \frac{2-m}{2+m} \right)$$

であるから，求める中点 (X, Y) は

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2-m} + \frac{-2}{2+m} \right) = \frac{2m}{4-m^2} \cdots \textcircled{2} \\ Y = \frac{1}{2} \left(\frac{2+m}{2-m} + \frac{2-m}{2+m} \right) = \frac{4+m^2}{4-m^2} \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

そこで， $\textcircled{2}$ ， $\textcircled{3}$ よりパラメータ m を消去すると

$$\begin{aligned} 4X^2 - Y^2 &= 4 \left(\frac{2m}{4-m^2} \right)^2 - \left(\frac{4+m^2}{4-m^2} \right)^2 \\ &= \frac{16m^2 - (4+m^2)^2}{(4-m^2)^2} \\ &= \frac{-(4-m^2)^2}{(4-m^2)^2} = -1 \end{aligned}$$

よって，中点 M は

$$\text{双曲線: } 4x^2 - y^2 = -1$$

上にある．

〈注〉

中点 M の正確な軌跡を求めてみよう． $\textcircled{3}$ より

$$Y = \frac{4+m^2}{4-m^2} = \frac{8}{4-m^2} - 1$$

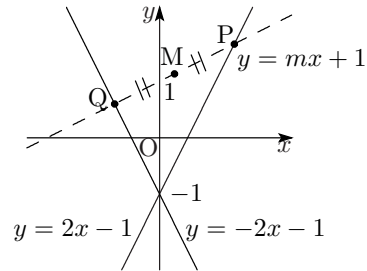
であり， m が $m \neq \pm 2$ なる実数を動くとき

$$4 - m^2 \leq 4 \quad \text{かつ} \quad 4 - m^2 \neq 0 \quad \therefore Y \geq 1 \quad \text{または} \quad Y < -1$$

よって，中点の軌跡は

$$\text{双曲線: } 4x^2 - y^2 = -1 \quad (\text{ただし, 点 } (0, -1) \text{ を除く})$$

となる．



- 【3】 (1) $\begin{cases} y = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ x = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$ より, $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - x^2}$ であるから, 2式から θ を消去すると

$$y = \pm 2x\sqrt{1-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

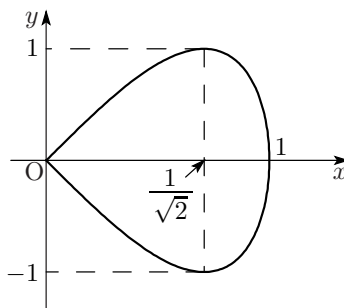
このグラフは $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) とそれを x 軸で折り返したグラフをあわせたものである.

$$y' = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

より, 増減表は下表のようになる.

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$...	1
y'		+	0	-	
y	0	↗	1	↘	0

よって, 求めるグラフは右図のようになる.



- (2) $x = \sin \theta, y = \sin 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) より

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2 \cos 2\theta$$

であるから

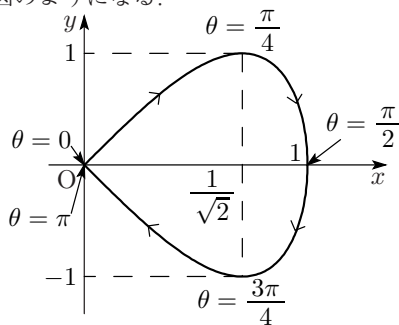
θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π
$\frac{dx}{d\theta}$		+	+	+	0	-	-	-	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	0	+	
(x, y)	(0, 0)	↗	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$	↘	(1, 0)	↙	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$	↖	(0, 0)

また, $x = x(\theta) = \sin \theta, y = y(\theta) = \sin 2\theta$ とおくと

$$x(\theta) = x(\pi - \theta), y(\theta) = -y(\pi - \theta)$$

が成り立つので, グラフは x 軸に関して対称である.

以上から, 求めるグラフは下図のようになる.



【4】(1) 与えられた点 (x, y) のパラメータ表示を

$$\begin{cases} x = t^2 + \frac{1}{t^2} + 1 & \dots \textcircled{1} \\ y = \frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) + 2 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

とおくと、 $\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2t^2 + 5 \\ \therefore t^2 &= \frac{x + 2y - 5}{2} & \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

また、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より

$$x - 1 = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad 2(y - 2) = t^2 - \frac{1}{t^2}$$

であるから、これらより t を消去すると

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 &= \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right)^2 - \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right)^2 = 4 \\ \therefore \frac{(x - 1)^2}{4} - (y - 2)^2 &= 1 & \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

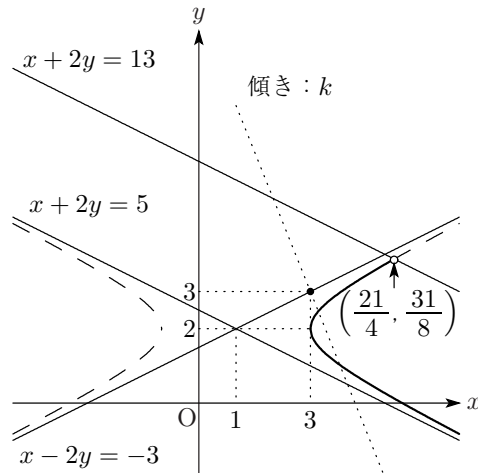
一方、 $0 < |t| < 2$ より $0 < t^2 < 4$ であるから、 $\textcircled{3}$ より

$$\begin{aligned} 0 < \frac{x + 2y - 5}{2} < 4 \\ \therefore 5 < x + 2y < 13 & \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

よって、点 (x, y) が動いてできる曲線の方程式は、

「 $\textcircled{4}$ かつ $\textcircled{5}$ 」

で与えられ、これを図示すると、図の太実線のようになる。



(2) 漸近線の1つ $x + 2y = 5$ の傾きは $-\frac{1}{2}$ である。

よって、上図より、題意を満たすような直線の傾き k の範囲は、

$$k < -\frac{1}{2}$$

【5】(1)

$$x = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \sin \theta \quad \cdots \textcircled{1}, \quad y = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \sin \theta \quad \cdots \textcircled{2}$$

① + ② より

$$x + y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta$$

② - ① より

$$y - x = 2 \sin \theta$$

であるから、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $X = x + y$ 、 $Y = y - x$ は、楕円 $\frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 = 1$ のパラメータ表示になっている。

ここで、 C を X 、 Y で表すことを考える。

$$X^2 - Y^2 = (x + y)^2 - (y - x)^2 = 4xy \quad \therefore xy = \frac{X^2 - Y^2}{4}$$

であるから、 $C : x^2 + xy + y^2 = 1$ を変形して

$$(x + y)^2 - xy = 1$$

これより、 X 、 Y で表すと

$$X^2 - \frac{X^2 - Y^2}{4} = 1 \quad \therefore \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 = 1$$

となる。

したがって、上の議論を逆にたどることにより

$$X = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta (= x + y), \quad Y = 2 \sin \theta (= y - x) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とパラメータ表示できる。

〔証明終〕

(2) $-1 < x < y < 1$ を θ で表すと

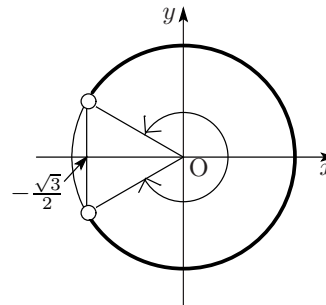
$$-1 < \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \sin \theta < \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \sin \theta < 1$$

最左辺より

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \sin \theta \\ \iff -1 &< \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \\ \iff -\frac{\sqrt{3}}{2} &< \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}\pi + 2n\pi &< \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \quad (n : \text{整数}) \\ \therefore -\frac{7}{6}\pi + 2n\pi &< \theta < \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n : \text{整数}) \end{aligned}$$



$0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi \quad \dots \textcircled{3}$$

また、真ん中の不等式より

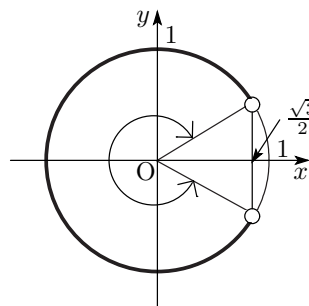
$$\sin \theta > 0$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$0 < \theta < \pi \quad \dots \textcircled{4}$$

さらに、最右辺より

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \sin \theta &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) &< 1 \\ \Leftrightarrow \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) &< \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



よって

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} + 2n\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \quad (n: \text{整数}) \\ \therefore \frac{\pi}{2} + 2n\pi < \theta < \frac{13}{6}\pi + 2n\pi \quad (n: \text{整数}) \end{aligned}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi \quad \dots \textcircled{5}$$

したがって、 $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ より、求める範囲は

$$0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$

4章 複素数平面 (1)

問題

【1】

$$\begin{aligned}
 |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) = (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\
 &= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} \\
 |\alpha\bar{\beta} + 1|^2 &= (\alpha\bar{\beta} + 1)(\overline{\alpha\bar{\beta} + 1}) = (\alpha\bar{\beta} + 1)(\bar{\alpha}\bar{\beta} + 1) \\
 &= (\alpha\bar{\beta} + 1)(\bar{\alpha}\bar{\beta} + 1) = \alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\beta} + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} + 1 \\
 &= |\alpha|^2|\beta|^2 + 1 + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} \\
 |\alpha\bar{\beta} + 1|^2 - |\alpha + \beta|^2 &= |\alpha|^2|\beta|^2 + 1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2 \\
 &= (|\alpha|^2 - 1)(|\beta|^2 - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &|\alpha| > 1, |\beta| > 1 \text{ より} \\
 &|\alpha\bar{\beta} + 1|^2 - |\alpha + \beta|^2 > 0 \\
 \therefore &|\alpha\bar{\beta} + 1| > |\alpha + \beta|
 \end{aligned}$$

【2】 $z^2 + \frac{9}{z} + 5$ が純虚数なので

$$\begin{aligned}
 \overline{z^2 + \frac{9}{z} + 5} &= -z^2 - \frac{9}{z} - 5 \\
 \bar{z}^2 + \frac{9}{z} + 5 &= -z^2 - \frac{9}{z} - 5
 \end{aligned}$$

ここで, $z\bar{z} = |z|^2 = \frac{9}{2}$ より

$$\frac{9}{z} = 2\bar{z} \quad \frac{9}{z} = 2z$$

$$\begin{aligned}
 \bar{z}^2 + 2z + 5 &= -z^2 - 2\bar{z} - 5 \\
 z^2 + \bar{z}^2 + 2(z + \bar{z}) + 10 &= 0 \\
 (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) + 10 &= 0 \\
 (z + \bar{z})^2 + 2(z + \bar{z}) + 1 &= 0 \\
 (z + \bar{z} + 1)^2 &= 0 \\
 \therefore z + \bar{z} &= -1
 \end{aligned}$$

$\bar{z} = -z - 1$ を $z\bar{z} = \frac{9}{2}$ に代入すると

$$\begin{aligned}
 z(-z - 1) &= \frac{9}{2} \\
 2z^2 + 2z + 9 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore z &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}i}{2} \\ z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}i}{2} \text{ のとき } z^2 + \frac{9}{z} + 5 &= \mp \frac{3}{2} \sqrt{17}i \neq 0 \text{ (複号同順) であるから} \\ z &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}i}{2} \end{aligned}$$

[3] $z^2 + 2z + \frac{1}{z}$ が実数なので

$$z^2 + 2z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z^2 + 2z + \frac{1}{z}\right)} = \bar{z}^2 + 2\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

これより

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + 2z + \frac{1}{z} - \bar{z}^2 - 2\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}} \\ &= (z - \bar{z})(z + \bar{z}) + 2(z - \bar{z}) + \frac{\bar{z} - z}{z\bar{z}} \\ &= (z - \bar{z})(z + \bar{z}) + (z - \bar{z}) \quad \because z\bar{z} = |z|^2 = 1 \\ &= (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) \end{aligned}$$

(i) $z - \bar{z} = 0$ のとき

z は実数で $z^2 + 2z + \frac{1}{z} < 0$, $|z| = 1$ より

$$z = -1$$

(ii) $z + \bar{z} + 1 = 0$ のとき

$z + \bar{z} = -1$, $z\bar{z} = 1$ より, z, \bar{z} は $t^2 + t + 1 = 0$ の 2 解なので

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

このとき $z^2 + z + 1 = 0$ より

$$z^2 = -z - 1$$

$$\therefore z^2 + 2z + \frac{1}{z} = -z - 1 + 2z + \bar{z} = -1 + z + \bar{z} = -2 < 0$$

より, 題意をみताす.

以上, まとめて

$$z = -1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

【4】(1) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
 であるから、求める点を z' とすると

$$z' = (3 + 2i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 + 2i)(1 + i)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

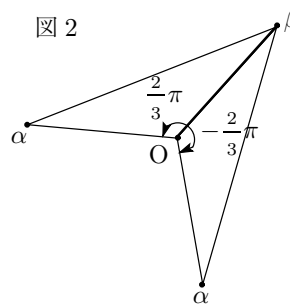
(2) $\beta \neq 0$ だから、辺々 β^2 で割ると

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \left\{ \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \cdot \beta$$

よって、点 α は図2のように点 β を $\pm \frac{2}{3}\pi$ 回転させたものである。ゆえに、三角形 $O\alpha\beta$ は、頂角が $\angle\alpha O\beta = \frac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形である。

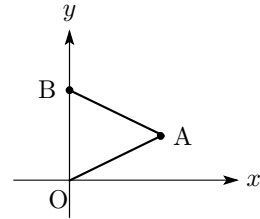


【5】△OAB は正三角形であるから

$$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

$\alpha = 2a + 1 + i$ の実部は $2a + 1 > 0$ であるから、点 $A(\alpha)$ は点 $B(\beta)$ を原点 O のまわりに $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} \\ &= 2i \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \sqrt{3} + i \end{aligned}$$



よって、 $2a + 1 = \sqrt{3}$ より

$$a = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

△OAC は直角二等辺三角形であるから、 $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ または $\angle AOC = \frac{\pi}{4}$ であるが、 $a > 0$ 、 $b > 0$ より $\angle AOC = \frac{\pi}{4}$ としてよい。

$$OC = \sqrt{2}OA \quad \text{または} \quad OC = \frac{1}{\sqrt{2}}OA$$

$OC = \sqrt{2}OA$ のとき

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{2}\alpha \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(\sqrt{3} + i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i \end{aligned}$$

これは $a = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ と矛盾するので不適。

$OC = \frac{1}{\sqrt{2}}OA$ のとき

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}i$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

△OAD は直角三角形であるから

$$OA^2 + OD^2 = AD^2 \quad \dots\dots ①$$

$$OA^2 + AD^2 = OD^2 \quad \dots\dots ②$$

$$OD^2 + AD^2 = OA^2 \quad \dots\dots ③$$

のいずれかが成り立つ。

$$OA^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$$

$$OD^2 = a^2 + c^2$$

$$\begin{aligned} AD^2 &= |\alpha - \delta|^2 = (2a + 1 - a)^2 + (1 - c)^2 \\ &= a^2 + 2a + 1 + c^2 - 2c + 1 \\ &= a^2 + c^2 + 2a - 2c + 2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}\text{のとき } 4 + a^2 + c^2 = a^2 + c^2 + 2a - 2c + 2$$

$$c = a - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-3}{2} < 0$$

これは $c > 0$ に反するので、不適.

$$\textcircled{2}\text{のとき } 4 + a^2 + c^2 + 2a - 2c + 2 = a^2 + c^2$$

$$c = a + 3 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 3 = \frac{\sqrt{3}+5}{2}$$

これは $c > 0$ に適する.

$$\textcircled{3}\text{のとき } a^2 + c^2 + a^2 + c^2 + 2a - 2c + 2 = 4$$

$$c^2 - c = -a^2 - a + 1$$

ここで、 $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ より $(2a+1)^2 = 3$ であるから

$$a^2 + a = \frac{1}{2}$$

$$c^2 - c = \frac{1}{2}$$

$$c > 0 \text{ より } c = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

このとき、 $b = c$ となって不適.

以上より

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, c = \frac{\sqrt{3}+5}{2}$$

5章 複素数平面 (2)

問題

【1】

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \frac{3^{12} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right)^{12}}{81^2 \left(\cos \frac{11}{6} \pi + i \sin \frac{11}{6} \pi \right)^2} \\
 &= \frac{3^{12} \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)}{3^8 \left(\cos \frac{11}{3} \pi + i \sin \frac{11}{3} \pi \right)} \\
 &= 3^4 \{ \cos(-3\pi) + i \sin(-3\pi) \} \\
 &= 3^4 \{ \cos \pi + i \sin \pi \} \\
 &= -81
 \end{aligned}$$

【2】 $(z^3 - \frac{1}{8}i)(z^4 + 16) = 0$ より

$$z^3 = \frac{1}{8}i \text{ または } z^4 = -16$$

$z^3 = \frac{1}{8}i$ のとき, $z = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ($r_1 > 0, 0 \leq \alpha < 2\pi$) とおくと

$$z^3 = r_1^3(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha)$$

$$\frac{1}{8}i = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \text{ より}$$

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} \\ 3\alpha = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m \text{ は整数}) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2m}{3}\pi \text{ より}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

$$z = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \\ \frac{1}{2} \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \\ \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right) = -\frac{1}{2}i \end{cases}$$

$z^4 = -16$ のとき, $z = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$ ($r_2 > 0, 0 \leq \beta < 2\pi$) とおくと

$$z^4 = r_2^4(\cos 4\beta + i \sin 4\beta)$$

$$-16 = 2^4(\cos \pi + i \sin \pi) \text{ より}$$

$$\begin{cases} r_2 = 2 \\ 4\beta = \pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}\pi \text{ より}$$

$$\beta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

$$z = \begin{cases} 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ 2 \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ 2 \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \\ 2 \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases}$$

以上より

$$z = -\frac{1}{2}i, \pm \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i, \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i, -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$$

[3] (1) $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ であるから

$$z + \bar{z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3}$$

$$z\bar{z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2}i \right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

(2) $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ と表せるから

$$z^6 = \cos \frac{6\pi}{6} + i \sin \frac{6\pi}{6} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

(3) (1) より $z\bar{z} = 1$, $z + \bar{z} = \sqrt{3}$ であるから

$$\begin{aligned} |z^2 + z + 1| &= |z^2 + z + z\bar{z}| \\ &= |z(z + 1 + \bar{z})| \\ &= |z| |z + \bar{z} + 1| \\ &= |z| |\sqrt{3} + 1| \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

(4) (2) より $z^6 = -1$ であるから

$$z^8 = z^6 \cdot z^2 = -z^2$$

$$z^7 = z^6 \cdot z = -z$$

$$\begin{aligned} & |z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1| \\ &= |-z^2 - z - 1 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1| \\ &= |z^5 + z^4 + z^3| \\ &= |z^3(z^2 + z + 1)| \\ &= |z^3| |z^2 + z + 1| \\ &= |z|^3 |z^2 + z + 1| \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

【4】

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} + i)^m = (1 + i)^n \\ \Leftrightarrow & \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right\}^m = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^n \\ \Leftrightarrow & 2^m \left\{ \cos \left(\frac{m}{6} \pi \right) + i \sin \left(\frac{m}{6} \pi \right) \right\} = (\sqrt{2})^n \left\{ \cos \left(\frac{n}{4} \pi \right) + i \sin \left(\frac{n}{4} \pi \right) \right\} \\ \therefore & \begin{cases} 2^m = (\sqrt{2})^n \\ \frac{m}{6} \pi = \frac{n}{4} \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数}) \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} m = \frac{n}{2} \\ \frac{m}{6} \pi = \frac{n}{4} \pi + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

m を消去すると

$$\frac{\pi}{6} \times \frac{n}{2} = \frac{n}{4} \pi + 2k\pi$$

よって

$$n = -12k, \quad m = -6k$$

これが、与えられた方程式の一般解で、このうち n が最小の自然数となるのは $k = -1$ のときである。よって、求める m, n は

$$m = 6, \quad n = 12$$

【5】 (1) $z^5 - a^5 = (z - a)(z^4 + z^3a + z^2a^2 + za^3 + a^4)$

(2)
$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}\right)^5 &= \cos \frac{5}{10}\pi + i \sin \frac{5}{10}\pi \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

(3) $z = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$ について, (2) より

$$z^5 = i$$

$i^4 = 1$ であるから

$$z^5 = i^5$$

(1) の因数分解の結果を使うと

$$(z - i)(z^4 + z^3i + z^2i^2 + zi^3 + i^4) = 0$$

$$(z - i)(z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1) = 0$$

$z \neq i$ より

$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0$$

$z \neq 0$ だから両辺を z^2 で割ってよい.

$$z^2 + iz - 1 - \frac{i}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + i\left(z - \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

$t = z - \frac{1}{z}$ より, $z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 2 = t^2 + 2$ であるから

$$t^2 + it + 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}i$$

$t = z - \frac{1}{z} = z - \bar{z} = 2i \sin \frac{\pi}{10}$ であり, $\sin \frac{\pi}{10} > 0$ であるから

$$t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}i \text{ は不適}$$

$$t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}i \text{ は適する}$$

(4) (3) より

$$2i \sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}i$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

添削課題

【1】 $z^n = 1$ の1つの解を極形式を用いて

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

とおくと, $|z| = 1$ より

$$r = 1 \quad \therefore z = \cos \theta + i \sin \theta$$

$n = 2$ のとき

$$z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta = 1$$

したがって

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 1, \quad \sin 2\theta = 0 \\ \therefore \theta &= k\pi \quad (k \text{ は整数}) \\ \therefore z &= \pm 1 \quad (\text{図 1}) \end{aligned}$$

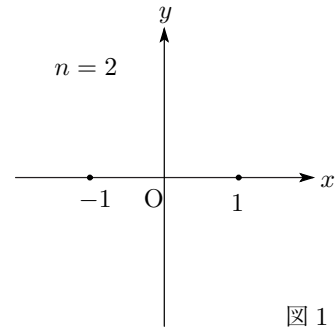


図 1

同様にして, $n = 3$ のとき

$$z = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (\text{図 2})$$

$n = 4$ のとき

$$z = \pm 1, \pm i \quad (\text{図 3})$$

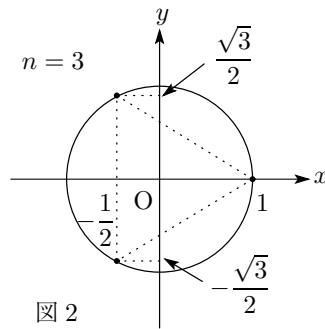


図 2

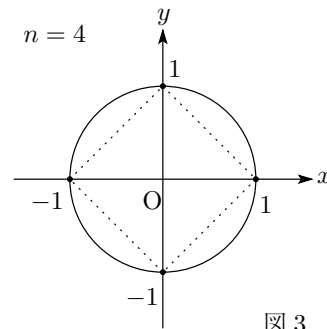
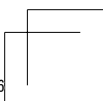
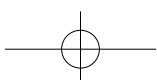
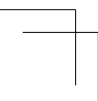
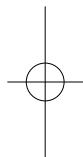
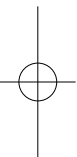
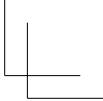
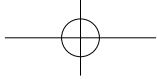
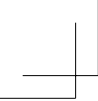
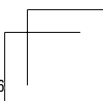
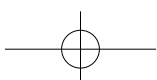
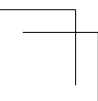
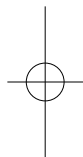
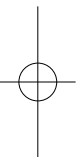
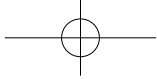
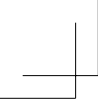


図 3





M2JCR
高2 東大理系数学Ⅲ 導入



会員番号	
------	--

氏名	
----	--

不許複製