M2T

冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高２難関大数学

～数学Ⅰ・A・Ⅱ・B総合演習～

問題

【1】持ち点が $+1$ となるのは $\dfrac{1}{3}$，-1 となるのは $\dfrac{2}{3}$ である．

(1) 持ち点と回数の変化をグラフに表すと，該当するのは，点 P に到達するときであり，その確率は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{4}{243}}\qquad(\text{答})$$

(2) 同様にして，D または E に到達するときを求めればよい．いずれの場合も，A → B → C と通過して D または E に向かう．

A → B となる確率 $P_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ は

$$P_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

であり，B → C となる確率 $P_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}}$ も同様に $\dfrac{4}{9}$ である．

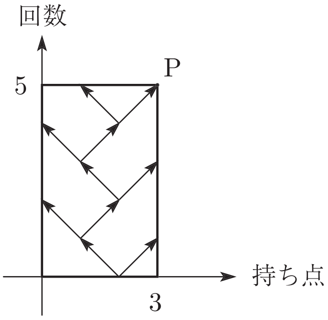
次に，C → D，C → E となる確率は，それぞれ

$$P_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},\qquad P_{\mathrm{C}\to\mathrm{E}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

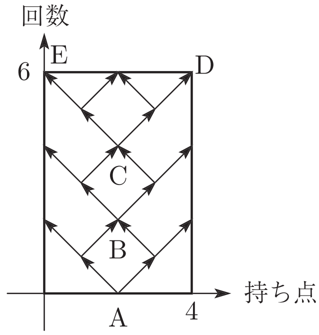
である．したがって，求める確率は

$$P_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\cdot P_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}}\cdot(P_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}}+P_{\mathrm{C}\to\mathrm{E}})=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)=\mathbf{\frac{80}{729}}\qquad(\text{答})$$

(1)



(2)



【2】(1) k 枚取り出す組み合わせは全部で ${}_{40}\mathrm{C}_k$ 通りである．このうち題意をみたすような取り出し方は，まず，どの数を 3 枚取り出すかで 10 通り，その数のカード 4 枚のうちどの 3 枚を取り出すかで ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り，残り $(k-3)$ 枚を取り出すが，残る 9 種類のカードのうちどの $(k-3)$ 種類を取り出すかで ${}_9\mathrm{C}_{k-3}$ 通り，各数のカード 4 枚のうちどれを取るかで 4^{k-3} 通りある．したがって，

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{10 \cdot {}_4\mathrm{C}_3 \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-3} \cdot 4^{k-3}}{{}_{40}\mathrm{C}_k} \\ &= \boldsymbol{\frac{10 \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-3} \cdot 4^{k-2}}{{}_{40}\mathrm{C}_k}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{10 \cdot \frac{9!}{(k-3)! \cdot (12-k)!} \cdot 4^{k-2}}{\frac{40!}{k! \cdot (40-k)!}} \\ &= \frac{10 \cdot 9!}{40!} \cdot \frac{k! \cdot (40-k)! \cdot 4^{k-2}}{(k-3)! \cdot (12-k)!} \\ f(k) &= \frac{\frac{(k-1)!(41-k)! \cdot 4^{k-3}}{(k-4)!(13-k)!}}{\frac{k!(40-k)! \cdot 4^{k-2}}{(k-3)!(12-k)!}} \\ &= \boldsymbol{\frac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{p(k-1)}{p(k)} - 1 &= \frac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)} - 1 \\ &= \frac{(41-k)(k-3) - 4k(13-k)}{4k(13-k)} \\ &= \frac{3k^2 - 8k - 123}{4k(13-k)} \\ &= \frac{(3k-8)k - 123}{4k(13-k)} \end{aligned}$$

この分母は正であるので，分子の正負を考える．

$(3k-8)k-123$ に $k=4$，5，6，7，8，$\cdots\cdots$ と代入していくと，4〜7 では負，8 以後では正とわかるから，

$4 \leqq k \leqq 7$ のとき，$p(k-1) < p(k)$

$8 \leqq k \leqq 12$ のとき，$p(k-1) > p(k)$

$$\begin{aligned} &p(3) < p(4) < \cdots\cdots < p(6) < p(7) \\ &p(7) > p(8) > p(9) > \cdots\cdots \end{aligned}$$

したがって，$p(k)$ を最大にする k は，**7** である．　　(答)

【3】(1) 1, a, b が等差数列をなすので,

$$2a = b + 1 \quad \cdots\cdots ① \quad （等差中項）$$

1, b^2, a^2 が等比数列をなすので,

$$b^4 = a^2 \quad \cdots\cdots ② \quad （等比中項）$$

② より,

$$(b^2 - a)(b^2 + a) = 0$$

(i) $a = b^2$ のとき, ① より,

$$\begin{aligned} & 2b^2 - b - 1 = 0 \\ \iff\ & (b-1)(2b+1) = 0 \\ \therefore\ & b = 1,\ -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって,

$$(a,\ b) = (1,\ 1),\ \left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2}\right)$$

(ii) $a = -b^2$ のとき, ① より,

$$2b^2 + b + 1 = 0$$

しかし, これを満たす実数 b は存在しない.

以上より,

$$\boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 1),\ \left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2}\right)} \quad （答）$$

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，

$$a_n = a + (n-1)d$$

等比数列 $\{b_n\}$ の初項を b，公比を r とすると，

$$b_n = br^{n-1} \quad (b \text{ と } r \text{ は 1 より大きい整数})$$

$c_1 = a_1 + b_1 = 2$，$c_2 = a_2 + b_2 = 5$，$c_3 = a_3 + b_3 = 17$ であるので，

$$\begin{cases} a + b = 2 & \cdots\cdots ① \\ a + d + br = 5 & \cdots\cdots ② \\ a + 2d + br^2 = 17 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

① から，

$$a = 2 - b$$

これを ② に代入して，

$$2 - b + d + br = 5$$
$$\therefore \quad d = 3 + b - br$$

これらを ③ に代入して，a，d を消去すると，

$$2 - b + 2(3 + b - br) + br^2 = 17$$
$$\therefore \quad b(1-r)^2 = 9$$

ここで，$b\ (>1)$ と $1-r$ はともに整数であるので，9 の約数を考えると，

$$b = 9, \quad (1-r)^2 = 1$$
$$\therefore \quad b = 9, \quad r = 2 \quad (\because r > 1)$$

よって，

$$a = -7, \quad d = -6$$
$$\therefore \quad a_n = -1 - 6n, \quad b_n = 9 \cdot 2^{n-1}$$

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和は $\dfrac{n(-8-6n)}{2}$，
数列 $\{b_n\}$ の第 n 項までの和は $9(2^n - 1)$ であるので，
数列 $\{c_n\}$ の第 n 項までの和は

$$\frac{n(-8-6n)}{2} + 9(2^n - 1) = \boldsymbol{9 \cdot 2^n - 3n^2 - 4n - 9} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とし，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする．

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
a_n: & 6 & & 24 & & 60 & & 120 & & 210 & & 336 & & 504 \\
b_n: & & 18 & & 36 & & 60 & & 90 & & 126 & & 168 & \\
c_n: & & & 18 & & 24 & & 30 & & 36 & & 42 & &
\end{array}$$

これより，数列 $\{c_n\}$ は，初項 18，公差 6 の等差数列で，

$$c_n = 18 + 6(n-1) = 12 + 6n$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\
&= 18 + \sum_{k=1}^{n-1}(12 + 6k) \\
&= 18 + 12(n-1) + 3n(n-1) \\
&= 3n^2 + 9n + 6 \\
&= 3(n^2 + 3n + 2) \quad (n \geqq 2)
\end{aligned}$$

この式に $n = 1$ を代入してみると，

$$b_1 = 3(1^2 + 3 \cdot 1 + 2) = 18$$

となり，$n = 1$ でも成立するので，

$$b_n = 3(n^2 + 3n + 2) \qquad (n \geqq 1)$$

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 6 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(k^2 + 3k + 2) \\
&= 6 + \frac{1}{2}(n-1)n(2n-1) + \frac{9}{2}(n-1)n + 6(n-1) \\
&= n^3 + 3n^2 + 2n \quad (n \geqq 2)
\end{aligned}$$

この式に $n = 1$ を代入してみると，

$$a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 6$$

となり，$n = 1$ でも成立するので，

$$\begin{aligned}
a_n &= n^3 + 3n^2 + 2n \quad (n \geqq 1) \\
&= \boldsymbol{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{（答）}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_n &= \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)\\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}\\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \text{（答）}\end{aligned}$$

■別解

$$4k(k+1)(k+2) = k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)$$

であることに着目すると，

$$k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

よって，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}\\ &= \frac{1}{4}[(1\cdot2\cdot3\cdot4-0\cdot1\cdot2\cdot3)+(2\cdot3\cdot4\cdot5-1\cdot2\cdot3\cdot4)+\cdots\cdots\\ &\qquad\qquad \cdots\cdots+\{n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)\}]\\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\end{aligned}$$

と求められる．

【5】与えられた数列を，

$$1,\ \mid 2,\ 1 \mid 3,\ 2,\ 1 \mid 4,\ 3,\ 2,\ 1 \mid \cdots\cdots$$

と群に分け，それを第 1 群，第 2 群 $\cdots\cdots$ と呼ぶことにする．

(1) $a_{n+1}-a_n>24$，つまり，連続する 2 項の差が初めて 24 より大きくなるのは，

$$\cdots\cdots,\ 2,\ 1 \mid 26,\ 25,\ \cdots\cdots$$

となるときであり，a_n は第 25 群の末項の 1 である．
これが初めから数えて何項目にあるかというと，

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots\cdots+25 &= \frac{(1+25)\cdot 25}{2} \\ &= 325 \end{aligned}$$

したがって，

$$n=\mathbf{325} \qquad \text{（答）}$$

(2) (1) を参照して，a_{337} は第 26 群の $337-325=12$ 項目であることが分かる．よって，

$$26-12+1=\mathbf{15} \qquad \text{（答）}$$

＜注意＞
本来は，a_{337} が n 群にあるとすると，

$$\frac{n(n-1)}{2}<337 \leqq \frac{n(n+1)}{2}$$

となるので，これより n を求める．

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{337} a_k &= \sum_{k=1}^{25} \frac{k(k+1)}{2} + 26+25+\cdots\cdots+15 \\ &= \sum_{k=1}^{26} \frac{k(k+1)}{2} - \frac{14(14+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{26} k^2 + \sum_{k=1}^{26} k\right) - 7\cdot 15 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\cdot 26\cdot 27\cdot 53 + \frac{1}{2}\cdot 26\cdot 27\right) - 105 \\ &= \frac{14}{3}\cdot 26\cdot 27 - 105 \\ &= \mathbf{3171} \qquad \text{（答）} \end{aligned}$$

【6】(1)

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} k &= \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{l(l+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}(l^2+l) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+\frac{1}{2}m(m+1)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sum_{m=1}^{n}m(m+1)(2m+1+3) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{m=1}^{n}m(m+1)(m+2) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{m=1}^{n}(m^3+3m^2+2m) \\
&= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{3}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{2}{2}n(n+1)\right\} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)} \quad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}3^{k-1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) &= \sum_{k=0}^{n}3^{k-1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{k-1}}{2^k} \\
&= \frac{3^n-3^{-1}}{2}+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&= \frac{3^n}{2}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{3^n}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{5}{6}} \quad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\frac{1}{k!(k+2)} = \frac{k+1}{k!(k+1)(k+2)} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}
$$

よって，与式 $= S$ とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right\} \\
&= \left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}} \quad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

問題

【1】(1) a_{n+1} と a_n を x におきかえた方程式

$$x + 2x + 1 = 0$$

を解くと，$x = -\dfrac{1}{3}$ である．よって，与えられた漸化式を変形して，

$$a_{n+1} + \frac{1}{3} = -2\left(a_n + \frac{1}{3}\right)$$

となる．したがって，数列 $\left\{a_n + \dfrac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$，公比 -2 の等比数列であるので，

$$a_n + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n = \frac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1} - \frac{1}{3}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\{(-2)^{n+1} - 1\}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた漸化式において，$b_n = na_n$ とおくと，

$$b_{n+1} + 2b_n + 1 = 0$$

また，$b_1 = 1\cdot a_1 = 1$ であるので，(1) より，

$$b_n = \frac{1}{3}\{(-2)^{n+1} - 1\}$$

$$\therefore\quad a_n = \boldsymbol{\frac{1}{3n}\{(-2)^{n+1} - 1\}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 与えられた漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} + 2\cdot\frac{a_n}{n} + 1 = 0$$

ここで，$c_n = \dfrac{a_n}{n}$ とおくと，

$$c_{n+1} + 2c_n + 1 = 0$$

また，$c_1 = \dfrac{a_1}{1} = 1$ であるので，(1) より，

$$c_n = \frac{1}{3}\{(-2)^{n+1} - 1\}$$

$$\therefore\quad a_n = \boldsymbol{\frac{n}{3}\{(-2)^{n+1} - 1\}} \qquad \text{(答)}$$

(4) $a_1 = 1 \fallingdotseq 0$，また，$a_k \fallingdotseq 0$ であるならば，漸化式から $a_{k+1} \fallingdotseq 0$

よって，常に $a_n \fallingdotseq 0$

与えられた漸化式の両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 - \frac{5}{a_n}$$

$\dfrac{1}{a_n} = b_n$ とおくと，

$$b_{n+1} = 2 - 5b_n$$

よって，

$$\begin{aligned}
\left(b_{n+1} - \frac{1}{3}\right) &= -5\left(b_n - \frac{1}{3}\right) \\
b_n - \frac{1}{3} &= \left(b_1 - \frac{1}{3}\right) \cdot (-5)^{n-1} \\
b_n &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-5)^{n-1} \\
&= \frac{1 + 2(-5)^{n-1}}{3} \\
\therefore \quad a_n &= \boldsymbol{\frac{3}{1 + 2(-5)^{n-1}}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【2】(1) $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であるので，与えられた漸化式をずらしてみる．

$$S_{n+1} - 2S_n = 2n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots\cdots ①$$
$$S_n - 2S_{n-1} = 2(n-1) \quad (n \geqq 2) \quad \cdots\cdots ②$$

① − ② より，$n \geqq 2$ のとき，

$$(S_{n+1} - S_n) - 2(S_n - S_{n-1}) = 2$$
$$\therefore \quad a_{n+1} - 2a_n = 2 \quad (n \geqq 2) \quad \cdots\cdots ③$$

また，① で $n = 1$ とおくと，

$$(a_1 + a_2) - 2a_1 = 2$$
$$\therefore \quad a_2 = 2 \quad (\because a_1 = 0)$$

よって，③ は $n = 1$ のときも成り立つ．したがって，

$$\boldsymbol{a_{n+1} - 2a_n = 2} \quad \text{(答)}$$

(2) $a_{n+1} - 2a_n = 2$ を変形すると，

$$a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

であるから，

$$\begin{aligned} a_n + 2 &= (a_1 + 2) \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

したがって，

$$a_n = \boldsymbol{2^n - 2} \quad \text{(答)}$$

【3】(1) $a_n = 3^{2n} - 1$ ($n = 1$, 2, 3, $\cdots$) より,

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 3^{2(n+1)} - 1 \\
&= 3^{2n+2} - 1 \\
&= 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 \\
&= 9 \cdot 3^{2n} - 1 \\
&= 9(3^{2n} - 1) + 8 \\
&= 9a_n + 8
\end{aligned}
$$

よって,示された. （証明終）

(2) 数学的帰納法によって示す

(i) $n = 1$ のとき,

$$a_1 = 3^2 - 1 = 8 \quad (8 \text{ の倍数})$$

よって,$n = 1$ のとき,題意は成り立つ.

(ii) $n = k$ ($k \geqq 1$) のとき,題意が成り立つと仮定する.

すなわち,

$$a_k = (8 \text{ の倍数})$$

が成り立つと仮定する.このとき,(1) より,

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 9a_k + 8 \\
&= 9 \cdot (8 \text{ の倍数}) + 8 \\
&= (8 \text{ の倍数})
\end{aligned}
$$

よって,$n = k + 1$ のときも,題意は成り立つ.

以上 (i),(ii) より,すべての自然数 n に対して,題意が成り立つことが示された.

（証明終）

【4】(1) $n+1$ 回手順を繰り返した後に碁石が A_0 にあるのは,

(i) n 回手順を繰り返した後に碁石が A_1 にあり，奇数の目が出る.

(ii) n 回手順を繰り返した後に碁石が A_2 にあり，偶数の目が出る.

のいずれかである.

最初に碁石は A_0 にあるため，n 回手順を繰り返した後に A_1 にいる確率と A_2 にいる確率は帰納的に等しくなり,

$$\frac{1}{2}(1-P_n)$$

であるので,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{2}(1-P_n)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-P_n)\times\frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}P_n} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$$

であるので，数列 $\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$ は，初項が $P_1-\frac{1}{3}$ で公比が $-\frac{1}{2}$ の等比数列である.

よって,

$$P_n-\frac{1}{3}=\left(P_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$P_1=0$ であるので,

$$P_n=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 点 n に到達するのは,

「点 $n-2$ にいたときに裏が出る」　または　「点 $n-1$ にいたときに表が出る」

場合のどちらかである．したがって,

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}} \quad (n \geqq 3) \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の漸化式を 2 通りに変形すると,

$$\begin{cases} p_n - p_{n-1} = -\dfrac{1}{2}(p_{n-1} - p_{n-2}) & \cdots\cdots ① \\ p_n + \dfrac{1}{2}p_{n-1} = p_{n-1} + \dfrac{1}{2}p_{n-2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より,

$$p_n - p_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(p_2 - p_1) \quad \cdots\cdots ①'$$

②より,

$$p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = p_2 + \frac{1}{2}p_1 \quad \cdots\cdots ②'$$

$\{①' + ②' \times 2\} \div 3$ より,

$$p_n = \frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(p_2 - p_1) + 2\left(p_2 + \frac{1}{2}p_1\right)\right\} \quad \cdots\cdots ③$$

ここで，点 1 に到達するのは，1 回目に表が出たときのみで，点 2 に到達するのは，1 回目に裏が出るか，2 回続けて表が出るかなので,

$$p_1 = \frac{1}{2}, \qquad p_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

したがって，これらを③に代入して,

$$\boldsymbol{p_n = \frac{1}{3}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\right\}} \quad (n \geqq 3) \qquad \text{(答)}$$

【6】初めに平面と接していた面 (A とする) が n 回目の操作後，また平面と接する確率を p_n ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) とする．

ここで，面 A が $n+1$ 回目の操作後，また平面と接する確率 p_{n+1} を考える．

これが起こるのは，n 回目の操作後，面 A 以外の面が平面と接しており，次の操作後に平面と接していない 3 面のうち面 A が平面に接する場合である．

まず，n 回目の操作後，面 A 以外の面が平面と接している確率は，p_n の余事象を考えればよいから

$$1 - p_n$$

面 A 以外の面が平面と接している場合，次の操作後に面 A が平面と接する確率は

$$\frac{1}{3}$$

よって，

$$p_{n+1} = (1 - p_n) \times \frac{1}{3} \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

これは

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

と変形でき，これより

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(p_0 - \frac{1}{4}\right)$$

したがって，$p_0 = 1$ に注意すると

$$p_n = \boldsymbol{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】$a > 0$，$b > 0$ より

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \qquad (\because \text{相加・相乗平均の関係})$$
$$= \frac{2}{\sqrt{ab}}$$
$$= 2\sqrt{c} \qquad (\because \quad abc = 1)$$

等号成立は

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a = b$$

のときである．

同様に

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \frac{2}{\sqrt{bc}} = 2\sqrt{a} \qquad (\text{等号成立は，}b = c\text{ のとき})$$
$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geqq \frac{2}{\sqrt{ca}} = 2\sqrt{b} \qquad (\text{等号成立は，}c = a\text{ のとき})$$

辺々加えると

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)$$
$$\therefore \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \qquad (\text{等号成立は，}a = b = c = 1\text{ のとき})$$

（証明終）

【2】(1) c が偶数であると仮定する．

すると，a，b，c は 1 以外の共通の約数をもたないことより，a，b はともに奇数である．

ここで，p，q，r を正の整数として

$$a = 2p - 1, \qquad b = 2q - 1, \qquad c = 2r$$

と表すことができる．これらを条件式に代入して

$$(2p-1)^2 + (2q-1)^2 = (2r)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(p^2 + q^2 - p - q) + 1 = 2r^2$$

この式は左辺が奇数，右辺が偶数となり，矛盾する．

よって，c は奇数である．　　（証明終）

(2) a, b がともに 3 の倍数でないと仮定する.

正の整数は, k を整数として 3 の倍数で区別すると

$$3k, \qquad 3k+1, \qquad 3k+2$$

の 3 種類ですべて表され, それらを 2 乗した数を考えると, それぞれ

$$3\cdot 3k^2, \qquad (3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1, \qquad (3k+2)^2 = 3(k^2+4k+1)+1$$

より, 3 で割ったときのあまりは

3 の倍数であるときは 0, 3 の倍数でないときは 1

である. したがって, a と b がともに 3 の倍数でないので, a^2+b^2 を 3 で割ったあまりは 2 である.

ところが, c^2 を 3 で割ったあまりは 0 または 1 としかなりえないので, 条件式に矛盾する.

よって, a, b の 1 つは 3 の倍数である.

（証明終）

(3) (1) と条件式より, a, b の一方が偶数, 一方が奇数である.

いま, a を偶数, b を奇数としても一般性は失われない.

a, b がともに 4 の倍数でないと仮定する.

すると, l, m, n を正の整数として

$$a = 4l-2, \qquad b = 2m-1, \qquad c = 2n-1$$

と表すことができる. これらを条件式に代入して

$$(4l-2)^2 + (2m-1)^2 = (2n-1)^2 \iff (4l-2)^2 = (2n-1)^2 - (2m-1)^2$$

ここで

$$(\text{左辺}) = 16l^2 - 16l + 4 = 4(4l^2-4l+1) = 4(2l-1)^2$$

$$(\text{右辺}) = \{(2n-1)+(2m-1)\}\{(2n-1)-(2m-1)\} = 4(n+m-1)(n-m)$$

であるから

$$(2l-1)^2 = (n+m-1)(n-m) \quad \cdots\cdots(*)$$

いま

$$(n+m-1)+(n-m) = 2n-1 : \text{奇数}$$

であるから, $n+m-1$, $n-m$ の一方は偶数, 一方は奇数である.

これにより, $(*)$ の右辺は偶数となるが, $(*)$ の左辺は奇数の 2 乗であるから奇数となり, 矛盾する.

よって, a, b の 1 つは 4 の倍数である. （証明終）

【3】任意の x, y, z について成立するので

$$x = y = z = 1$$

を代入してみる．

$$1 + 1 + 1 \leqq a\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$\therefore \quad a \geqq \sqrt{3}$$

導かれた条件は，必要条件であるから，十分性について確かめる．

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geqq 0$$

$$\therefore \ (x + y + z)^2 \leqq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\therefore \ x + y + z \leqq |x + y + z| \leqq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqq a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

となるから，すべての x, y, z において条件式をみたすので，十分性が確かめられた．

よって，a の最小値は

$\boldsymbol{\sqrt{3}}$　　(答)

【4】(1) $2^x>0$, $2^{-x}>0$ より，相加・相乗平均の関係を用いて

$$t=2^x+\frac{1}{2^x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}=2$$

等号成立条件は

$$2^x=2^{-x}\iff x=0$$

である．よって，t の最小値は

2　(答)

(2)
$$\begin{aligned}y&=(4^x+4^{-x})-6(2^x+2^{-x})\\&=\{(2^x+2^{-x})^2-2\}-6(2^x+2^{-x})\\&=(t^2-2)-6t\\&=\boldsymbol{t^2-6t-2}\qquad \boldsymbol{(t\geqq 2)}\end{aligned}$$
(答)

(3) $y=(t-3)^2-11$　$(t\geqq 2)$

より，$t=3$ のときに最小となり，その値は

−11　(答)

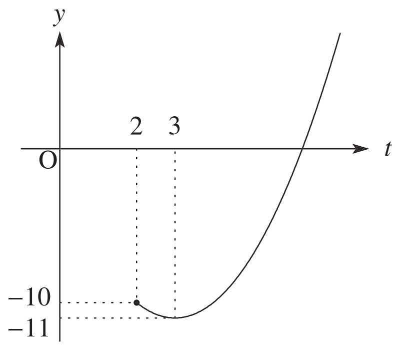
(4) $t=2^x+2^{-x}$ $(t\geqq 2)$ を 2^x の 2 次方程式として解くと

$$(2^x)^2-t\cdot 2^x+1=0$$

$$\therefore\ 2^x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

$t-\sqrt{t^2-4}>t-\sqrt{t^2}=0$ より

$$x=\log_2\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$



したがって，$t>2$ のもとで，t が 1 つ定まると x はそれに対応して 2 個存在し，$t=2$ のときは $x=0$ がただ 1 つ存在する．

$y=(t-3)^2-11$ (ただし，$t\geqq 2$) と $y=a$ のグラフの交点の個数を考えると

$$\begin{cases}a<-11\text{ のとき} & 0\\ a=-11,\ a>-10\text{ のとき} & 1\\ a=-10\text{ のとき} & 2\quad(\text{一方は，}t=2)\\ -11<a<-10\text{ のとき} & 2\end{cases}$$

であり，この 1 つの t に対して，x の値は 2 つ存在するので

$$\begin{cases}\boldsymbol{a<-11}\text{ のとき} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{a=-11,\ a>-10}\text{ のとき} & \mathbf{2}\\ \boldsymbol{a=-10}\text{ のとき} & \mathbf{3}\\ \boldsymbol{-11<a<-10}\text{ のとき} & \mathbf{4}\end{cases}$$
(答)

【5】(1) $x+y+z=1 \Longleftrightarrow z=1-(x+y)$ より

$$\begin{aligned} xy+yz+zx &= xy+(x+y)z \\ &= xy+(x+y)\{1-(x+y)\} \\ &= xy+(x+y)-(x+y)^2 \\ &= -x^2-(y-1)x-y^2+y \\ &= -\left(x+\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{(y-1)^2}{4}-y^2+y \\ &= -\left(x+\frac{y-1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(3y^2-2y-1) \\ &= -\left(x+\frac{y-1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

等号は

$$x+\frac{y-1}{2}=0 \text{ かつ } y-\frac{1}{3}=0 \iff x=y=z=\frac{1}{3}$$

のとき成り立つので，求める最大値は $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ (答)

(2)

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=1$$

であるから，(1) の結果を用いて

$$x^2+y^2+z^2=1-2(xy+yz+zx) \geqq 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

等号は $x=y=z=\frac{1}{3}$ のとき成り立つので，求める最小値は $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ (答)

【6】$\cos\theta = t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり，

$$\begin{aligned} x^2 - 4x\cos\theta - (2\sin^2\theta + \cos\theta + 1) &= x^2 - 4x\cos\theta + 2\cos^2\theta - \cos\theta - 3 \\ &= x^2 - 4xt + 2t^2 - t - 3 \end{aligned}$$

より，t の 2 次方程式 $2t^2 - (4x+1)t + x^2 - 3 = 0 \cdots$ ① が $-1 \leqq t \leqq 1$ において少なくとも 1 つの解をもつような x の範囲を求めればよい．

いま，①の判別式 $D = 8x^2 + 8x + 25$ は常に正である．

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^2 - (4x+1)t + x^2 - 3 \\ &= 2\left\{t - \left(x + \frac{1}{4}\right)\right\}^2 - \frac{1}{8}(8x^2 + 8x + 25) \end{aligned}$$

とおき，軸 $t = x + \dfrac{1}{4}$ の位置によって場合分けして考える．

(i) $x + \dfrac{1}{4} < -1 \iff x < -\dfrac{5}{4}$ のとき

$f(-1) \leqq 0 \leqq f(1)$ であればよいので，$f(-1) = x^2 + 4x$，$f(1) = x^2 - 4x - 2$ より，

$$-4 \leqq x \leqq 2 - \sqrt{6}$$

$x < -\dfrac{5}{4}$ と合わせて，$-4 \leqq x < -\dfrac{5}{4}$

(ii) $-1 \leqq x + \dfrac{1}{4} \leqq 1 \iff -\dfrac{5}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき

$f(-1) \geqq 0$ または $f(1) \geqq 0$ であればよいので，

$$x \leqq 2 - \sqrt{6},\ 0 \leqq x$$

$-\dfrac{5}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ と合わせて，$-\dfrac{5}{4} \leqq x \leqq 2 - \sqrt{6}$，$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$

(iii) $x + \dfrac{1}{4} > 1 \iff x > \dfrac{3}{4}$ のとき

$f(1) \leqq 0 \leqq f(-1)$ であればよいので，

$$0 \leqq x \leqq 2 + \sqrt{6}$$

$x > \dfrac{3}{4}$ と合わせて，$\dfrac{3}{4} < x \leqq 2 + \sqrt{6}$

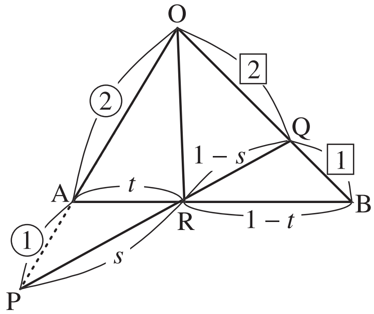
以上，(i)～(iii) より，求める x のとる値の範囲は，

$$\boldsymbol{-4 \leqq x \leqq 2 - \sqrt{6},\quad 0 \leqq x \leqq 2 + \sqrt{6}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) AR : RB $= t : (1-t)$,　PR : RQ $= s : (1-s)$

とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad \cdots\cdots ①$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$= \frac{3}{2}(1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

① と ② は等しく，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ だから，

$$\begin{cases} 1-t = \dfrac{3}{2}(1-s) & \cdots\cdots ③ \\ t = \dfrac{2}{3}s & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③, ④ を解いて，

$$t = \frac{2}{5}, \qquad s = \frac{3}{5}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}} \qquad \text{（答）}$$

(2)

$$\mathrm{PR} : \mathrm{RQ} = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} = \boldsymbol{3 : 2} \qquad \text{（答）}$$

【2】

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OA}\right| = 1 & \cdots\cdots ① \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ② \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 & \cdots\cdots ③ \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|} & \cdots\cdots ④ \\ \text{A, B, C は同一直線上} & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

①, ③ より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - 1 = 0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1 \quad \cdots\cdots ⑥$$

①, ②, ⑥ より

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2$$
$$= 1 - 2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = \frac{1}{9}$$
$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = \frac{10}{9}$$
$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{OB}\right| = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

④, ⑥ より

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{OC}\right| \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑤ より

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (t \text{ は実数})$$

と表され,

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + t\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = 1 - t + \frac{10}{9}t = \frac{1}{9}t + 1$$
$$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = (1-t)^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + 2t(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + t^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2$$
$$= (1-t)^2\cdot 1^2 + 2t(1-t)\cdot 1 + \frac{10}{9}t^2$$
$$= \frac{1}{9}t^2 + 1$$

したがって, ⑦ より

$$\left(\frac{1}{9}t + 1\right)^2 = \frac{1}{9}t^2 + 1$$
$$\therefore\quad t(4t-9) = 0$$
$$\therefore\quad t = \frac{9}{4} \qquad (\because\quad t = 0 \text{ のとき A} = \text{C となり不適})$$

より

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{9}{4}\overrightarrow{OB}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16}$$

$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = \frac{5}{4}$$

以上より，$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\right)^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2} \qquad (\because\ ⑦)\\
&= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - 1}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{\frac{10}{9} - 1}\\
&= \mathbf{\frac{5}{24}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{t}{2}\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b}} \quad \text{(答)}$$

(2) (1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{t}{2}\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} \quad \cdots\cdots ①$$

I は ∠OAB の二等分線上にもあるから，s を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|}\right)$$
$$= s\left(\frac{\vec{b}-\vec{a}}{4} + \frac{-\vec{a}}{2}\right)$$
$$= -\frac{3}{4}s\vec{a} + \frac{s}{4}\vec{b}$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AI}}$$
$$= \left(1 - \frac{3}{4}s\right)\vec{a} + \frac{s}{4}\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①, ② より

$$\begin{cases} \dfrac{t}{2} = 1 - \dfrac{3}{4}s \\ \dfrac{t}{3} = \dfrac{s}{4} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} s = \dfrac{8}{9} \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}} \quad \text{(答)}$$

(3) k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\vec{a}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{IH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OI}}$$
$$= k\vec{a} - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}\right)$$
$$= \left(k - \frac{1}{3}\right)\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}$$

ここで

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$
$$\therefore \quad 4^2 = 2^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 3^2$$
$$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{3}{2}$$

IH⊥OA より，$\overrightarrow{\mathrm{IH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{IH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \left\{\left(k-\frac{1}{3}\right)\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}\\ &= \left(k-\frac{1}{3}\right)\left|\vec{a}\right|^2-\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}\\ &= \left(k-\frac{1}{3}\right)\cdot 2^2-\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\\ &= 4k-1\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad k=\frac{1}{4}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\vec{a}\qquad \text{(答)}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{IH}}=-\frac{1}{12}\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}=-\frac{1}{36}\left(3\vec{a}+8\vec{b}\right)$$

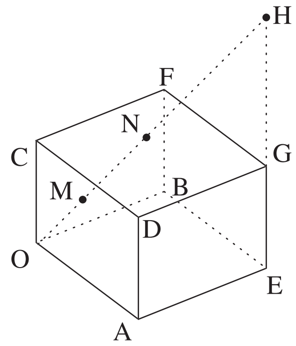
より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{IH}}\right|^2 &= \frac{1}{36^2}\left|3\vec{a}+8\vec{b}\right|^2\\ &= \frac{1}{36^2}\left\{9\left|\vec{a}\right|^2+48\vec{a}\cdot\vec{b}+64\left|\vec{b}\right|^2\right\}\\ &= \frac{1}{36^2}\left\{9\cdot 2^2+48\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+64\cdot 3^2\right\}\\ &= \frac{15}{36}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{IH}}\right|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{6}}\qquad \text{(答)}$$

【4】

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OE}} + \overrightarrow{\mathrm{EH}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} + 3\overrightarrow{\mathrm{EG}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$



△ABC に含まれる点 M は，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ 上にあるので，
①より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{OH}}\\ &= \alpha(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}) \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたす実数 p，q がある．
したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (1-p-q)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + p\overrightarrow{\mathrm{OB}} + q\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots ③$$

②, ③ は等しく，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-p-q = \alpha \\ p = \alpha \\ q = 3\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathbf{\frac{1}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \mathbf{\frac{1}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \mathbf{\frac{3}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \text{(答)}$$

平面 DEF 内の任意の点 P は，$l+m+n=1$ $\cdots$④ として, 次のように表せる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= l\overrightarrow{\mathrm{OD}} + m\overrightarrow{\mathrm{OE}} + n\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\ &= l(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) + m(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + n(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= (l+m)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (m+n)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (n+l)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ 上にあるので，①より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の係数比は 1 : 1 : 3 となるから，

$$\frac{l+m}{1} = \frac{m+n}{1} = \frac{n+l}{3} = k$$

とおける．したがって

$$\begin{cases} l+m = k \\ m+n = k \\ n+l = 3k \end{cases} \qquad \therefore \quad 2(l+m+n) = 5k$$

④を代入して

$$k = \frac{2}{5}$$

P と N が一致するので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \mathbf{\frac{2}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \mathbf{\frac{2}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \mathbf{\frac{6}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \text{(答)}$$

次に，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OH}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ であるから，

$$\begin{aligned} 5^2\left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + 9\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 \\ &= 4^2 + 3^2 + 9 \cdot 2^2 \\ &= 61 \end{aligned}$$

よって，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right| = \boldsymbol{\frac{\sqrt{61}}{5}} \qquad \text{（答）}$$

【5】(1) $\angle BAC = \theta$ とおくと，$\angle BDC$ を $\triangle ABD$ の外角として

$$\angle BDC = 2\theta$$

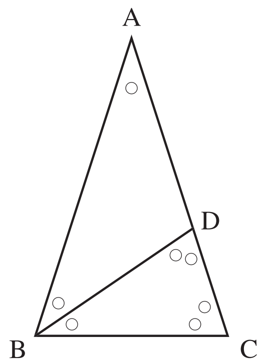
また，$BD = BC$ より，$\angle BCD = 2\theta$

$AB = AC$ より，$\angle ABC = 2\theta$

したがって，$\angle DBC = \theta$

$\triangle ABC$ の内角の和より

$$5\theta = 180^\circ \qquad \therefore\ \ \theta = \mathbf{36^\circ} \qquad \text{(答)}$$



(2) $\triangle BDC$ において，B から CD におろした垂線の足を H とすると

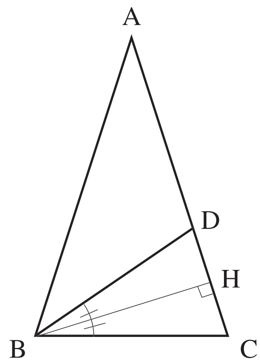
$$\angle CBH = \frac{\theta}{2} = 18^\circ$$

$BC = 1$ より，$\sin 18^\circ$ は CH の長さとして現れる．ここで，

$CH = x$ とおくと，$CD = 2x$ である．

$\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ より

$$\begin{aligned} AC : BC = BD : CD \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2x) : 1 = 1 : 2x \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x(1+2x) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4x^2 + 2x - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$



$CH = x > 0$ より，$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ であるから

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$ 〔証明終〕

(3)
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ここで

$$\begin{aligned} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} &= \sin\frac{108^\circ}{2} \qquad (\because\ \ \alpha+\beta = 180^\circ - 72^\circ) \\ &= \sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 2\cdot 18^\circ) = \cos(2\cdot 18^\circ) \\ &= 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \end{aligned}$$

より

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

いま，$0^\circ < \alpha < 108^\circ$，$0^\circ < \beta < 108^\circ$ であるから，$-108^\circ < \alpha - \beta < 108^\circ$ より

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha-\beta}{2} = 0^\circ \\ \alpha+\beta = 108^\circ \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta = 54^\circ$$

のとき最大となり，その値は，$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$．　(答)

【6】(1) $\mathrm{AM} = 6\sin 60^\circ = \mathbf{3\sqrt{3}}$ (答)

$\triangle$ABE において，余弦定理を用いて

$$\mathrm{AE}^2 = 6^2 + 2^2 - 2\cdot 6\cdot 2\cos 60^\circ = 28$$

$\therefore\ \mathrm{AE} = \mathbf{2\sqrt{7}}$ (答)

$\triangle$ECM において，余弦定理を用いて

$$\mathrm{EM}^2 = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos 60^\circ = 13$$

$\therefore\ \mathrm{EM} = \mathbf{\sqrt{13}}$ (答)

(2) $\triangle$AEM において，余弦定理を用いて

$$\cos\theta = \frac{\left(2\sqrt{7}\right)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2}{2\cdot 2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{6}}$$ (答)

(3) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

であるから

$$\triangle\mathrm{AEM} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{6} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{35}}{2}}$$ (答)

問題

【1】$y = f(x)$ 上の点 $(s,\ s^3)$ における接線は，$f'(x) = 3x^2$ より

$$y = 3s^2(x - s) + s^3$$
$$\therefore\quad y = 3s^2x - 2s^3 \quad \cdots\cdots ①$$

$y = g(x)$ 上の点 $(t,\ t^3 + 4)$ における接線は，$g'(x) = 3x^2$ より

$$y = 3t^2(x - t) + t^3 + 4$$
$$\therefore\quad y = 3t^2x - 2t^3 + 4 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② が一致するとして，

$$\begin{cases} 3s^2 = 3t^2 \\ -2s^3 = -2t^3 + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} s = \pm t \\ s^3 = t^3 - 2 \end{cases}$$

$s = t$ のとき，$t^3 = t^3 - 2$ となり，解なし．

$s = -t$ のとき，

$$-t^3 = t^3 - 2$$
$$\therefore\quad t^3 = 1$$
$$\therefore\quad t = 1$$
$$\therefore\quad (s,\ t) = (-1,\ 1)$$

よって，① より，$\boldsymbol{y = 3x + 2}$　（答）

【2】(1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + 45^\circ) = t$ とおくと，$-1 < t \leqq \sqrt{2}$ であり

$$(\sin x + \cos x)^2 = t^2$$
$$1 + 2\sin x\cos x = t^2$$
$$\therefore\quad \sin 2x = t^2 - 1$$

よって，与えられた関数に代入すると

$$y = 4(t^2 - 1)\cdot t + t$$
$$\therefore\quad y = 4t^3 - 3t$$

ここで，右辺を $f(t)$ $(-1 < t \leqq \sqrt{2})$ とおくと

$$f'(t) = 12t^2 - 3$$
$$= 3(2t + 1)(2t - 1)$$

より，$f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-1	↗	1	↘	-1	↗	$5\sqrt{2}$

よって

$$t = \sqrt{2}$$

つまり

$$x + 45^\circ = 90^\circ \iff \boldsymbol{x = 45^\circ}$$

のとき最大値 $\mathbf{5\sqrt{2}}$ をとる．　（答）

(2) (1) より最小値は -1 となり，$t = \dfrac{1}{2}$ のときだから

$$\sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ) = \frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad \sin(\theta + 45^\circ) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$0 \leqq \theta < 180^\circ \iff 45 \leqq \theta + 45^\circ < 225^\circ \quad \cdots\cdots ②$$

であり，①，②より

$$135^\circ < \theta + 45^\circ < 225^\circ$$

よって

$$\cos(\theta + 45^\circ) < 0$$

すなわち

$$\boldsymbol{\cos(\theta + 45^\circ) = -\frac{\sqrt{14}}{4}} \quad （答）$$

【3】(1) $f(x) = x^3 - ax$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 - a$ より，T_{P} は

$$
\begin{aligned}
& y = (3c^2 - a)(x - c) + c^3 - ac \\
\iff \quad & y = (3c^2 - a)x - 2c^3
\end{aligned}
$$

これと $y = f(x)$ を連立すると，

$$
\begin{aligned}
& x^3 - ax = (3c^2 - a)x - 2c^3 \\
\therefore \quad & x^3 - 3c^2x + 2c^3 = 0 \\
\therefore \quad & (x - c)^2(x + 2c) = 0 \\
\therefore \quad & x = c,\ -2c
\end{aligned}
$$

$f(-2c) = -8c^3 + 2ac$ であるから，

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{-2c},\ \boldsymbol{-8c^3 + 2ac}) \qquad \text{（答）}$$

(2) 直交する条件より，

$$
\begin{aligned}
& f'(c) \cdot f'(-2c) = -1 \\
\therefore \quad & (3c^2 - a)(12c^2 - a) = -1 \\
\therefore \quad & 36c^4 - 15ac^2 + a^2 + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

$c^2 = x$ とおくと，

$$36x^2 - 15ax + a^2 + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

さて，条件は ① を満たす異なる実数 c が 4 個存在することで，それは ①′ を満たす異なる正の x が 2 個存在することと同値である．

そこで，$g(x) = 36x^2 - 15ax + a^2 + 1$ とおき，この放物線を考えると，条件は

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} D > 0 \\ \dfrac{15a}{72} > 0 \quad \text{(軸について)} \\ g(0) > 0 \end{cases} \\
\therefore \quad & \begin{cases} (15a)^2 - 4 \cdot 36 \cdot (a^2 + 1) > 0 \\ a > 0 \\ a^2 + 1 > 0 \end{cases} \\
\therefore \quad & \begin{cases} 9a^2 > 16 \\ a > 0 \end{cases} \\
\therefore \quad & \boldsymbol{a > \frac{4}{3}} \qquad \text{（答）}
\end{aligned}
$$

【4】(1) (与式) $= \left[\dfrac{x^2}{2} - x\right]_0^2 = 2 - 2 = \mathbf{0}$　　(答)

(2) x^3, x は奇関数，x^2, 1 は偶関数であるから

$$(与式) = 2\int_0^3 (x^2+1)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = 2 \cdot 12 = \mathbf{24} \qquad (答)$$

(3) (与式) $= \displaystyle\int_{-4}^3 (x+4)(x-3)dx = -\frac{1}{6}\{3-(-4)\}^3 = \mathbf{-\frac{343}{6}}$　　(答)

(4) 与式を変形すると

$$\begin{aligned}(与式) &= -\int_0^1 x(x-1)dx + \int_1^2 x(x-1)dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \mathbf{1} \qquad (答)\end{aligned}$$

【5】 $f(x) = x^3 - (6+3t)x^2 + 18tx$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2(6+3t)x + 18t \\ &= 3\left\{x^2 - 2(2+t)x + 6t\right\} \end{aligned}$$

解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2(2+t) \\ \alpha\beta = 6t \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned} g(t) &= 3t^2 - 2(\alpha+\beta)t + \alpha^2 + \beta^2 \\ &= 3t^2 - 4(2+t)t + (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 3t^2 - 8t - 4t^2 + 4(2+t)^2 - 12t \\ &= 3t^2 - 4t + 16 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(t)dt &= \int_0^2 \left(3t^2 - 4t + 16\right) dt \\ &= \left[t^3 - 2t^2 + 16t\right]_0^2 \\ &= \mathbf{32} \qquad \text{（答）} \end{aligned}$$

【6】(1) 以下のように場合分けをする.

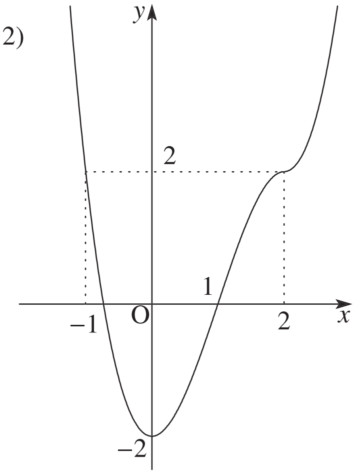
(i) $x \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_1^x 3t(t-2)dt \\ &= -\int_1^x (3t^2-6t)dt \\ &= -\left[t^3-3t^2\right]_1^x \\ &= -(x^3-3x^2)-2 \\ &= -x^3+3x^2-2 \\ f'(x) &= -3x^2+6x = -3x(x-2) \end{aligned}$$

(ii) $2 \leqq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_1^2 3t(t-2)dt + \int_2^x 3t(t-2)dt \\ &= -\left[t^3-3t^2\right]_1^2 + \left[t^3-3t^2\right]_2^x \\ &= 2+x^3-3x^2+4 \\ &= x^3-3x^2+6 \\ f'(x) &= 3x^2-6x = 3x(x-2) \end{aligned}$$

以上より，$y = f(x)$ のグラフは右のようになる.



≪注≫

$f(x) = \int_1^x 3t|t-2|dt$ を微分して

$$f'(x) = 3x|x-2|$$

としても，増減がわかる.

(2) (1) のグラフより，$f(x)$ の最小値は，

$$f(0) = \mathbf{-2} \qquad \text{（答）}$$

添削課題

【1】点 P $(k,\ k^2)$ $(0 < k < 1)$ とおくと，面積 S は次のように表される．

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^k (k^2 - x^2)dx + \int_k^1 (x^2 - k^2)dx \\ &= \left[k^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^k + \left[\frac{x^3}{3} - k^2 x\right]_k^1 \\ &= \left(k^3 - \frac{k^3}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - k^2\right) - \left(\frac{k^3}{3} - k^3\right) \\ &= \frac{4}{3}k^3 - k^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$S'(k) = 4k^2 - 2k = 2k(2k - 1)$$

よって，$0 < k < 1$ の範囲での増減表は次のようになる．

k	0		$\frac{1}{2}$		1
$S'(k)$	0	$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘		↗	

よって，S は P$\left(\mathbf{\frac{1}{2}},\ \mathbf{\frac{1}{4}}\right)$ のとき，最小値 $\mathbf{\frac{1}{4}}$ をとる．　　　(答)

M2T

高２難関大数学

～数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 総合演習～

Z-KAI

会員番号			氏　名	