

乙会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学

難関大理系数学 T



1章 実戦演習1

問題

【1】(1) $a^2 + b^2 = 16 \dots\dots ①, a^3 + b^3 = 44 \dots\dots ②$

①, ②において $a + b = u, ab = v$ とおくと

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 16 \dots\dots ①' \\ u^3 - 3uv = 44 \dots\dots ②' \end{cases}$$

ただし, a, b は2次方程式

$$t^2 - ut + v = 0$$

の2解であり, 仮定よりこれらは実数でなければならないから

$$u^2 - 4v \geq 0 \dots\dots ③$$

①' $\times 3u - ②' \times 2$ より, v を消去すると

$$3u^3 - 2u^3 = 48u - 88 \quad \therefore u^3 - 48u + 88 = 0$$

これを解いて

$$(u - 2)(u^2 + 2u - 44) = 0 \quad \therefore u = 2, -1 \pm \sqrt{45} \dots\dots ④$$

一方, ①' より $2v = u^2 - 16$ であるから, これを③に代入すると

$$u^2 - 2(u^2 - 16) \geq 0 \quad \therefore u^2 \leq 32 \dots\dots ⑤$$

ここで

$$(-1 \pm \sqrt{45})^2 = 46 \mp 2\sqrt{45} \geq 46 - 2\sqrt{45} > 46 - 2 \cdot 7 = 32$$

が成り立つことに注意すると, ④, ⑤を同時にみたす u の値は

$$u = 2 \quad \therefore a + b = 2 \quad (\text{答}) \dots\dots ⑥$$

(2) ⑥を①'に代入して, v の値を求めると

$$v = -6 \quad \therefore ab = -6 \dots\dots ⑦$$

さて, 自然数 n に関する数学的帰納法により

$$P_n = a^n + b^n \quad (n = 2, 3, 4, \dots\dots)$$

が4の倍数となることを示す.

まず, P_n がみたす漸化式を求める.

⑥, ⑦より, a, b は2次方程式 $t^2 - 2t - 6 = 0$ の2解であるから

$$a^2 - 2a - 6 = 0, \quad b^2 - 2b - 6 = 0$$

両辺にそれぞれ a^n, b^n をかけて

$$a^{n+2} - 2a^{n+1} - 6a^n = 0, \quad b^{n+2} - 2b^{n+1} - 6b^n = 0$$

辺々加えると

$$a^{n+2} + b^{n+2} - 2(a^{n+1} + b^{n+1}) - 6(a^n + b^n) = 0$$

$$\therefore P_{n+2} - 2P_{n+1} - 6P_n = 0 \dots\dots ⑧$$

(i) $n = 2, 3$ のとき, ①, ②より P_2, P_3 はいずれも4の倍数である.

(ii) $n = k, k + 1$ ($k \geq 2$) のとき, P_k, P_{k+1} はいずれも4の倍数であると仮定する. このとき, ⑧より $P_{k+2} = 2P_{k+1} + 6P_k$ も4の倍数となる.

以上 (i), (ii) より, 題意が示された. 〔証明終〕

《注》

一般に、 $P_n = p\alpha^n + q\beta^n$ (p, q, α, β は定数) で定義される P_n は、漸化式
 $P_{n+2} - (\alpha + \beta)P_{n+1} + \alpha\beta P_n = 0$
 をみたす。これは、(2) の解答と同様にして確かめられる。

[2] (1) 原点 $O(0, 0)$ と格子点 $P(a, b)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数を求める。

a と b の最大公約数を d とし

$$a = da', \quad b = db' \quad (a', b' \text{ は整数}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

とする。

線分 OP 上の格子点 (X, Y) は、 $bx - ay = 0$ 上にあり、 $aY = bX$ をみたす。

① より

$$a'Y = b'X$$

で a', b' が互いに素なので

$$X = a't, \quad Y = b't \quad (t \text{ は整数})$$

と表される。

よって、線分 OP 上の両端を除く格子点は

$$(a', b'), (2a', 2b'), \dots\dots, ((d-1)a', (d-1)b')$$

の $d-1$ 個ある。

したがって、 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ とすると、題意をみたすためには

$$\begin{cases} b_1 - a_1 \text{ と } b_2 - a_2 \text{ の最大公約数が偶数 } 2d \\ \text{かつ} \\ c_1 - a_1 \text{ と } c_2 - a_2 \text{ の最大公約数が偶数 } 2e \end{cases}$$

つまり、 l_1, l_2, m_1, m_2 を整数として

$$b_1 - a_1 = 2dl_1, \quad b_2 - a_2 = 2dl_2, \quad c_1 - a_1 = 2em_1, \quad c_2 - a_2 = 2em_2$$

と表すことができるから

$$b_1 - c_1 = 2(dl_1 - em_1), \quad b_2 - c_2 = 2(dl_2 - em_2)$$

と表すことができる。

B と C の x 座標、 y 座標の差の最大公約数も偶数となるので、線分 BC 上の端点を除く格子点は奇数個である。 〔証明終〕

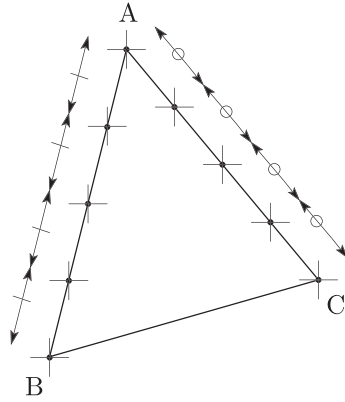
(2) (1) より、次の 2 つのベクトルは、整数 l, m, s, t (l と m, s と t は互いに素) を用いて

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4l \\ 4m \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4s \\ 4t \end{pmatrix}$$

と表される。よって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(16l^2 + 16m^2)(16s^2 + 16t^2) - (16ls + 16mt)^2} \\ &= 8|lt - ms| \end{aligned}$$

$|lt - ms|$ は整数より、 $\triangle ABC$ の面積は 8 の倍数である。 〔証明終〕



【3】 (1) $\angle B_n O C_n = \beta_n$, $\angle C_n O A_n = \gamma_n$ とおくと、右図より、

$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 2\pi & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n) & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{2}(\beta_n + \gamma_n) & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

①, ③より、

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \frac{1}{2}(2\pi - \alpha_n) \\ &= \pi - \frac{1}{2}\alpha_n \end{aligned}$$

$$\therefore \beta_n = \pi - \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$$

だから、これを②に代入して、

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\alpha_n + \pi - \frac{1}{2}\alpha_{n-1} \right)$$

$$\therefore 4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。 (証明終)

(2) ④より、

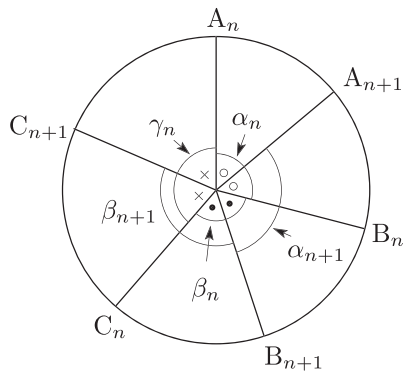
$$4\alpha_{n+2} - 2\alpha_{n+1} + \alpha_n = 2\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

⑤ $\times 2$ + ④ より、

$$8\alpha_{n+2} + \alpha_{n-1} = 6\pi$$

$$\therefore \alpha_{n+2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\alpha_{n-1}$$

(証明終)



(3) (2)の結果において n を $3n-2$ に置き換えると,

$$\alpha_{3n} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\alpha_{3(n-1)}$$

$$\therefore \alpha_{3n} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{8}\left(\alpha_{3(n-1)} - \frac{2}{3}\pi\right)$$

よって, 数列 $\left\{\alpha_{3n} - \frac{2}{3}\pi\right\}$ は公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列だから,

$$\alpha_{3n} - \frac{2}{3}\pi = \left(-\frac{1}{8}\right)^n \left(\alpha_0 - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\therefore \alpha_{3n} = \frac{2}{3}\pi + \left(-\frac{1}{8}\right)^n \left(\alpha_0 - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (\text{答})$$

【4】 (1)
$$\begin{cases} 2x + 3y = m & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ 2(-m) + 3m = m & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② より

$$2(x+m) + 3(y-m) = 0$$

$$\therefore 2(x+m) = -3(y-m)$$

2 と 3 は互いに素であるから, 整数 k を用いて

$$x+m = 3k, \quad y-m = -2k$$

$$\therefore x = 3k - m, \quad y = m - 2k$$

と表される. ここで, $x \geq 0, y \geq 0$ より

$$\frac{m}{3} \leq k \leq \frac{m}{2} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

である.

さて, $N(m)$ は③をみたす整数 k の個数に一致し, $N(m+6)$ は $\frac{m+6}{3} \leq k \leq$

$\frac{m+6}{2}$ をみたす整数 k の個数に一致する. ここで

$$\frac{m+6}{3} \leq k \leq \frac{m+6}{2}$$

$$\therefore \frac{m}{3} + 2 \leq k \leq \frac{m}{2} + 3$$

$$\therefore \frac{m}{3} \leq k-2 \leq \frac{m}{2} + 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

となり, $N(m+6)$ は④をみたす $k-2$ の個数と一致する. その個数は $N(m)$ より 1 つ多いから

$$N(m+6) = N(m) + 1$$

が成り立つ. 【証明終】

- (2) ③は $m = 0$ のとき, $0 \leq k \leq 0$ で, $N(0) = 1$.
 ③は $m = 1$ のとき, $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2}$ で, $N(1) = 0$.
 ③は $m = 2$ のとき, $\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{2}{2}$ で, $N(2) = 1$.
 ③は $m = 3$ のとき, $\frac{3}{3} \leq k \leq \frac{3}{2}$ で, $N(3) = 1$.
 ③は $m = 4$ のとき, $\frac{4}{3} \leq k \leq \frac{4}{2}$ で, $N(4) = 1$.
 ③は $m = 5$ のとき, $\frac{5}{3} \leq k \leq \frac{5}{2}$ で, $N(5) = 1$.

よって

$$N(m) = 1 - m + \left[\frac{m}{2} \right] + \left[\frac{2m}{3} \right] \dots\dots ⑤$$

は $0 \leq m \leq 5$ のとき成り立つ. ⑤がある m で成り立つと仮定すると (1) より

$$\begin{aligned} N(m+6) &= N(m) + 1 \\ &= 1 - m + \left[\frac{m}{2} \right] + \left[\frac{2m}{3} \right] + 1 \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} &1 - (m+6) + \left[\frac{m+6}{2} \right] + \left[\frac{2(m+6)}{3} \right] \\ &= 1 - m - 6 + \left[\frac{m}{2} + 3 \right] + \left[\frac{2m}{3} + 4 \right] \\ &= 1 - m - 6 + \left[\frac{m}{2} \right] + 3 + \left[\frac{2m}{3} \right] + 4 \\ &= 1 - m + \left[\frac{m}{2} \right] + \left[\frac{2m}{3} \right] + 1 \end{aligned}$$

となるから

$$N(m+6) = 1 - (m+6) + \left[\frac{m+6}{2} \right] + \left[\frac{2(m+6)}{3} \right]$$

となり, $m+6$ のときも成り立つ. したがって, 数学的帰納法により, 0以上の整数 m に対して⑤が成り立つことが証明された. 〔証明終〕

<別解>

$[x]$ は x の小数部分を切り上げた整数, $\lfloor x \rfloor$ は x の小数部分を切り捨てた整数を表すとする. x が整数のときは, $[x] = \lfloor x \rfloor$ である.

この記号を用いて解答すると, 次のようになる.

(1) ③を得るまでは同様.

③より

$$\left[\frac{m}{3} \right] \leq k \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

と書いて, これをみたす整数の k の個数 $N(m)$ は

$$N(m) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left[\frac{m}{3} \right] + 1$$

である.

よって

$$\begin{aligned} N(m+6) &= \left\lfloor \frac{m+6}{2} \right\rfloor - \left[\frac{m+6}{3} \right] + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{m}{2} + 3 \right\rfloor - \left[\frac{m}{3} + 2 \right] + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 3 \right) - \left(\left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + 2 \right) + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + 2 \\
&= N(m) + 1
\end{aligned}$$

(2) $[x]$ と $\lfloor x \rfloor$ は同じ記号である. よって

$$N(m) = 1 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor$$

が

$$N(m) = 1 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor - m$$

に一致することを示すためには

$$\left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor - m = - \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor$$

$$\iff \left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor - m = 0 \dots\dots \textcircled{6}$$

が成り立つことを示せばよい.

ここで, $m = 3l + r$ (l は整数で r は $0, 1, 2$ のいずれか) とおくと

$$\begin{aligned}
&\left\lfloor \frac{2m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor - m \\
&= \left\lfloor \frac{2(3l+r)}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3l+r}{3} \right\rfloor - (3l+r) \\
&= \left\lfloor 2l + \frac{2r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor l + \frac{r}{3} \right\rfloor - (3l+r) \\
&= 2l + \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor + l + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor - 3l - r \\
&= \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor - r
\end{aligned}$$

となり, $r = 0, 1, 2$ をそれぞれ代入すれば

$$\left\lfloor \frac{0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{0}{3} \right\rfloor - 0 = 0 + 0 - 0 = 0$$

$$\left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

となり, いずれの場合も 0 となるから, $\textcircled{6}$ は成り立つ.

以上より, 証明された.

【5】点 P の y 座標が整数 n のときの x 座標を x_n とおく. また, 点 $(x_n, n), (x_{n+1}, n+1)$

を結ぶ線分の傾きを a_n とおくと,

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = sa_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ゆえに

$$a_n = as^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

また,

$$a_n = \frac{(n+1) - n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{1}{x_{n+1} - x_n}$$

$a \neq 0, s \neq 0$ より

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{as^n}$$

ゆえに, $n \geq 1$ のとき

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{as^k} \quad (\because x_0 = 0)$$

数列 $\left\{ \frac{1}{as^n} \right\}$ は初項 $\frac{1}{a}$, 公比 $\frac{1}{s}$ の等比数列だから, 公比 $\frac{1}{s}$ について, $0 < \frac{1}{s} < 1$,

すなわち, $s > 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{s}} = \frac{s}{a(s-1)}$$

また, $\frac{1}{s} \geq 1$, すなわち, $0 < s \leq 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

したがって, 点 P の描く折れ線が直線

$$x = b \quad (b > 0)$$

を横切るための条件は, 次の (i) または (ii) である.

$$(i) \quad s > 1 \text{ かつ } \frac{s}{a(s-1)} > b \quad \therefore \quad s > ab(s-1) \quad (\because s-1 > 0, a > 0)$$

$$(ii) \quad 0 < s \leq 1 \text{ (かつ } a, b \text{ は任意正数)}$$

以上より, 求める条件は

$$\begin{cases} s > 1 \\ s > ab(s-1) \end{cases} \text{ または } 0 < s \leq 1 \quad (\text{答})$$

【6】

$$\sqrt{2n^2 - k^2} - 1 < [\sqrt{2n^2 - k^2}] \leq \sqrt{2n^2 - k^2}$$

なので

$$\frac{\sqrt{2n^2 - k^2} - 1}{n^2} < \frac{[\sqrt{2n^2 - k^2}]}{n^2} \leq \frac{\sqrt{2n^2 - k^2}}{n^2}$$

ここで

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2n^2 - k^2} - 1}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2n^2 - k^2} - 1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{2 - \frac{k^2}{n^2}} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 - \frac{k^2}{n^2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot n \\ &= \int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり①において $x = \sqrt{2} \sin \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2} \cos \theta, \quad x : 0 \rightarrow 1 \text{ のとき } \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

なので

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 - 2 \sin^2 \theta} \cdot \sqrt{2} \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2n^2 - k^2} - 1}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2n^2 - k^2}}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

なので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{[\sqrt{2n^2 - k^2}]}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (\text{答})$$

【7】 (1)

$$\begin{aligned}c_n &= (n+1) \int_0^1 x^n \cos \pi x dx = \int_0^1 (x^{n+1})' \cos \pi x dx \\&= [x^{n+1} \cos \pi x]_0^1 + \pi \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x dx \\&= -1 + \pi \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x dx = -1 + \pi \left\{ \frac{1}{n+2} \int_0^1 (x^{n+2})' \sin \pi x dx \right\} \\&= -1 + \frac{\pi}{n+2} \left([x^{n+2} \sin \pi x]_0^1 - \pi \int_0^1 x^{n+2} \cos \pi x dx \right) \\&= -1 + \frac{\pi}{n+2} \left([x^{n+2} \sin \pi x]_0^1 - \frac{\pi}{n+3} c_{n+2} \right) \\&= -1 - \frac{\pi^2}{(n+2)(n+3)} c_{n+2}\end{aligned}$$

よって

$$c_n + 1 = -\frac{\pi^2}{(n+2)(n+3)} c_{n+2} \quad (\text{答})$$

(2) (1) の計算の途中より

$$c_n + 1 = \pi \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x dx$$

したがって

$$\begin{aligned}|c_n + 1| &\leq \pi \int_0^1 x^{n+1} |\sin \pi x| dx \leq \pi \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{\pi}{n+2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n + 1| &= 0\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -1 \quad (\text{答})$$

(3) (1) より

$$\frac{c_{n+1} - c}{c_n - c} = \frac{c_{n+1} + 1}{c_n + 1} = \frac{(n+2)(n+3)}{(n+3)(n+4)} \cdot \frac{c_{n+3}}{c_{n+2}} = \frac{n+2}{n+4} \cdot \frac{c_{n+3}}{c_{n+2}}$$

よって, (2) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c}{c_n - c} = 1 \cdot \frac{-1}{-1} = 1 \quad (\text{答})$$

【8】(1) 正の整数 N に対し, $g(x) = x + \frac{N}{x}$ (x は正の実数) とおくと

$$g'(x) = 1 - \frac{N}{x^2} = \frac{(x + \sqrt{N})(x - \sqrt{N})}{x^2}$$

より, $g(x)$ の増減は次の表のようになる.

x	0	...	\sqrt{N}	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		\searrow	極小	\nearrow

これより $f(n) = g(n)$ は

$n \leq \sqrt{N}$ をみたす n について減少

$n \geq \sqrt{N}$ をみたす n について増加

であり k が正の整数のとき, $N = 2^k$ の正の約数は

$1, 2, 2^2, \dots, 2^k$

であるから

(i) k が偶数のとき $\sqrt{N} = 2^{\frac{k}{2}}$ は N の約数で

$$f(2^{\frac{k}{2}}) = 2^{\frac{k+2}{2}}$$

だから求める最小値は $2^{\frac{k+2}{2}}$ である.

(ii) k が奇数のとき $\sqrt{N} = 2^{\frac{k}{2}}$ 以下の最大の約数は $2^{\frac{k-1}{2}}$, \sqrt{N} 以上の最小の約数は $2^{\frac{k+1}{2}}$ で

$$f(2^{\frac{k-1}{2}}) = f(2^{\frac{k+1}{2}}) = 3 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$$

だから, 求める最小値は $3 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$ である.

(i), (ii) より求める最小値は

$$k \text{ が偶数のとき } 2^{\frac{k+2}{2}}, k \text{ が奇数のとき } 3 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \quad (\text{答})$$

(2) $N = 7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$ より

$$\sqrt{N} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = 12\sqrt{35}$$

ここで

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7, \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

はともに $N = 7!$ の約数であり, $70^2 = 4900 < 5040 < 72^2 = 5184$ より

$$70 < \sqrt{N} < 72$$

そして, 71 は $N = 7!$ の約数ではなく, $f(70) = f(72) = 142$ だから, 求める最小値は

$$142 \quad (\text{答})$$

【9】(1) $x_1 = f(x_0) = \sqrt{2}$ である。

まず、 $0 < x_n < 2$ を数学的帰納法を用いて示す。

(I) $n = 1$ のとき、 $0 < \sqrt{2} < 2$ より成り立つ。

(II) $n = k$ のとき成り立つと仮定すると

$$0 < x_k < 2$$

$$\therefore \sqrt{2} < \sqrt{x_k + 2} < 2 \text{ すなわち } \sqrt{2} < x_{k+1} < 2$$

よって、 $n = k + 1$ でも成り立つ。

(I), (II) より、 $n = 1, 2, \dots$ で $0 < x_n < 2$ が成り立つ。

次に、 $x_n < x_{n+1}$ を示す。 $n \geq 1$ において

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_n + 2 - x_n^2 = (2 - x_n)(x_n + 1) > 0 \quad (\because 0 < x_n < 2)$$

$$\therefore x_n^2 < x_{n+1}^2$$

$x_n > 0, x_{n+1} > 0$ より、 $x_n < x_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つ。

さらに、 $x_n > 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ を示す。 $n \geq 0$ において

$$2 - x_{n+1} = 2 - \sqrt{x_n + 2} = \frac{4 - (x_n + 2)}{2 + \sqrt{x_n + 2}} = \frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}} < \frac{1}{2}(2 - x_n)$$

これを繰り返し用いると、 $n \geq 1$ において

$$2 - x_n < \frac{1}{2}(2 - x_{n-1}) < \left(\frac{1}{2}\right)^2(2 - x_{n-2}) < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^n(2 - x_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって、 $x_n > 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つ。

以上より、題意は示された。 [証明終]

(2) $0 < x_n < 2$ より

$$2 - x_{n+1} = \frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}} > \frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{2 + 2}} = \frac{1}{4}(2 - x_n)$$

これを繰り返し用いると、 $n \geq 1$ において

$$\begin{aligned} 2 - x_n &> \frac{1}{4}(2 - x_{n-1}) > \left(\frac{1}{4}\right)^2(2 - x_{n-2}) > \dots \\ &> \left(\frac{1}{4}\right)^n(2 - x_0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n > \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

よって、 $x_n < 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つ。 [証明終]

(3) $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < x_n < 2$ とハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \sqrt{x_n + 2}} = \frac{1}{4}$$

$\alpha \leq \frac{1}{4}$ であることを背理法で示す。

$\alpha > \frac{1}{4}$ であると仮定すると、 $\{x_n\}$ が単調増加であることから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 + \sqrt{x_1 + 2}} &> \frac{1}{2 + \sqrt{x_2 + 2}} > \dots \\ &> \frac{1}{2 + \sqrt{x_{N-1} + 2}} > \alpha > \frac{1}{2 + \sqrt{x_N + 2}} > \dots \end{aligned}$$

をみたす自然数 N が存在する。

$\frac{1}{2 + \sqrt{x_N + 2}} = \beta (< \alpha)$ とおくと, $n > N$ のとき $\frac{1}{2 + \sqrt{x_n + 2}} < \beta$ となるので

$$2 - x_{n+1} = \frac{1}{2 + \sqrt{x_n + 2}}(2 - x_n) < \beta(2 - x_n)$$

これを繰り返し用いると, 十分大きい n に対して

$$2 - x_n < \beta(2 - x_{n-1}) < \beta^2(2 - x_{n-2}) < \cdots < \beta^{n-N-1}(2 - x_{N+1})$$

これと $2 - x_n > \alpha^n$ を合わせて

$$\alpha^n < \beta^{n-N-1}(2 - x_{N+1}) \quad \therefore \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n < \frac{2 - x_{N+1}}{\beta^{N+1}} \quad \dots\dots\dots (*)$$

右辺は定数であり, $\alpha > \beta$ より $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \infty$ となるから, 十分大きな自然数 n に対してこの不等式 (*) が成り立たない。

よって矛盾するため, $\alpha \leq \frac{1}{4}$ である。

(2) より $\alpha = \frac{1}{4}$ は題意をみたすので, 求める最大の α は

$$\frac{1}{4} \quad (\text{答})$$

2章 実戦演習2

問題

【1】(1) $k \geq 2$ のとき

$$a_{k^2} = \left[\sqrt{k^2} \right] = [k] = k$$

$$a_{k^2-1} = \left[\sqrt{k^2-1} \right] = \left[\sqrt{(k-1)^2} \right] = [k-1] = k-1$$

より

$$a_{k^2-1} < k \leq a_{k^2} \quad \dots\dots(*)$$

である.

ここで, $n \geq 1$ において, $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つので

$$a_n < k \leq a_{n+1}$$

をみたす n はただ 1 通りに定まる.

(*) より

$$b_k = k^2 - 1 \quad (k \geq 2)$$

これは, $k = 1$ のときも $b_1 = 0$ をみたすので

$$b_k = k^2 - 1 \quad (\text{答})$$

(2) すべての自然数 n に対して

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^n b_k = n^3 \quad \dots\dots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する.

(i) $n = 1$ のとき

$$a_1 + b_1 = 1 + 0 = 1 = 1^3$$

より成立する.

(ii) $n = l$ のとき, (*) が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{(l+1)^2} a_m + \sum_{k=1}^{l+1} b_k \\ &= \left(\sum_{m=1}^{l^2} a_m + \sum_{m=l^2+1}^{(l+1)^2-1} a_m + a_{(l+1)^2} \right) + \left(\sum_{k=1}^l b_k + b_{l+1} \right) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{l^2} a_m + \sum_{k=1}^l b_k \right) + \sum_{m=l^2+1}^{(l+1)^2-1} a_m + (l+1) + \{(l+1)^2 - 1\} \\ &= l^3 + \{(l+1)^2 - 1 - l^2\} \cdot l + (l+1) + (l^2 + 2l) \\ &= l^3 + 3l^2 + 3l + 1 \\ &= (l+1)^3 \end{aligned}$$

より, $n = l+1$ のときも (*) は成り立つ.

(i), (ii) より, すべての自然数 n に対して, (*) が成り立つ.

〔証明終〕

(3) (2) より

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}] &= \sum_{m=1}^{n^2} a_m \\ &= n^3 - \sum_{k=1}^n b_k \\ &= n^3 - \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) \\ &= n^3 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n \\ &= \frac{1}{6}n(4n^2 - 3n + 5) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

【2】 (1) $\frac{\pi}{711} < 11 - \frac{7}{2}\pi < \frac{\pi}{709} \dots\dots\dots \textcircled{1}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{711} + \frac{7}{2}\pi < 11 < \frac{\pi}{709} + \frac{7}{2}\pi$$
$$\Leftrightarrow \frac{15598}{4965} < \pi < \frac{15642}{4979}$$
$$\Leftrightarrow 3.141591\dots\dots < \pi < 3.141594\dots\dots$$

を示せばよく、 $\pi = 3.141592\dots\dots$ であるから、これは成り立つ。よって、証明された。

〔証明終〕

(2) $11 - \frac{7}{2}\pi = \alpha$ とおくと、 $\textcircled{1}$ より

$$\frac{\pi}{711} < \alpha < \frac{\pi}{709} \dots\dots\dots \textcircled{1}'$$

であり

$$a_n = \tan(11n) = \tan\left(\frac{7}{2}n\pi + n\alpha\right)$$

これより

$$a_1 = \tan\left(\frac{7}{2}\pi + \alpha\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

となり、さらに $\textcircled{1}'$ より、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ なので、 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + \alpha < 0$ となるから

$$a_1 < 0$$

が成り立つ。

また

$$a_2 = \tan(7\pi + 2\alpha) = \tan 2\alpha$$

であり、 $\textcircled{1}'$ より、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ なので $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ となるから

$$a_2 > 0$$

したがって、題意が示された。

〔証明終〕

(3) $n = 1, 3, 5, \dots, 709$ のとき, $n = 2m - 1$ とおくと

$$a_n = \tan \left\{ \frac{7}{2}(2m - 1)\pi + (2m - 1)\alpha \right\}$$

$$= \tan \left(-\frac{\pi}{2} + n\alpha \right) \quad \dots\dots ②$$

①' より $0 < n\alpha \leq 709\alpha < \pi$ なので

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + n\alpha < \frac{\pi}{2}$$

ここで, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ では $\tan x$ は増加関数なので, n の増加とともに a_n は増加する. 〔証明終〕

(4) a_{709} と a_{711} の大小を考える.

①' より

$$0 < \frac{709}{711}\pi - \frac{\pi}{2} < 709\alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

となるので

$$a_{709} = \tan \left(709\alpha - \frac{\pi}{2} \right) > 0$$

一方, ①' より

$$\frac{\pi}{2} < 711\alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{711}{709}\pi - \frac{\pi}{2} < \pi$$

となるから

$$a_{711} = \tan \left(711\alpha - \frac{\pi}{2} \right) < 0$$

以上により

$$a_{711} < a_{709}$$

となるので, 無限数列 a_1, a_3, a_5, \dots は増加数列ではない. 〔証明終〕

[3]

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ とおくと, 考えるべき不等式は,

$$n - \sum_{k=2}^n f(k) \geq \frac{i}{10}$$

と表せる. ここで,

$$D_n = n - \sum_{k=2}^n f(k)$$

とおけば, $f(k)$ はつねに正であるから, $\{D_n\}$ は単調減少なので, D_n が収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n \geq \frac{i}{10} \quad \dots\dots (*)$$

を満たす最大の整数 i を求めればよいことになる.

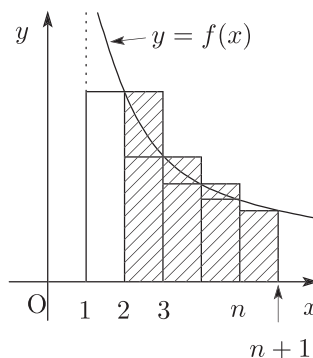
ところで, 区間 $x > 1$ において, 関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

は単調減少するので, $\sum_{k=2}^n f(k)$ は定積分を利用して次のように評価できる.

(i) $n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n f(k) &= f(2) + \sum_{k=3}^n f(k) \\ &> f(2) + \int_3^{n+1} f(x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \int_3^{n+1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \left[\sqrt{x^2-1} \right]_3^{n+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} + \sqrt{n^2+2n} \end{aligned}$$



(ii) $n \geq 4$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n f(k) &= f(2) + f(3) + \sum_{k=4}^n f(k) \\ &< f(2) + f(3) + \int_3^n f(x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{8}} + \int_3^n \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{8}} + \left[\sqrt{x^2-1} \right]_3^n \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{8}} + \sqrt{n^2-1} \end{aligned}$$

よって, $n \geq 4$ のとき,

$$\begin{aligned} n - \sqrt{n^2-1} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{8}} \\ \leq D_n \leq n - \sqrt{n^2+2n} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

である. 左辺を L_n , 右辺を R_n とおくと,

$$\begin{aligned} n - \sqrt{n^2-1} &= \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}} \\ n - \sqrt{n^2+2n} &= \frac{-2n}{n + \sqrt{n^2+2n}} = -\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \end{aligned}$$

であることから, 数列 $\{L_n\}$, $\{R_n\}$ はともに減少数列であり, $\sqrt{3} < 1.734$, $\sqrt{2} > 1.414$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{8}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{4} > 0.6115 > 0.61 \quad \dots\dots ②$$

$\sqrt{3} > 1.731$, $\sqrt{2} < 1.415$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = -1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{2} < 0.676 < 0.68 \quad \dots\dots ③$$

となる.

したがって、数列 $\{D_n\}$ は単調減少であり、

$$D_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} L_n > 0.61$$

より下に有界であるから、収束する.

さらに、②、③より、

$$0.61 < \lim_{n \rightarrow \infty} D_n < 0.68$$

となるから、(*) を満たす最大の整数 i は **6** である. (答)

<別解>

上記解答においては、「数列 $\{a_n\}$ が単調減少で下に有界であれば、収束する」という高校範囲外の定理を用いて解答してある. これを使わなければ、以下のような解答になる.

①は $n \geq 3$ について成り立つ.

十分大きな n について、 R_n は $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ の近くにあるはずであるから、③より、

$$R_n < 0.7$$

を満たしている. このとき、 D_n は当然

$$D_n < 0.7$$

となるので、 $D_n \geq \frac{i}{10}$ が任意の $n \geq 3$ について成り立つためには、

$$i \leq 6$$

が必要である.

一方、 $i = 6$ のとき、①より、任意の $n \geq 3$ に対して、

$$D_n \geq L_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} L_n > 0.61$$

であるから、任意の $n \geq 3$ に対して、 $D_n \geq \frac{i}{10}$ が成り立つ.

$n = 2$ のときも題意が成り立つことを確認するのは容易である.

したがって、求める i の値は **6** である.

【4】

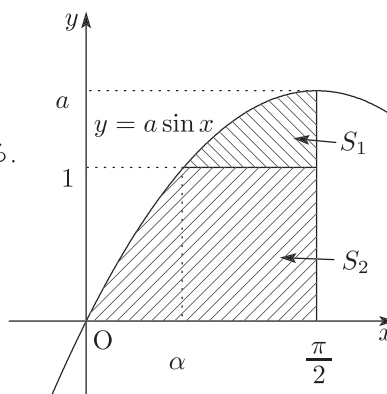
$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲の方程式

$$a \sin x = 1$$

の解を α とおけば、題意の領域は右図のようになる。

したがって、

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= (S_2 + S_1) - 2S_1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin x dx - 2 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (a \sin x - 1) dx \\ &= \left[-a \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \left[-a \cos x - x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a - 2 \left(-\frac{\pi}{2} + a \cos \alpha + \alpha \right) \\ &= a(1 - 2 \cos \alpha) - 2\alpha + \pi \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$



ここで、 $a \sin \alpha = 1$, $\sin \alpha \neq 0$ より、

$$a = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

だから、これを上式に代入して

$$S_2 - S_1 = \frac{1 - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha} - 2\alpha + \pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②の右辺を $f(\alpha)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{2 \sin \alpha \cdot \sin \alpha - (1 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - 2 \\ &= \frac{\cos \alpha (2 \cos \alpha - 1)}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

α は $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ $\dots\dots \textcircled{3}$ をみだし、この範囲で方程式 $f'(\alpha) = 0$ を解くと

$$\cos \alpha = 0, \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$$

よって、③の範囲における $f(\alpha)$ の増減は下表のようになる。

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		+	0	-	0
$f(\alpha)$		↗	極大	↘	

$f(\alpha)$ は $\alpha = \frac{\pi}{3}$ のとき極大かつ最大となる。このとき、①, ②より

$$a \sin \frac{\pi}{3} = 1 \quad \therefore a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$$

以上より、求める最大値とそのときの a の値は

$$\text{最大値 } \frac{\pi}{3}, \quad a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\text{答})$$

【5】

$$\{f(x)\}^2 = x^{2n} + 2px^{n+1} + 2qx^n + p^2x^2 + 2pqx + q^2$$

より, n が奇数のときと偶数のときに分けて調べる.

(i) n が奇数のとき

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x^{2n} + 2px^{n+1} + p^2x^2 + q^2)dx \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{2p}{n+2} + \frac{p^2}{3} + q^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(p + \frac{3}{n+2} \right)^2 + q^2 + \frac{(n-1)^2}{(2n+1)(n+2)^2} \\ &\geq \frac{(n-1)^2}{(2n+1)(n+2)^2} \end{aligned}$$

ここで等号は $(p, q) = \left(-\frac{3}{n+2}, 0 \right)$ のときに限って成り立つから, n が奇数の

とき I を最小にするような $(p, q) = \left(-\frac{3}{n+2}, 0 \right)$ がただ 1 組存在し, I の最

小値は $\frac{(n-1)^2}{(2n+1)(n+2)^2}$ である. (答)

(ii) n が偶数のとき

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x^{2n} + 2qx^n + p^2x^2 + q^2)dx = \frac{1}{2n+1} + \frac{2q}{n+1} + \frac{p^2}{3} + q^2 \\ &= \frac{1}{3}p^2 + \left(q + \frac{1}{n+1} \right)^2 + \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2} \\ &\geq \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2} \end{aligned}$$

ここで等号は $(p, q) = \left(0, -\frac{1}{n+1} \right)$ のときに限って成り立つから, n が偶数の

とき I を最小にするような $(p, q) = \left(0, -\frac{1}{n+1} \right)$ がただ 1 組存在し, I の最

小値は $\frac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2}$ である. (答)

【6】 (1)

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^{n+1} dx = \int_1^e (x)' (\log x)^{n+1} dx \\ &= \left[x (\log x)^{n+1} \right]_1^e - (n+1) \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} (\log x)^n dx \\ &= e - (n+1)I_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

$1 \leq x \leq e$ のとき $0 \leq \log x \leq 1$ だから,

$$0 \leq (\log x)^{n+1} \leq (\log x)^n \quad \dots \textcircled{2}$$

②式を $1 \leq x \leq e$ の範囲で積分すると、

$$I_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx \leq \int_1^e (\log x)^n dx = I_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \cdots \textcircled{3}$$

③より、 $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1} \leq \dots \leq I_1 \quad \cdots \textcircled{4}$

また

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \log x dx = [x \log x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= e - [x]_1^e = 1 \end{aligned}$$

だから④より、 $I_{n+1} \leq 1 \quad \cdots \textcircled{5}$

①, ⑤より、 $e - 1 \leq (n+1)I_n \quad \cdots \textcircled{6}$

①より、

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= e - (n+2)I_{n+1} \\ &= e - (n+2)\{e - (n+1)I_n\} \\ &= (n+1)(n+2)I_n - (n+1)e \end{aligned}$$

④より、 $I_{n+2} \leq I_1 = 1$ だから、

$$(n+1)(n+2)I_n \leq (n+1)e + 1 \quad \cdots \textcircled{7}$$

⑥, ⑦より、

$$\frac{e-1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{(n+1)e+1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{〔証明終〕}$$

【7】 (1) $t = e^x$, $h(t) = \frac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1}$ ($t > 1$) とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(t)e^x = 12 \cdot \frac{(3t^2 - 3)(t^2 - 1) - (t^3 - 3t) \cdot 2t}{(t^2 - 1)^2} \cdot e^x \\ &= \frac{12(t^4 + 3)e^x}{(t^2 - 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は増加関数である。

また

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{12\left(t - \frac{3}{t}\right)}{1 - \frac{1}{t^2}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 1+0} h(t) = \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は任意の実数値をとる。

よって、任意の実数 a に対して、 $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ 1 つ存在する。

〔証明終〕

(2) まず, $f(\alpha) = 8, f(\beta) = 27$ をみたす α, β の値を求める.

$h(t) = 8 (t > 1)$ とおくと

$$\frac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1} = 8$$

より

$$3t^3 - 2t^2 - 9t + 2 = 0 \quad \therefore (t-2)(3t^2 + 4t - 1) = 0$$

$$\therefore t = 2$$

となるから

$$e^\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = \log 2$$

$h(t) = 27 (t > 1)$ とおくと

$$\frac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1} = 27$$

より

$$4t^3 - 9t^2 - 12t + 9 = 0 \quad \therefore (t-3)(4t^2 + 3t - 3) = 0$$

$$\therefore t = 3$$

となるから

$$e^\beta = 3 \quad \therefore \beta = \log 3$$

すると, $\int_8^{27} g(x)dx$ すなわち $\int_8^{27} g(y)dy$ は

右図の斜線部分を表すから, この面積を

S とおくと

$$S = 27\beta - 8\alpha - \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

ここで, $t = e^x$ とすると

$$\frac{dt}{dx} = e^x \quad \therefore \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

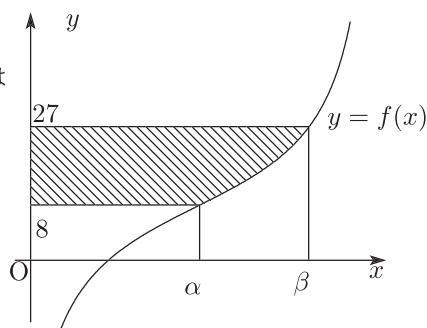
$$x : \alpha \rightarrow \beta \text{ のとき } t : 2 \rightarrow 3$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(x)dx &= \int_2^3 h(t) \cdot \frac{1}{t} dt = 12 \int_2^3 \frac{t^2 - 3}{t^2 - 1} dt \\ &= 12 \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 12 \left[t - \log|t-1| + \log|t+1| \right]_2^3 \\ &= 12(1 + \log 2 - \log 3) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_8^{27} g(x)dx &= S \\ &= 27 \log 3 - 8 \log 2 - 12(1 + \log 2 - \log 3) \\ &= \mathbf{39 \log 3 - 20 \log 2 - 12} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



3章 実戦演習3

問題

【1】1回目に出た目が1, 2, 3, 4, 5, 6のとき, 17をこれらで割った余りはそれぞれ0, 1, 2, 1, 2, 5であるから, X_1 は0, 1, 2, 5のみである. さらに, これらの数を1, 2, 3, 4, 5, 6で割った余りは0, 1, 2, 5の値しか取らない. よって, $X_n = 0, 1, 2, 5$ である.

ここで, $X_n = 0, 1, 2, 5$ である確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とすれば, 上の議論から

$$a_1 = \frac{1}{6}, \quad b_1 = \frac{1}{3}, \quad c_1 = \frac{1}{3}, \quad d_1 = \frac{1}{6}$$

となる. また, X_n と X_{n+1} との関係を見てみると

(i) $X_n = 0$ のとき

$$X_{n+1} = 0$$

(ii) $X_n = 1$ のとき, $n+1$ 回目に

$$\begin{cases} 1 \text{ が出れば} & X_{n+1} = 0 \\ 1 \text{ 以外が出れば} & X_{n+1} = 1 \end{cases}$$

(iii) $X_n = 2$ のとき, $n+1$ 回目に

$$\begin{cases} 1, 2 \text{ が出れば} & X_{n+1} = 0 \\ 1, 2 \text{ 以外が出れば} & X_{n+1} = 2 \end{cases}$$

(iv) $X_n = 5$ のとき, $n+1$ 回目に

$$\begin{cases} 1, 5 \text{ が出れば} & X_{n+1} = 0 \\ 2, 4 \text{ が出れば} & X_{n+1} = 1 \\ 3 \text{ が出れば} & X_{n+1} = 2 \\ 6 \text{ が出れば} & X_{n+1} = 5 \end{cases}$$

となるから

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n \\ b_{n+1} = \frac{5}{6}b_n + \frac{1}{3}d_n \quad \dots\dots ① \\ c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{6}d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{6}d_n \quad \dots\dots ② \end{cases}$$

という漸化式が得られる.

(1) a_1, b_1, c_1, d_1 の値とこれらの漸化式より

$$a_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

$$b_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

となる. よって, 求める確率 a_3 は

$$a_3 = \frac{7}{18} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{36} = \frac{58}{108} = \frac{29}{54} \quad (\text{答})$$

(2) d_n を求めればよいが, $d_1 = \frac{1}{6}$ と②より

$$d_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad (\text{答})$$

(3) b_n を求める.

(2) の結果を①に代入して

$$b_{n+1} = \frac{5}{6}b_n + \frac{1}{3 \cdot 6^n}$$

$$\iff 6^{n+1}b_{n+1} = 5 \cdot 6^n b_n + 2$$

ここで, $p_n = 6^n b_n$ とおけば

$$p_{n+1} = 5p_n + 2 \iff p_{n+1} + \frac{1}{2} = 5 \left(p_n + \frac{1}{2}\right)$$

となるから, 数列 $\left\{p_n + \frac{1}{2}\right\}$ は公比 5, 初項

$$p_1 + \frac{1}{2} = 6^1 b_1 + \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

の等比数列となる. よって

$$p_n + \frac{1}{2} = 5^{n-1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5^n}{2} \iff p_n = \frac{5^n - 1}{2}$$

したがって

$$b_n = \frac{5^n - 1}{2 \cdot 6^n} \quad (\text{答})$$

【2】以下の解答では, 2 項係数 ${}_n C_r$ を $\binom{n}{r}$ で表す.

(1) $X \leq N + 1$ は $N + 1$ 以下の試合数で優勝者が決定する場合である. 優勝が決定するためには少なくとも N 試合が必要であるから,

$$X \leq N + 1 \iff X = N \text{ または } X = N + 1$$

である. 従って, 次の場合を考える:

- 一方のプレイヤーが N 連勝して, N 試合で優勝が決定する場合, この確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

- N 試合目までに, 一方のプレイヤーが $N - 1$ 勝 1 敗し, $N + 1$ 試合目にそのプレイヤーが勝って優勝が決定する場合. この確率は, 独立事象を反復して行う確率として

$$\binom{N}{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = N \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

2 人のプレイヤーのいずれが優勝するかは対等だから

$$P(X \leq N + 1) = 2 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^N + N \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^N (2 + N) \quad (\text{答})$$

(2) $X = N + j$ (ただし $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) となるのは, 一方のプレイヤーが N 勝 j 敗して優勝が決まる場合であり, それは,

- $N + j - 1$ 試合目までにそのプレイヤーが $N - 1$ 勝 j 敗して,
- 次の $N + j$ 試合目に勝って優勝が決まる

場合である.

従ってその確率は, (1) と同様にして

$$\begin{aligned} & \binom{N+j-1}{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \frac{1}{2} \\ &= \binom{N+j-1}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+j} \\ &= \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+j} \end{aligned}$$

2人のプレイヤーのいずれが優勝するかは対等だから, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(X = N+j) &= 2 \cdot \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+j} \\ &= \frac{(N+j-1)!}{(N-1)!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+j-1} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (3) $X = N, N+1, N+2, \dots, 2N-1$ のいずれかで必ず優勝が決定するから, 全確率の法則より, これらの確率の総和は1である:

$$\sum_{j=0}^{N-1} P(X = N+j) = 1 \quad \dots (\#)$$

(2) より,

$$P(X = N+j) = 2 \binom{N+j-1}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+j} = \binom{N+j-1}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+j-1}$$

であるから, (#) に代入して

$$1 = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N+j-1}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+j-1} \quad \dots (\heartsuit)$$

$N-1 = n$ とすると,

$$\begin{aligned} (\heartsuit) &= \sum_{j=0}^n \binom{n+j}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+j} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n+j}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n a_n \end{aligned}$$

従って

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n = 1 \iff a_n = 2^n \quad (\text{答})$$

- 【3】** (1) n 回目の試行でちょうど勝負がつくためには $n-2$ 回目で同点で $n-1$ 回目, n 回目と続けてどちらかが得点するときのみである. 得点が同点となるためには試行が偶数回でなければならないので, n は偶数である. 【証明終】

(2) 赤玉, 白玉が出る確率をそれぞれ

$$p = \frac{a}{a+b}, \quad q = \frac{b}{a+b}$$

とおき, ちょうど $2m$ ($m = 1, 2, \dots$) 回で A が勝つ場合を考える.

$m \geq 2$ において $2m - 2$ 回まで勝負がつかないような玉の出方は $2k - 3$ 回目, $2k - 2$ 回目 ($k = 2, 3, \dots, m$) の組において赤白または白赤という玉の出方が続けばよいので, 全部で 2^{m-1} 通りの玉の出方があり, ちょうど $2m$ 回目で A が勝つ確率は

$$2^{m-1}(pq)^{m-1}p^2 = (2pq)^{m-1}p^2 \quad (m = 2, 3, \dots)$$

であり, $m = 1$ のとき A が勝つ確率は p^2 であるから, このときも上式を満たす.

よって, A が勝つ確率は

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2pq)^{m-1}p^2$$

ここで,

$$0 < 2pq = \frac{2ab}{(a+b)^2} < \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{(a+b)^2} = 1$$

であるから,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2pq)^{m-1}p^2 = \frac{p^2}{1-2pq} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \quad (\text{答})$$

(3) (2) と同様に考えて, B の勝つ確率は

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2pq)^{m-1}q^2 = \frac{q^2}{1-2pq} = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

よって, A が勝者となる確率と B が勝者となる確率の和が 1 であるから, この勝負はいつか決着がつくといえる. 〔証明終〕

【4】 (1) 与式より

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta$$

また, 点 $\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right)$ に対応する θ の値は, 連立方程式

$$\theta - \sin \theta = \frac{\pi}{2} - 1 \dots \dots \textcircled{1}, \quad 1 - \cos \theta = 1 \dots \dots \textcircled{2}$$

の解である.

②から

$$\cos \theta = 0 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

①をみたすのは $\theta = \frac{\pi}{2}$ で, このとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = 1$$

よって, 接線 l の方程式は

$$y - 1 = x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

すなわち

$$y = x - \frac{\pi}{2} + 2 \quad (\text{答})$$

(2) 接線 l と y 軸および C で囲まれた部分の面積を S とすると

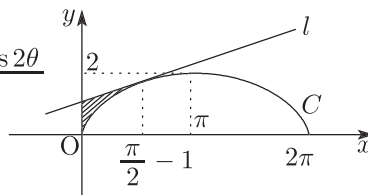
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \left(x - \frac{\pi}{2} + 2\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

ただし,

$$y \frac{dx}{d\theta} = (1 - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

よって求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{x^2}{2} + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)x \right]_0^{\frac{\pi}{2}-1} \\ &\quad - \left[\frac{3}{2}\theta - 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



【5】 $x = x(t)$, $y = y(t)$ とおくと, $x(t) = -t + 4 - \frac{4}{t+1}$, $y(t) = -t^2 + 4t - 4 + \frac{4}{t+1}$ と

変形できるので

$$\begin{aligned} x'(t) &= -1 + \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(1-t)(3+t)}{(t+1)^2} \\ y'(t) &= -2t + 4 - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{-2t(t^2-3)}{(t+1)^2} \end{aligned}$$

t	0		1		$\sqrt{3}$		3
$x'(t)$		+	0	-	-	-	
$x(t)$	0	↗	1	↘		↘	0
$y'(t)$		+	+	+	0	-	
$y(t)$	0	↗	1	↗	$6\sqrt{3}-9$	↘	0

x は $t=1$ で極大かつ最大, y は $t=\sqrt{3}$ で極大かつ最大.

x, y の動く範囲は,

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 6\sqrt{3} - 9 \quad (\text{答})$$

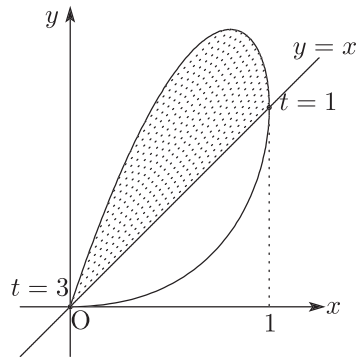
次に, $y = tx$ が常に成り立つので,

$$y - x = (t-1)x$$

である. $x \geq 0$ なので, $0 \leq t \leq 1$ で $y \leq x$,

$1 \leq t \leq 3$ で $y \geq x$ である. よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (y-x) dx \\ &= \int_3^1 \left(-t^2 + 5t - 8 + \frac{8}{t+1}\right) \left\{-1 + \frac{4}{(t+1)^2}\right\} dt \\ &= \int_3^1 \left\{t^2 - 5t + 4 + \frac{20}{t+1} - \frac{56}{(t+1)^2} + \frac{32}{(t+1)^3}\right\} dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{5}{2}t^2 + 4t + 20 \log|t+1| + \frac{56}{t+1} - \frac{16}{(t+1)^2}\right]_3^1 \\ &= \frac{43}{3} - 20 \log 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



【6】(1) $f(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ である. ここで, $t = \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t & 0 & \rightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{4} \\ \hline \end{array}$$

なので

$$f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

また, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ だから, $x=1$ における接線の傾きは

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

よって, 法線の傾きは -2 となるから, 求める法線の方程式は

$$y - \frac{\pi}{4} = -2(x-1) \quad \therefore y = -2x + 2 + \frac{\pi}{4} \quad (\text{答})$$

(2) $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ において, (1) と同じく $t = \tan \theta$ とおき

$$\tan \alpha = x, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

となる実数 α をとれば

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline t & 0 \rightarrow x \\ \hline \theta & 0 \rightarrow \alpha \\ \hline \end{array}$$

なので

$$f(x) = \int_0^\alpha d\theta = \alpha \quad \therefore \tan f(x) = \tan \alpha = x$$

よって

$$x = \tan y$$

であり, $y = f(x)$ のグラフは曲線 $y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動したものだから, 題意の図形は図の斜線部分のようになる. よって, $y = f(x)$ と $y = \frac{\pi}{4}$ と y 軸に囲まれた部分の面積を T とすると

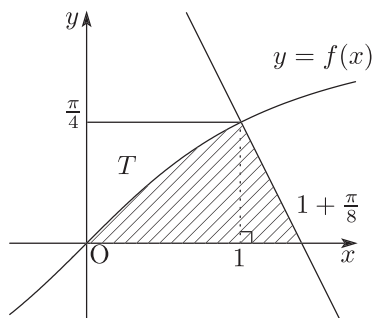
$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan y \, dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\cos y} \, dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ -\frac{(\cos y)'}{\cos y} \right\} dy \\ &= \left[-\log(\cos y) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

また, 法線と x 軸との交点の x 座標が

$$0 = -2x + 2 + \frac{\pi}{4} \iff x = 1 + \frac{\pi}{8}$$

であることから, 求める面積を S とおけば

$$\begin{aligned} S &= \left(1 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{8} - 1 \right) \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{2} \log 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



【7】 $A: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $B: \frac{x^2}{4} + (y - 2a)^2 = 1$ (ただし, $a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$) とする.

短軸方向に 2 倍に拡大すれば

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + (y - 4a)^2 = 4$$

となる. したがって, 右図において

$$PH = \sqrt{4 - 4a^2}$$

$$= \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{12}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

よって, $\angle OPH = \theta$ とすれば

$$\cos \theta = \frac{PH}{OP} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \cos \frac{\pi}{12}$$

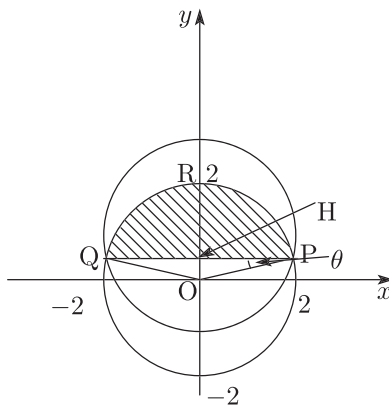
$$\therefore \theta = \frac{\pi}{12} \quad \therefore \angle POQ = \frac{5}{6}\pi$$

したがって, 弓形 PQR の面積を S とすれば

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{5}{6}\pi - 2a \cdot PH = \frac{5}{3}\pi - 1$$

であり, 短軸方向の 2 倍の拡大によって面積も 2 倍になっているから,

$$M = 2 \cdot \frac{S}{2} = \frac{5}{3}\pi - 1 \quad (\text{答})$$



4章 実戦演習4

問題

【1】(1) l と AB のなす角を α とする. また l と $x = p$ のなす角を β とする.

$p \geq 0$ のとき, 図1のように $\beta > \alpha$ となり, 不適.

よって, $p < 0$ である.

$B(p, q)$ における接線 l は

$$\frac{p}{a^2}x + qy = 1$$

となるので, l と x 軸の交点 C は

$$\left(\frac{a^2}{p}, 0\right) \text{ となる.}$$

この条件は $\alpha = \beta = \theta$ なので, 図3より,

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{p - \frac{a^2}{p}}{q} = \frac{p^2 - a^2}{pq} & \dots\dots ① \\ \tan(\pi - 2\theta) = \frac{a - p}{q} & \dots\dots ② \end{cases}$$

②より,

$$\begin{aligned} -\tan 2\theta &= \frac{a - p}{q} \\ \Leftrightarrow \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} &= \frac{p - a}{q} \\ \Leftrightarrow 2q \tan \theta &= (p - a)(1 - \tan^2 \theta) \end{aligned}$$

①を代入して,

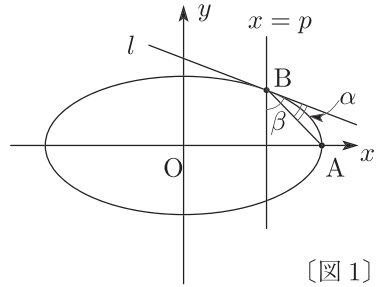
$$\begin{aligned} 2q \cdot \frac{p^2 - a^2}{pq} &= (p - a) \left\{ 1 - \left(\frac{p^2 - a^2}{pq} \right)^2 \right\} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{p + a}{p} &= 1 - \frac{(p^2 - a^2)^2}{p^2 q^2} \quad (\because p \neq a) \\ \Leftrightarrow 2p(p + a) &= p^2 - \frac{(p^2 - a^2)^2}{q^2} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

ここで, $B(p, q)$ は楕円上の点で,

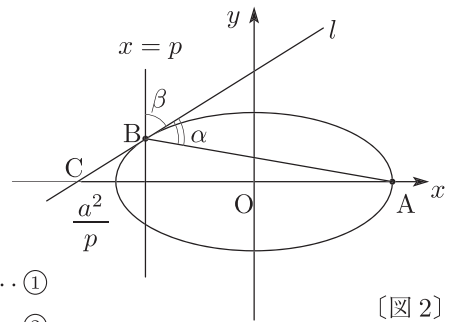
$$\frac{p^2}{a^2} + q^2 = 1 \quad \therefore q^2 = \frac{a^2 - p^2}{a^2}$$

を満たすので, ③に代入して,

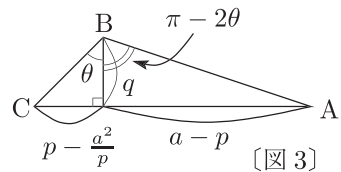
$$\begin{aligned} 2p(p + a) &= p^2 - (p^2 - a^2)^2 \cdot \frac{a^2}{a^2 - p^2} \\ \Leftrightarrow 2p(p + a) &= p^2 + (p^2 - a^2)a^2 \end{aligned}$$



〔図1〕



〔図2〕



〔図3〕

$$\Leftrightarrow (a^2 - 1)p^2 - 2ap - a^4 = 0$$

$$\therefore p = \frac{a \pm \sqrt{a^6 - a^4 + a^2}}{a^2 - 1} \quad (\because a > 1)$$

$p < 0$ により,

$$p = \frac{a(1 - \sqrt{a^4 - a^2 + 1})}{a^2 - 1} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad p &= \frac{a\{1 - (a^4 - a^2 + 1)\}}{(a^2 - 1)(1 + \sqrt{a^4 - a^2 + 1})} \\ &= \frac{-a^3(a^2 - 1)}{(a^2 - 1)(1 + \sqrt{a^4 - a^2 + 1})} \\ &= \frac{-a^3}{1 + \sqrt{a^4 - a^2 + 1}} \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{a \rightarrow 1} p = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

また,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{p}{a} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-a^2}{1 + \sqrt{a^4 - a^2 + 1}} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1}{\frac{1}{a^2} + \sqrt{1 - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4}}} = -1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【2】 (1) 性質 (P) をもつ円で、円 A に外接するものが 4 つ存在するならば、図 1 のようになって、その大小は、小さい順に C, D, E, F となる。

.....①

A が性質 (P) をもつことにより

$$x < \frac{a}{2} \quad \text{.....②}$$

が必要であり、このとき①より、 F

が性質 (P) をみたすこと、つまり F

の半径を y としたとき

$$y < \frac{a}{2} \quad \text{.....③}$$

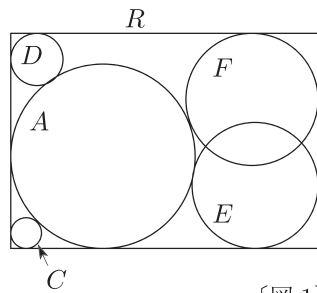
が成り立つことで十分である。

そこで、 y を求めると、図 2 より

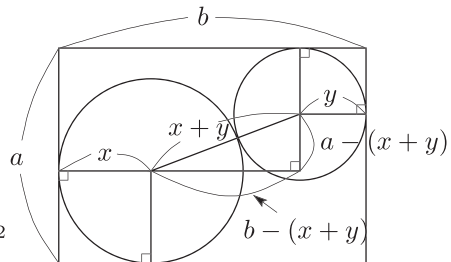
$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= \{a - (x+y)\}^2 \\ &\quad + \{b - (x+y)\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(a+b)(x+y) \\ + a^2 + b^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x+y = a+b \pm \sqrt{2ab}$$



〔図 1〕



〔図 2〕

ここで、 $x + y = a + b + \sqrt{2ab}$ とすると、 $a - (x + y) < 0$ となって不適であるから

$$y = a + b - \sqrt{2ab} - x$$

よって、③より

$$a + b - \sqrt{2ab} - x < \frac{a}{2}$$

②と合わせて

$$\frac{a}{2} + b - \sqrt{2ab} < x < \frac{a}{2} \quad (\text{答})$$

《注》

「性質(P)をもつ円で円Aに外接するものが4つ存在する」条件が、②かつ③になるところまでの議論は直感的である。厳密に議論するならば、次のようになる。

図3で R_1, R_2 は正方形である。

$$2x < a$$

のとき、 R_1 の2辺とAに接する円C、 D' が存在する。このとき、Cと D' は同じ大きさである。 D' から辺CFと円Aに接しながら大きくし、辺FEに接するまでにした円Dを考えると

$$(\text{円Dの直径}) < a$$

でなければならない。

さらに、 R_2 の2辺とAに接しDと半径が等しい右下の円を E' とする。ここから辺CDとAに接しながら大きくし、辺DEに接するまでにした円Eを考える。EがAより小さいときはEと同じ大きさで辺DEとAに接し、Eより上方にある円 F' が存在する。また、Eの半径がAの半径以上であれば $F' = E$ とする。このとき

$$(\text{円Eの直径}) < a$$

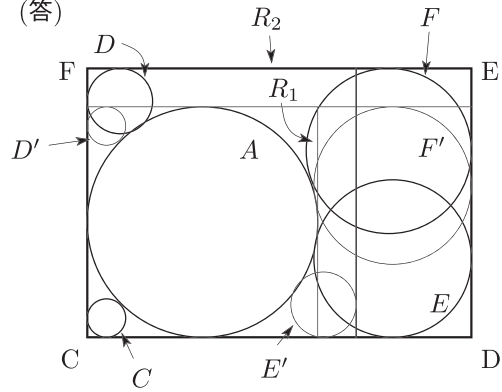
でなければならない。これをみたととき、(円Dの半径) $< a$ をみたと。

最後に、 F' から辺DEとAに接しながら大きくし、辺EFに接するまでにした円Fを考えると

$$(\text{円Fの直径}) < a$$

でなければならない。これをみたとしているとき、(円Eの直径) $< a$ をみたと。

以上により、題意が成り立つ条件は、②かつ③である。



[図3]

(2) $B = E$ であるから, E の半径 z を求めると, 図 4 より

$$\begin{aligned} QH &= \sqrt{(x+z)^2 - |x-z|^2} \\ &= 2\sqrt{xz} \end{aligned}$$

であり

$$x + 2\sqrt{xz} + z = b$$

$$\iff (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2 = b$$

$$\iff \sqrt{x} + \sqrt{z} = \sqrt{b}$$

$$\therefore z = (\sqrt{b} - \sqrt{x})^2$$

よって

$$(\text{円 } A \text{ と円 } B \text{ の面積の和}) = \pi x^2 + \pi z^2 = \pi \{x^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{x})^4\}$$

となり, $\sqrt{x} = t$ として

$$f(t) = t^4 + (\sqrt{b} - t)^4$$

とおく. このとき

$$f'(t) = 4t^3 - 4(\sqrt{b} - t)^3 = 4\{t^3 - (\sqrt{b} - t)^3\}$$

であるから, $f'(t)$ の符号は, $t - (\sqrt{b} - t) = 2t - \sqrt{b}$ の符号と一致する.

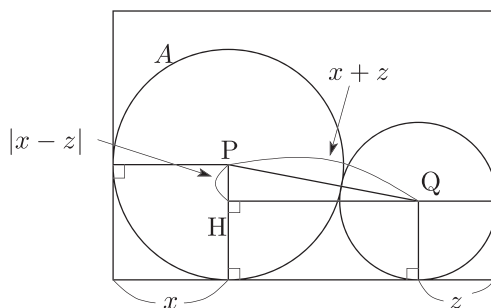
いま, (1) と $b > a > \frac{b}{2}$ より

$$\sqrt{b} - \sqrt{\frac{a}{2}} < t < \sqrt{\frac{a}{2}}$$

であり, $t = \frac{\sqrt{b}}{2}$ はこの区間の中点となっている.

したがって, $f(t)$ は $t = \frac{\sqrt{b}}{2}$ のとき, 極小かつ最小となり, 求める最小値は

$$\pi f\left(\frac{\sqrt{b}}{2}\right) = \frac{\pi b^2}{8} \quad (\text{答})$$



[図 4]

【3】 (1) $\triangle PQR$ と平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq \sqrt{3}a$) との交わりを L としその長さを $2l$ とすると

$$\frac{\sqrt{3}a - t}{l} = \sqrt{3} \text{ より}$$

$$l = a - \frac{t}{\sqrt{3}}$$

である. また $\triangle PQR$ を含む平面と z 軸との距離を d , L 上の任意の点と z 軸との距離を r とすると

$$d \leq r \leq \sqrt{d^2 + l^2}$$

であり d の範囲は

$$0 \leq d \leq \sqrt{1 - a^2}$$

であるから, r の範囲は

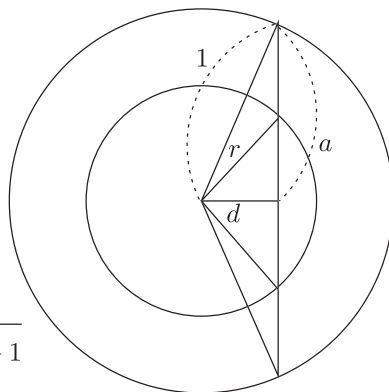
$$0 \leq r \leq \sqrt{1 - a^2 + l^2} = \sqrt{\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}at + 1}$$

である. よって, 求める体積は

$$V = \int_0^{\sqrt{3}a} \pi \left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}at + 1 \right) dt$$

$$= \pi \left[\frac{1}{9}t^3 - \frac{a}{\sqrt{3}}t^2 + t \right]_0^{\sqrt{3}a}$$

$$= \sqrt{3}\pi \left(a - \frac{2}{3}a^3 \right) \quad (\text{答})$$



(2)

$$\frac{dV}{da} = \sqrt{3}\pi(1 - 2a^2) \quad (0 < a \leq 1)$$

だから, V の増減は下のようになる.

a	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$\frac{dV}{da}$		+	0	-	
V		↗		↘	

よって, V は $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ をとる. (答)

【4】(1) $AM = \sqrt{3}$ より,

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{AM^2 - OA^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

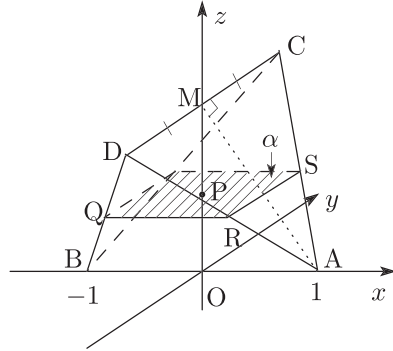
また, $CM \perp AM$, $CM \perp BM$ より,
 $CD \perp$ 平面 AMB だから,

$$CD \parallel y \text{ 軸}$$

よって,

$$C(0, 1, \sqrt{2}), \quad D(0, -1, \sqrt{2})$$

(答)



(2) $\alpha \parallel AB$, $\alpha \parallel CD$ だから, 題意の切り口は AB と CD に平行な辺をもつ長方形となり, α と z 軸との交点を P とおき, 図のように点 $Q \sim S$ をとると,

$$\frac{RS}{CD} = \frac{OP}{OM} = t, \quad \frac{QR}{AB} = \frac{MP}{MO} = 1 - t$$

より, 2 辺の長さは

$$RS = 2t, \quad QR = 2(1 - t)$$

以上により, 2 辺の長さが $2t$, $2(1 - t)$ である長方形である. (答)

(3) OM を $s : 1 - s$ に内分する点を $(0, 0, u)$ とすると, $M(0, 0, \sqrt{2})$ より, $u = \sqrt{2}s$.

ここで平面 $z = \sqrt{2}s$ での切り口の長方形の面積は,

$$2s \cdot 2(1 - s) = 4(s - s^2)$$

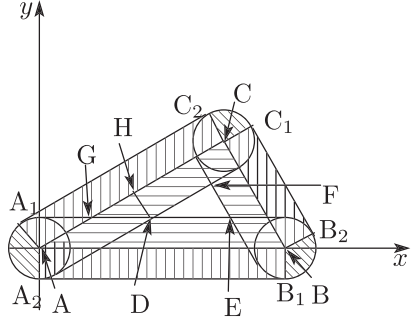
であるから, 求める体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{2}t} 4(s - s^2) dz = 4\sqrt{2} \int_0^t (s - s^2) ds = 4\sqrt{2} \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right]_0^t \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} t^2 (3 - 2t) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【5】

- (1) K を平面 $z = 0$ で切った切り口は A, B, C を中心とする半径 1 の円とそれらの共通外接線からなる右のような図形である。

題意より, $AB = 8, BC = 4, CA = 4\sqrt{3}$ であり, さらに
 $\angle BAC = 30^\circ, \angle ABC = 60^\circ,$
 $\angle ACB = 90^\circ$



よって, 右図のように点を定めると,

$$S_1 = \text{長方形 } ABB_1A_2 + \text{長方形 } BCC_1B_2 \\ + \text{長方形 } CAA_1C_2$$

$$= (8 + 4 + 4\sqrt{3}) \times 1 = 12 + 4\sqrt{3}$$

$$S_2 = \text{扇形 } AA_1A_2 + \text{扇形 } BB_1B_2 + \text{扇形 } CC_1C_2 \\ = \pi \times 1^2 = \pi$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

また, 2 直線 AC, DE の交点を G, D から AC に下ろした垂線の足を H とすれば,
 $DH = 1, \angle DGH = 30^\circ$ であるから

$$AH = AG + GH = GD + GH = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore DF = AC - AH - 1 = 3\sqrt{3} - 3$$

$$\therefore \triangle DEF = \frac{1}{2} \cdot \frac{DF^2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} - 9$$

よって, 求める面積 S は

$$S = S_1 + S_2 + \triangle ABC - \triangle DEF \\ = 12 + 4\sqrt{3} + \pi + 8\sqrt{3} - (6\sqrt{3} - 9) \\ = 21 + 6\sqrt{3} + \pi \quad (\text{答})$$

- (2) K を平面 $z = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ったときの切り口は, (1) の円の半径 r を

$$r = \sqrt{1 - t^2} \quad \dots\dots ①$$

としたものに等しい。よって, 切り口の面積を $S(t)$ とすれば, (1) と同様にして

$$AH = 2r + \sqrt{3}r$$

$$\therefore DF = 4\sqrt{3} - (3 + \sqrt{3})r$$

となるから,

$$S(t) = \text{長方形の面積の和} + \text{扇形の面積の和} + \triangle ABC - \triangle DEF \\ = (12 + 4\sqrt{3})r + \pi r^2 + 8\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \{4\sqrt{3} - (3 + \sqrt{3})r\}^2 \\ = (24 + 8\sqrt{3})r - (2\sqrt{3} + 3 - \pi)r^2 \quad \dots\dots ②$$

よって, 求める体積を V とすれば, ① を代入して

$$V = \int_{-1}^1 S(t) dt$$

$$= (24 + 8\sqrt{3}) \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt - (2\sqrt{3} + 3 - \pi) \int_{-1}^1 (1-t^2) dt$$

ここで、 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ は半径 1 の半円の面積 $\frac{\pi}{2}$ に等しいから

$$\begin{aligned} V &= (12 + 4\sqrt{3})\pi - 2(2\sqrt{3} + 3 - \pi) \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{40}{3} + 4\sqrt{3} \right) \pi - \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【6】 (1)

$$a = \frac{yz}{x+z}, \quad b = x+z, \quad c = \frac{xy}{x+z}$$

したがって、求める立体は

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{yz}{x+z} \leq 2 \\ 1 \leq x+z \leq 2 \\ 1 \leq \frac{xy}{x+z} \leq 2 \end{cases}$$

$x, y, z > 0$ なので

$$\begin{cases} x+z \leq yz \leq 2(x+z) \\ 1 \leq x+z \leq 2 \\ x+z \leq xy \leq 2(x+z) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで $y = t$ とし、 $\textcircled{1}$ を整理すると

$$\begin{cases} \frac{t-2}{2}z \leq x \leq (t-1)z \\ \frac{t-2}{2}x \leq z \leq (t-1)x \\ -x+1 \leq z \leq -x+2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

また $t = y = a + c$ より

$$2 \leq t \leq 4$$

であり $\frac{1}{t-1} \geq \frac{t-2}{2}$ となるのは、 $2 \geq (t-1)(t-2)$ より

$$2 \leq t \leq 3$$

のとき、

$\frac{1}{t-1} \leq \frac{t-2}{2}$ となるのは、 $2 \leq (t-1)(t-2)$ より

$$3 \leq t \leq 4$$

のときであるから

(イ) $2 \leq t \leq 3$ のとき、条件 $\textcircled{2}$ で表される領域を図示すると図 1 のようになる。

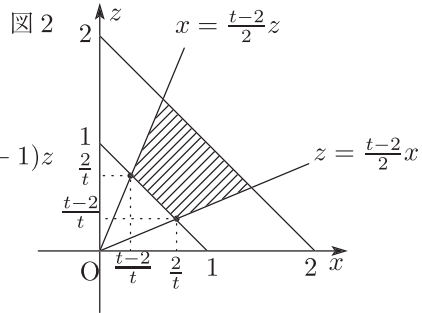
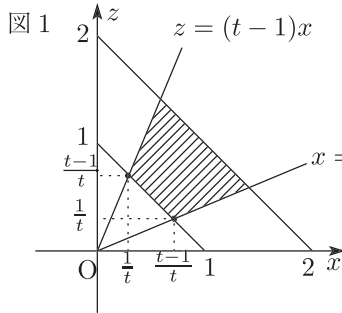
この領域の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} \therefore S_1 &= 3 \times \frac{1}{2} \left| \left(\frac{t-1}{t} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} \right)^2 \right| \\ &= \frac{3(t-2)}{2t} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(ロ) $3 \leq t \leq 4$ のとき, 条件 ②で表される領域を図示すると図2 のようになる.

この領域の面積 S_2 は

$$\begin{aligned} \therefore S_2 &= 3 \times \frac{1}{2} \left| \left(\frac{t-2}{t} \right)^2 - \left(\frac{2}{t} \right)^2 \right| \\ &= \frac{3(4-t)}{2t} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(2) 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_2^3 \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{t} \right) dt + \int_3^4 \frac{3}{2} \left(\frac{4}{t} - 1 \right) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_2^3 dt - 3 \int_2^3 \frac{1}{t} dt + 6 \int_3^4 \frac{1}{t} dt - \frac{3}{2} \int_3^4 dt \\ &= \frac{3}{2} - 3(\log 3 - \log 2) + 6(\log 4 - \log 3) - \frac{3}{2} \\ &= 15 \log 2 - 9 \log 3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【7】一般性を失わずに、 $\vec{a} = (1, 0, 0)$ として良い。このとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \gamma, \quad |\vec{b}| = 1$$

より

$$\vec{b} = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$$

また、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \cos \beta$ より

$$\vec{c} = (\cos \beta, t, u)$$

として良い。このときさらに

$$|\vec{c}| = 1 \quad \text{より} \quad \cos^2 \beta + t^2 + u^2 = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \cos \alpha \quad \text{より} \quad \cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + t \sin \gamma$$

である。

いま、問題の式から文字を減らすように変形を行う。

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ &= (\cos \beta \cos \gamma + t \sin \gamma)^2 + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2(\cos \beta \cos \gamma + t \sin \gamma) \cos \beta \cos \gamma \\ &= \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + t^2 \sin^2 \gamma \\ &= 1 - t^2 \cos^2 \gamma - \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma - u^2 \\ &= 1 + (1 - t^2 - \cos^2 \beta) \cos^2 \gamma - u^2 \\ &= 1 + u^2 \cos^2 \gamma - u^2 \\ &= 1 - u^2 \sin^2 \gamma \end{aligned}$$

$$u^2 = 1 - t^2 - \cos^2 \beta \quad \text{より}$$

$$0 \leq u^2 \leq 1$$

よって

$$0 \leq \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1$$

が示された。

左側の等号は

$$u^2 \sin^2 \gamma = 1 \quad \iff \quad u = \pm 1 \quad \text{かつ} \quad \sin \gamma = \pm 1$$

このとき、 $t = 0$ 、 $\cos \beta = 0$ となるので

$$\vec{b} = (0, \pm 1, 0), \quad \vec{c} = (0, 0, \pm 1) \quad (\text{複号任意})$$

つまり、 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} が互いに直交するときである。

右側の等号は

$$u^2 \sin^2 \gamma = 0 \quad \iff \quad u = 0 \quad \text{または} \quad \sin \gamma = 0$$

のときである。ここで、 $u = 0$ なら、 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} が同一平面上にあることを意味する。また、

$\sin \gamma = 0$ のとき

$$\vec{b} = (\pm 1, 0, 0) = \pm \vec{a}$$

となり、やはり、 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} が同一平面上にある。

すなわち、 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} が同一平面上のときである。

〔証明終〕

5章 実戦演習5

問題

【1】右図のように座標を導入すると、
 $B(-3, 0, 0)$, $C(3, 0, 0)$ であり、
 $OB = 3$, $AB = 5$ より、 $OA = 4$ となる
 ので、 $A(0, 4, 0)$ である。

また、 $\angle AOD = \theta$ とおくと、 $0 < \theta < \pi$
 であり、 $OD = \sqrt{7}$ なので

$$D(0, \sqrt{7} \cos \theta, \sqrt{7} \sin \theta)$$

とおける。

ここで、外心 P は対称性より yz 平面上
 にあるから、 $P(0, y, z)$ とおくと

$$PA = PB = PD$$

より

$$\begin{cases} (y-4)^2 + z^2 = (-3)^2 + y^2 + z^2 & \dots\dots ① \\ (-3)^2 + y^2 + z^2 = (y-\sqrt{7}\cos\theta)^2 + (z-\sqrt{7}\sin\theta)^2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①より

$$y^2 - 8y + 16 + z^2 = 9 + y^2 + z^2$$

$$\therefore y = \frac{7}{8}$$

②より

$$9 + y^2 + z^2 = y^2 - 2\sqrt{7}y \cos \theta + 7 \cos^2 \theta + z^2 - 2\sqrt{7}z \sin \theta + 7 \sin^2 \theta$$

$$\therefore 2\sqrt{7}z \sin \theta = -2(\sqrt{7}y \cos \theta + 1)$$

$0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ だから

$$z = -\frac{1}{\sqrt{7}\sin\theta} \left(\frac{7\sqrt{7}}{8} \cos\theta + 1 \right) = -\frac{1}{8\sqrt{7}} \cdot \frac{7\sqrt{7}\cos\theta + 8}{\sin\theta}$$

ここで、外接円の半径を r とすると

$$r^2 = PA^2 = \left(\frac{25}{8} \right)^2 + z^2$$

となるから、 z^2 が最小、さらには $(-8\sqrt{7}z)^2$ が最小であればよい。

そこで

$$f(\theta) = \left(\frac{7\sqrt{7}\cos\theta + 8}{\sin\theta} \right)^2$$

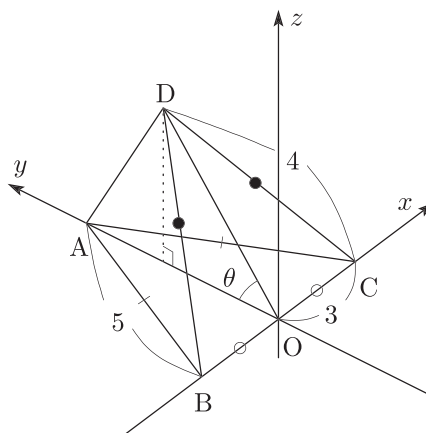
とおくと

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2 \cdot \frac{7\sqrt{7}\cos\theta + 8}{\sin\theta} \cdot \frac{-7\sqrt{7}\sin\theta \cdot \sin\theta - (7\sqrt{7}\cos\theta + 8)\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ &= 2 \cdot \frac{-(7\sqrt{7}\cos\theta + 8)(7\sqrt{7} + 8\cos\theta)}{\sin^3\theta} \end{aligned}$$

$7\sqrt{7} + 8\cos\theta > 0$ であるから、 $f'(\theta) = 0$ となるとき

$$\cos\theta = -\frac{8}{7\sqrt{7}}$$

となる。



$0 < \theta < \pi$ におけるこの θ の値を α とすると、増減表は下表のようになり、 $\theta = \alpha$ のとき $f(\theta)$ は最小となる。

θ	0	...	α	...	π
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$		↘		↗	

よって、このときの AD の長さを求めると、
余弦定理により

$$\begin{aligned} AD^2 &= OA^2 + OD^2 - 2OA \cdot OD \cos \alpha \\ &= 16 + 7 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{7} \cdot \left(-\frac{8}{7\sqrt{7}} \right) \\ &= 23 + \frac{64}{7} = \frac{225}{7} = \frac{15^2}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore AD = \frac{15}{7}\sqrt{7} \quad (\text{答})$$

【2】 光が球面で反射する点は、 $P(3t, 2t, t)$ ($t \geq 0$) と表すことができる。

P が中心 $C(7, 6, 4)$ 、半径 3 の球面上にあるとき

$$(3t - 7)^2 + (2t - 6)^2 + (t - 4)^2 = 9$$

$$\iff 7t^2 - 37t + 46 = 0$$

$$\iff (7t - 23)(t - 2) = 0$$

$$\therefore t = \frac{23}{7}, 2$$

ここで、 $t (\geq 0)$ が増加するほど原点から遠くなるので、題意より

$$P(6, 4, 2) \quad (\text{答})$$

また、直線 CP に関して原点 O と対称な位置にある点を $O'(2u, 2v, 2w)$ とする。

対称であるための条件を考えると、まず、 OO' の中点を $M(u, v, w)$ とすれば

$$\overrightarrow{PM} = k\overrightarrow{PC} \quad (k \text{ は実数})$$

$$\iff \begin{pmatrix} u - 6 \\ v - 4 \\ w - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix}$$

k を消去して

$$u - 6 = \frac{v - 4}{2} = \frac{w - 2}{2} \quad \dots\dots ①$$

さらに、 $\overrightarrow{OO'} \perp \overrightarrow{PC}$ より

$$\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$$

$$\iff 2u + 4v + 4w = 0$$

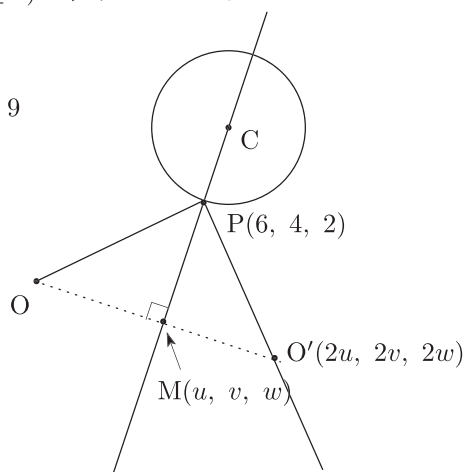
$$\therefore u + 2v + 2w = 0 \quad \dots\dots ②$$

よって、①、②より

$$u + 2(2u - 8) + 2(2u - 10) = 0 \quad \therefore u = 4$$

となり、さらに $v = 0, w = -2$ を得るので

$$O'(8, 0, -4)$$



反射光線は、P を端点とする半直線 PO' であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{PO'} = \begin{pmatrix} 2l+6 \\ -4l+4 \\ -6l+2 \end{pmatrix} \quad (l \geq 0)$$

と表される. ここで, $z=0$ とすると, $l = \frac{1}{3}$ となるから

$$x = \frac{20}{3}, \quad y = \frac{8}{3}$$

したがって, 光が xy 平面と交わる点は

$$\left(\frac{20}{3}, \frac{8}{3}, 0 \right) \quad (\text{答})$$

- 【3】** 楕円上の点を $P(\cos \theta, 2 \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと, P における接線 ℓ は

$$x \cos \theta + \frac{2 \sin \theta}{4} y = 1, \quad z = 0$$

と表され, ℓ の方向ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となる. ここで, } R \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \cos \theta \\ 1 - 2 \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので, 平面 π は実数 α, β を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \cos \theta \\ 1 - 2 \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \sin \theta + \frac{\beta}{2} - \beta \cos \theta + \cos \theta \\ -\alpha \cos \theta + \beta - 2\beta \sin \theta + 2 \sin \theta \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される.

$\beta = k$ とすると, 題意より

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} \sin \theta + \frac{k}{2} - k \cos \theta + \cos \theta = 0 \\ -\alpha \cos \theta + k - 2k \sin \theta + 2 \sin \theta = 0 \end{cases}$$

が成り立つので, α を消去して

$$\frac{k}{2}(1 - 2 \sin \theta) \sin \theta + k \left(\frac{1}{2} - \cos \theta \right) \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 0$$

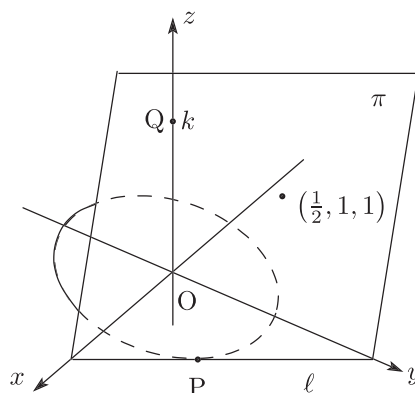
$$\Leftrightarrow k \cdot \frac{1}{2}(\sin \theta + \cos \theta - 2) = -1$$

$$\therefore k = \frac{2}{2 - \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)}$$

となる. よって, k の範囲は

$$\frac{2}{2 + \sqrt{2}} \leq k \leq \frac{2}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\therefore 2 - \sqrt{2} \leq k \leq 2 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$



【4】(1) $P(a, b, c)$ とおく.

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 1-a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -a \\ 1-b \\ -c \end{pmatrix}$$

$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$ より

$$(1-a)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (1-b)^2 + c^2 \quad \therefore a = b$$

したがって, $P(t, t, c)$ とおくと

$$r^2 |\overrightarrow{PO}|^2 = r^2(t^2 + t^2 + c^2)$$

よって

$$r^2(2t^2 + c^2) = (1-t)^2 + t^2 + c^2$$

となる t, c がとれるような r の値の範囲を求めればよい.

$$2t^2(1-r^2) - 2t + 1 = (r^2 - 1)c^2$$

$$r^2 - 1 < 0 \text{ より } (r^2 - 1)c^2 \leq 0$$

よって

$$2t_0^2(1-r^2) - 2t_0 + 1 \leq 0$$

となる t_0 がとれれば, そのときの t_0, r の値に対し

$$c^2 = \frac{2t_0^2(1-r^2) - 2t_0 + 1}{r^2 - 1}$$

で c をとることができる.

$f(t) = 2(1-r^2)t^2 - 2t + 1$ とおくと, $1-r^2 > 0$ であるから, $f(t) = 0$ の判別式を D とすると, $\frac{D}{4} \geq 0$ が必要十分条件である. よって

$$1 - 2(1-r^2) \geq 0 \quad \therefore \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 2(1-t)(-t) + c^2$$

$$= 2t^2 - 2t + \frac{2t^2(1-r^2) - 2t + 1}{r^2 - 1}$$

$$= \frac{2r^2}{1-r^2}t - \frac{1}{1-r^2}$$

t の変域は $f(t) \leq 0$ より

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2(1-r^2)}}{2(1-r^2)} \leq t \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 2(1-r^2)}}{2(1-r^2)}$$

よって, $\frac{2r^2}{1-r^2} > 0$ より

$$M(r) = \frac{1}{1-r^2} \left\{ 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - 2(1-r^2)}}{2(1-r^2)} \cdot r^2 - 1 \right\}$$

$$m(r) = \frac{1}{1-r^2} \left\{ 2 \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - 2(1-r^2)}}{2(1-r^2)} \cdot r^2 - 1 \right\}$$

$$\therefore M(r) - m(r) = \frac{2\sqrt{2r^2 - 1}}{(1-r^2)^2} \cdot r^2$$

よって

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^2 \{M(r) - m(r)\} = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{2\sqrt{2r^2 - 1} \cdot r^2}{(1+r)^2} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

【5】余弦定理より

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ \iff a^2 = b^2 + c^2 + bc \\ &\iff a^2 = (b+c)^2 - bc \\ &\iff bc = (b+c)^2 - a^2 \\ &\iff bc = (b+c+a)(b+c-a)\end{aligned}$$

今, $b \leq c$ のときを考える.

b, c はともに素数であり, また, $b+c+a > c \geq b \geq 2$ より

$$b+c+a = bc \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad b+c-a = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

① + ② より

$$\begin{aligned}2(b+c) &= bc + 1 \iff bc - 2(b+c) + 1 = 0 \\ &\iff (b-2)(c-2) = 3\end{aligned}$$

ここで, $b-2, c-2$ は $0 \leq b-2 \leq c-2$ をみたす整数であるから

$$(b-2, c-2) = (1, 3)$$

$$\iff (b, c) = (3, 5) \quad (\text{これは } b, c \text{ が素数をみたしている})$$

これを, ②に代入することにより

$$a = 7$$

以上より

$$(a, b, c) = (7, 3, 5)$$

$c \leq b$ のときも同様にして

$$(a, b, c) = (7, 5, 3)$$

が得られる. よって

$$(a, b, c) = (7, 3, 5), (7, 5, 3) \quad (\text{答})$$

【6】 $f(a), f(b)$ のうち大きくないほうを, $\min\{f(a), f(b)\}$, 小さくないほうを $\max\{f(a)$

, $f(b)\}$ とすると

$$m \leq f(a) \leq M, m \leq f(b) \leq M$$

より

$$m \leq \min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\} \leq M \dots \dots \textcircled{1}$$

ここで, $y = Ax + B$ について $a \leq x \leq b$ で

$$\min\{f(a), f(b)\} \leq Ax + B \leq \max\{f(a), f(b)\}$$

だから, これと ① より

$$m \leq Ax + B \leq M$$

$$\therefore -M \leq -(Ax + B) \leq -m$$

これと $m \leq f(x) \leq M$ を加えると

$$-M + m \leq f(x) - (Ax + B) \leq M - m$$

$$\therefore -(M - m) \leq f(x) - (Ax + B) \leq M - m$$

$$\therefore |f(x) - (Ax + B)| \leq M - m \quad [\text{証明終}]$$

【7】 (1) A, B を往復していればよいから,

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (\text{答})$$

(2) A, C のみを訪れている確率は p_n と等しい.

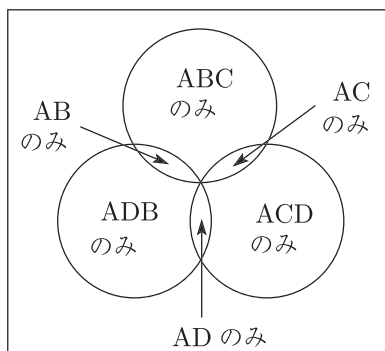
つまり, 求める確率は, A, B, C のみを訪れている場合から A, B のみ, および A, C のみを訪れている場合を除けばよいから,

$$q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (\text{答})$$

(3) 図 1 より,

$$r_n = 1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (\text{答})$$

図 1



M3JSA/M3JA/M3TA
選抜東大・医学部理系数学
東大理系数学
難関大理系数学Ⅰ



会員番号	
------	--

氏名	
----	--

不許複製