M3JSB/M3JB/M3TB

冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大文系数学

東大文系数学

難関大文系数学Ｔ

1 章　整数

問題

【1】x を 3 で割った余りで分類して考える．

▼ x が 3 の倍数のとき，$x = 3k + 5 \cdot 0$ より，

$x = 0, 3, 6, \cdots$ は，$k \geqq 0$ の下で $(m, n) = (k, 0)$ により表される．

▼ x が 3 で割ると 1 余る数のとき，$x = 3 \cdot (k-3) + 5 \cdot 2$ より，

$x = 10, 13, \cdots$ は $k \geqq 3$ の下で，$(m, n) = (k-3, 2)$ により表される．

▼ x が 3 で割ると 2 余る数のとき，$x = 3 \cdot (k-1) + 5 \cdot 1$ より，

$x = 5, 8, \cdots$ は $k \geqq 1$ の下で，$(m, n) = (k-1, 1)$ により表される．

したがって, 残るのは 1，2，4，7 である．ところが

▼ $3m$ のとりうる値は 0，3，6，9，⋯ であり，

▼ $5n$ のとりうる値は 0，5，10，15，⋯

であるから，明らかに 1，2，4，7 は $3m + 5n$ の形で表せない．

以上より，求める x の整数値は

$x = 1, 2, 4, 7.$　　(答)

＜別解＞

x をひとつ固定する．$m = 2x$, $n = -x$ は $x = 3m + 5n$ をみたす．

$x = 3m + 5n$ をみたす任意の解を $(m,\ n)$ とする．

$$3m + 5n = x,$$
$$3(2x) + 5(-x) = x.$$

この辺々を引いて，

$$3(m - 2x) + 5(n + x) = 0.$$

3 と 5 は互いに素なので，ある整数 t によって次のように表されるはずである：

$$m - 2x = -5t,$$
$$n + x = 3t.$$

つまり x を表す $(m,\ n)$ は整数 t によって次のように表される．

$$(m,\ n) = (2x - 5t,\ -x + 3t)$$

この $(m,\ n)$ が x を表すことも明らかである．

$m = 2x - 5t \geqq 0$, $n = -x + 3t \geqq 0$ なので

$$\frac{1}{3}x \leqq t \leqq \frac{2}{5}x$$

したがって，この範囲に整数 t が存在することと，x が非負整数 m, n を用いて表わせることが同値である．

ここで

$$\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}x \geqq 1$$

であるから，$x \geqq 15$ なら必ず条件をみたす整数 t がとれる．したがって

$$1 \leqq x \leqq 14$$

について調べれば十分である．

一方，

$3 \cdot 1+5 \cdot 1=8,$
$3 \cdot 3+5 \cdot 0=9,$
$3 \cdot 0+5 \cdot 2=10$

なので，m を 1 ずつ増やすことにより，8 以上の数はすべて表せる．

そこで $1 \leqq x \leqq 7$ について調べると

$x=1$ のとき　$0<\dfrac{1}{3}<\dfrac{2}{5}<1$　存在しない．

$x=2$ のとき　$0<\dfrac{2}{3}<\dfrac{4}{5}<1$　存在しない．

$x=3$ のとき　$\dfrac{3}{3}=1$　存在する．

$x=4$ のとき　$1<\dfrac{4}{3}<\dfrac{4}{5}<2$　存在しない．

$x=5$ のとき　$\dfrac{10}{5}=2$　存在する．

$x=6$ のとき　$\dfrac{6}{3}=2$　存在する．

$x=7$ のとき　$2<\dfrac{7}{3}<\dfrac{14}{5}<3$　存在しない．

したがって，表せないものは次の 4 つである．

$x=1,\ 2,\ 4,\ 7.$　　(答)

【2】 集合 $\{1, 2, \cdots, 2^n\}$ を E_n と表す．まず，$n=3$ として，

$E_3=\{1, 2, \cdots, 8\}$

について，実験してみる．E_3 を分割して

$A_3=\{1, 4, 6, 7\}$，　$B_3=\{2, 3, 5, 8\}$

とすると，

$$\begin{aligned} & f(1)+f(4)+f(6)+f(7) \\ =& a\left(1^2+4^2+6^2+7^2\right) \\ & +b(1+4+6+7)+4c \\ =& 102a+18b+4c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f(2)+f(3)+f(5)+f(8) \\ =& a\left(2^2+3^2+5^2+8^2\right) \\ & +b(2+3+5+8)+4c \\ =& 102a+18b+4c \end{aligned}$$

が成り立つ．

この実験から，題意の成立には，それぞれの集合の要素の，総和，および 2 乗の総和が等しければ十分であることが解る．

そこで一般に，集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ に対して，

▼関数値の和 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_k)$ を $\displaystyle\sum_{x \in A} f(x)$ で，

▼ 2 乗の和 $\displaystyle\sum_{x \in A} x^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$ を $Q(A)$ で，

▼ 1 次の和 $\displaystyle\sum_{x \in A} x=a_1+a_2+\cdots+a_k$ を $L(A)$ で

表すことにすると，与えられた関数 $f(x)$ について，$\#A=n$ とすれば

$$\sum_{x \in A} f(x)=a\,Q(A)+b\,L(A)+cn$$

であるから，2 つの集合 A と B について $\#A=\#B=n$ とすれば，

$$[Q(A)=Q(B)\wedge L(A)=L(B)]\Rightarrow\sum_{x\in A}f(x)=\sum_{x\in B}f(x)$$

が成り立つ．

そこで，要素の数が 2^n である集合 E_n を，それぞれ $\dfrac{2^n}{2}=2^{n-1}$ 個の要素をもつ 2 つの集合 A_n と B_n とに分割して，

$$Q(A_n)=Q(B_n),\quad L(A_n)=L(B_n)$$

とできることを，n に関する数学的帰納法により示す．ただし，$n\geqq 3$ とする．

(I) $n=3$ のときは，前出上の実験の通り，

$$A_3=\{1,4,6,7\},\quad B_3=\{2,3,5,8\}$$

とすれば，

$$L(A_3)=L(B_3),\quad Q(A_3)=Q(B_3)$$

より成立．

(II) $k\geqq 3$ なる正整数 k について，$n=k$ のとき成立を仮定する．

(IH)　集合 $E_k=\left\{1,2,\cdots,2^k\right\}$ について，E_k を互いに素であり，かつ対等な 2 つの集合 A_k と B_k に分割して，

$$L(A_k)=L(B_k),\quad Q(A_k)=Q(B_k)$$

とすることができる．

このとき，集合 A_k と B_k の要素の個数は，いずれも $\dfrac{2^k}{2}=2^{k-1}$ である．この値を l と置き，

$$A_k=\{a_1,a_2,\ldots,a_l\},\quad B_k=\{b_1,b_2,\ldots,b_l\}$$

とする．

$n=k+1$ のとき，

$$A_{k+1}=A_k\cup\{2l+a_1,2l+a_2,\cdots,2l+a_l\},$$
$$B_{k+1}=B_k\cup\{2l+b_1,2l+b_2,\cdots,2l+b_l\}$$

として，集合 A_{k+1},B_{k+1} を定めれば，この 2 つの集合は互いに素であり，また，1 次の和 L，2 次の和 Q が等しいことが次のように示される：

$$L(A_{k+1})=L(A_k)+l\cdot 2l+L(A_k)=2L(A_k)+2l^2,$$
$$L(B_{k+1})=L(B_k)+l\cdot 2l+L(B_k)=2L(B_k)+2l^2,$$
$$\therefore\ L(A_{k+1})=L(B_{k+1}).\quad\because\ \text{(IH)}$$
$$Q(A_{k+1})=Q(A_k)+l\cdot(2l)^2+2\cdot 2l\cdot L(A_k)+Q(A_k)=2Q(A_k)+4l^3+4lL(A_k),$$
$$Q(B_{k+1})=Q(B_k)+l\cdot(2l)^2+2\cdot 2l\cdot L(B_k)+Q(B_k)=2Q(B_k)+4l^3+4lL(B_k),$$
$$\therefore\ Q(A_{k+1})=Q(B_{k+1}).\quad\because\ \text{(IH)}$$

従って

$$\sum_{x\in A_{k+1}}f(x)=\sum_{x\in B_{k+1}}f(x)$$

が成り立つ．

以上 (I), (II) より，題意が成立することが示された．　　　　[証明終]

【3】

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx=Ax(x+1)(x+2)+Bx(x+1)+Cx$$

について

$f(-3)=-6A+6B-3C,$

$f(-2)=2B-2C,$

$f(-1)=-C$

がすべて整数であるから，$6A, 2B, C$ は整数である．以上より

任意の整数 n について $f(n)$ が整数ならば，整数 p, q, r が存在して，

$$f(x)=\frac{p}{6}x(x+1)(x+2)+\frac{q}{2}x(x+1)+rx$$

と表される

次に，十分性を示す．示すべき命題は

ある整数 p, q, r が存在して，

$$f(x)=\frac{p}{6}x(x+1)(x+2)+\frac{q}{2}x(x+1)+rx$$

と表されるとすれば，任意の整数 n について $f(n)$ は整数である

ことである．

ところが，n が整数のとき，$n(n+1)(n+2)$ は隣接 3 整数の積だから 6 の倍数，$n(n+1)$ は隣接 2 整数の積だから偶数である．従って，任意の整数 n について

$$6 \mid n(n+1)(n+2), \quad 2 \mid n(n+1)$$

が成り立つから，K_1, K_2 を整数として

$$f(n)=p\cdot K_1+q\cdot K_2+rn$$

は，任意の整数 n について整数になる．よって十分性が示された．

以上より，題意が成り立つ． ［証明終］

【4】(1) $y=x$ と $y=-x^2+k$ の交点を考えるために，2 式を連立して

$$x=-x^2+k \iff x^2+x-k=0.$$

この 2 次方程式の判別式を D として，

$$D=1+4k>0 \quad (\because\ k>0).$$

よって確かに異なる 2 個の実数解をもつから，それを α，β(ただし $\alpha<\beta$) とすれば，解と係数の関係より

$$\alpha\beta=-k<0.$$

これから α と β は異符号であり，$\alpha<0$, つまり 2 つのグラフは交点 (α, α) $(\alpha<0)$ をもつ． ［証明終］

(2) 2 つの関数 $y=\lfloor x\rfloor$ と $y=g(x)=-x^2+k$ のグラフを考える．

(1) より，$y=x$ と $y=g(x)$ のグラフは $x<0$ の範囲に共有点をもつ．それを $\mathrm{C}(\alpha, \alpha)$ とする．

n を整数として $\lfloor\alpha\rfloor=n$ とすれば，

$$n \leqq \alpha < n+1$$

が成り立つ．そこで，

Case 1. $\alpha=n\in\mathbb{Z}$,　Case 2. $n<\alpha<n+1$, つまり $\alpha\notin\mathbb{Z}$

に場合を分ける．

Case 1. α が整数のとき．$\alpha = n$ を整数とする．このとき，$\lfloor \alpha \rfloor = \alpha = n$ であるから，

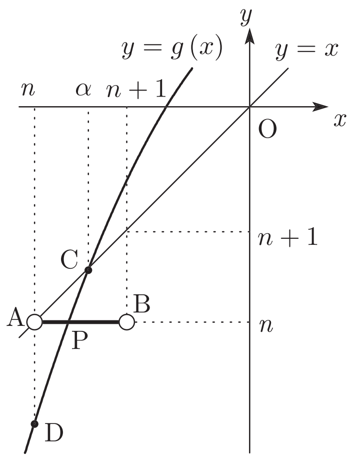
$$\lfloor \alpha \rfloor = -\alpha^2 + k \iff n = -n^2 + k \iff n^2 + n - k = 0$$

が成り立つ．(1) よりこの方程式は負の解をただ 1 個もつから，題意が成立する．

交点は (α, α)，つまり n を負の整数として (n, n).

Case 2. α が整数ではないとき．このとき，α は 2 つの整数 n と $n+1$ の間にある：$n < \alpha < n+1$.

図 1



$y = \lfloor x \rfloor$ の，$n < \alpha < n+1$ におけるグラフは，図 1 の線分 AB (ただし端点を除く) である．

$y = g(x)$ のグラフとこの開線分 AB が共有点をもつことを示す．

▼直線 $y = x$ と $y = g(x)$ との交点 $\mathrm{C}(\alpha, \alpha)$ について

$g(\alpha) = \alpha > n \quad \cdots ①$

▼また，$x < \alpha$ では $g(x) < x$ が成り立つから，$n < \alpha$ より

$g(n) < n \quad \cdots ②$

①と②より

$g(n) < n < g(\alpha)$

となるから，$\mathrm{C}(\alpha, g(\alpha))$，$\mathrm{D}(n, g(n))$ と，線分 AB との位置関係により，$y = g(x)$ のグラフと開線分 AB は 1 点 P を共有する． [証明終]

【5】(1) $\alpha = \dfrac{m}{n}$(m, n は互いに素な整数) と置くと，条件より

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 + a\left(\frac{m}{n}\right) + b = 0, \quad \therefore \quad \frac{m^2}{n} = -(am + bn)$$

右辺は整数だから，m^2 は n で割り切れるが，m と n は互いに素だから，$n = \pm 1$ に限る．従って $\alpha = \pm m$ となり，α は整数である． [証明終]

(2) $f(\alpha)=0$ だから，2 次方程式 $f(x)=x^2+ax+b=0$ は $x=\alpha$ を解にもつ．他の解を β とすれば，解と係数の関係から，

$\alpha+\beta=-a, \quad \therefore \quad \beta=-a-\alpha.$

よって β も整数である．

ゆえに，$f(x)$ はこの 2 整数 α，β を用いて

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

と因数分解できる

従って $f(l)=(l-\alpha)(l-\beta)$ となり，$f(l)$ は $l-\alpha$ で割り切れる．

同様に $f(l+1)$ は $(l+1-\alpha)$ で割り切れ，$f(l+2)$ は $(l+2-\alpha)$ で割り切れ，$\cdots$，$f(l+n-1)$ は $(l+n-1+\alpha)$ で割り切れる．

ゆえに，$f(l)f(l+1)f(l+2)\cdots\cdots f(l+n-1)$ はそれらの積

$$\begin{aligned}&(l-\alpha)(l+1-\alpha)(l+2-\alpha)\cdots\cdots(l+n-1-\alpha)\\=&(l-\alpha)(l-\alpha+1)(l-\alpha+2)\cdots\cdots(l-\alpha+n-1)\end{aligned}$$

で割り切れる．

右辺は $l-\alpha$ からはじまるひき続いた n 個の整数の積だから，どこかに n の倍数がある．ゆえに n 個の整数 $f(l)$，$f(l+1)$，$\cdots\cdots$，$f(l+n-1)$ の中には n で割り切れるものが少なくとも 1 つはある． [証明終]

２章　数列

問題

【1】与えられた条件式

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad \cdots\cdots①$$

より，

$$\begin{aligned}&a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}\\ &=\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}\\ &=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^n\\ &=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)\\ &=(a_n+2b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

であり，a_n，b_n は整数，$\sqrt{2}$ は無理数だから

$$a_{n+1}=a_n+2b_n,\quad b_{n+1}=a_n+b_n. \quad \cdots\cdots②$$

(1) 数学的帰納法による．

▼ $n=1$ のとき $a_1=b_1=1$ で与式は成立．

▼ $n=k$ のときに成立するとすれば

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1}=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^k$$

$$=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(a_k-b_k\sqrt{2}\right)=(a_k+2b_k)-(a_k+b_k)\sqrt{2}.$$

ここで，② より

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}$$

だから与式は $n=k+1$ のときにも成立する．よってすべての自然数 n に対して与式は成り立つ．　　[証明終]

(2) ② より，$n=1, 2, \cdots, 8$ で a_n，b_n はそれぞれ下表の値をとる．

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	3	7	17	41	99	239	577
b_n	1	2	5	12	29	70	169	408

ここで

$$239+169\sqrt{2}<1000<577+408\sqrt{2}$$

だから，求める最小の n は $n=8$　　(答)

(3) $\left(1-\sqrt{2}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ より

$$b_n\sqrt{2}=a_n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n \quad \cdots\cdots③$$

(i) n が偶数のとき，$0<\left(\sqrt{2}-1\right)^n<1$ だから，$b_n\sqrt{2}$ の小数部分は

$$1-\left(\sqrt{2}-1\right)^n$$

であるが，

$$1-\left(\sqrt{2}-1\right)^n \geqq 1-\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

であり

$$1-\left(\sqrt{2}-1\right)^2=2\sqrt{2}-2>2\times0.4=0.8$$

で，0.001 以下になることはない．

(ii) n が奇数のとき，$0<-\left(1-\sqrt{2}\right)^n<1$ だから，$b_n\sqrt{2}$ の小数部分は $-\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ である．ここで，

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}\right)^n=(-1)^n$$

だから，

$$-\left(1-\sqrt{2}\right)^n=\frac{-(-1)^n}{\left(1+\sqrt{2}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^n}=\frac{1}{a_n+b_n\sqrt{2}}$$

であり，$-\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ が 0.001 以下になる，すなわち

$$\frac{1}{a_n+b_n\sqrt{2}}\leqq0.001 \qquad \therefore\quad a_n+b_n\sqrt{2}\geqq1000$$

をみたす最小の n が求める n である．

ここで n が奇数であることに注意すると (2) より，題意をみたす n の値は

$n=9$ (答)

であり，b_9 を求めて

$b_9=a_8+b_8=985$ (答)

【2】(1) a_n と a_{n+3} の偶奇を考えると，

$$\begin{aligned}a_{n+3}&=3a_{n+2}-7a_{n+1}\\&=3\left(3a_{n+1}-7a_n\right)-7a_{n+1}\\&=2\left(a_{n+1}-11a_n\right)+a_n\end{aligned}$$

よって，a_n と a_{n+3} の偶奇は一致する．

$a_1=1$, $a_2=3$ より，$a_3=3\cdot3-7\cdot1=2$ であるから, a_n が偶数になるのは，n が 3 の倍数のときに限ることが示された． [証明終]

(2) a_n が 10 の倍数であるためには，a_n が偶数でかつ 5 の倍数であることが必要かつ十分である．

a_n が 5 の倍数になる条件を求める．$a_4=-15$ から推定して，(1) と同様に a_{n+4} を調べる．

$$\begin{aligned}a_{n+4}&=3a_{n+3}-7a_{n+2}\\&=3\left(3a_{n+2}-7a_{n+1}\right)-7a_{n+2}\\&=2\left(3a_{n+1}-7a_n\right)-21a_{n+1}\\&=-15\left(a_{n+1}+a_n\right)+a_n\end{aligned}$$

よって, a_n と a_{n+4} を 5 で割った余りは一致する．

a_1 から a_4 で 5 の倍数は a_4 のみである．これは, a_n が 5 の倍数になるのは，n が 4 の倍数のときに限ることを示している．

以上より，

a_n が 10 の倍数になる必要十分条件は，n が 12 の倍数となることである． (答)

【3】(1) $a_{n+1}-a_n=b_n$ とすれば，b_n は

$$n<\frac{x}{2}+y+z\leqq n+1 \quad \cdots(\#)$$

をみたす格子点 $(x,\,y,\,z)$ の個数である．

x の偶奇で場合を分ける．

(i) x が偶数で，x' を整数として $x=2x'$ ならば，式 (#) は

$$n < x'+y+z \leqq n+1, \quad \therefore\ x'+y+z=n+1$$

となる．$x'=k$ として k を固定する．このとき，

$$y+z=n+1-k$$

をみたす $(y,\,z)$ は

$$(y,\,z)=\ (0,\,n+1-k),\ (1,\,n-k),\ \cdots,\ (n-k,\,1),\ (n-k+1,\,0)$$

の $(n-k+2)$ 個存在する．

ここで k の固定を解いて，$k=0,\,1,\,\cdots,\,n+1$ と動かせば，この場合の格子点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(n-k+2) &= (n+2)(n+2)-\sum_{k=0}^{n+1}k\\ &=(n+2)^2-\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\\ &=\frac{1}{2}(n+2)(n+3) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

(ii) x が奇数で，x' を整数として $x=2x'+1$ と表されるとき，$\dfrac{x}{2}=x'+\dfrac{1}{2}$ であるから，式 (#) は

$$n < x'+\frac{1}{2}+y+z \leqq n+1 \Longleftrightarrow n-\frac{1}{2} < x'+y+z \leqq n+\frac{1}{2}$$

となり，

$$x'+y+z=n$$

が成り立つ．

(i) の場合と同様に考えて，n を $n-1$ に変えて和を求めれば

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad \cdots ②$$

b_n は①と②の和に等しいから

$$b_n=\frac{1}{2}(n+2)(n+3)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=(n+2)^2$$

従って，求める $a_{n+1}-a_n$ の値は

$$a_{n+1}-a_n=(n+2)^2 \qquad \textbf{(答)}$$

(2) (1) で数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を知ったから，これを利用する：

$n=0$ のときは，題意をみたす格子点は $\mathrm{O}\,(0,\,0,\,0)$ しかないから，$a_0=1$ である．

$n \geqq 1$ の下で $a_n=a_0+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}b_k$ より

$$\begin{aligned}a_n&=1+\sum_{k=0}^{n-1}(k+2)^2\\ &=1+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2\\ &=\sum_{j=1}^{n+1}j^2=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)\end{aligned}$$

$n=0$ のとき，この値は $\dfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$ となり，$a_0=1$ に一致するから，$n=0$

のときもこの結果は正しい．

以上より，任意の非負整数 n について

$a_n = \dfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$　　(答)

＜参考＞

(1) の (i) で，x', y, z が非負整数で，$x'+y+z=n+1$ であるから，これは 3 種から $(n+1)$ 個をとる重複組合せ ${}_3\mathrm{H}_{n+1}$ に等しく，

$${}_3\mathrm{H}_{n+1} = \binom{3+(n+1)-1}{n+1} = \binom{n+3}{2} = \frac{1}{2}(n+3)(n+2)$$

として計算できる．(ii) の $x'+y+z=n$ についても同様である．

【4】(1) 17 をさいころの目の数 1 から 6 で割った余り X_1 を表にすると次を得る：

1	2	3	4	5	6
0	1	2	1	2	5

そして，0，1，2，5 をさいころの目の数 1 から 6 で割った余りを表にすると次を得る：

	1	2	3	4	5	6
0 を割ったとき	0	0	0	0	0	0
1 を割ったとき	0	1	1	1	1	1
2 を割ったとき	0	0	2	2	2	2
5 を割ったとき	0	1	2	1	0	5

従って，X_1 の値に対して，$(X_2,\ X_3)$ の値の組と，2 回目，3 回目のさいころの目の出方の数を整理すると，題意をみたすのは

(i) $X_1=0$ のとき

$(0,\ 0) \cdots\ 6\times 6 = 36$(通り)．

(ii) $X_1=1$ のとき

$(0,\ 0) \cdots\ 1\times 6 = 6$(通り)，

$(1,\ 0) \cdots\ 5\times 1 = 5$(通り)．

(iii) $X_1=2$ のとき

$(0,\ 0) \cdots\ 2\times 6 = 12$(通り)，

$(2,\ 0) \cdots\ 4\times 2 = 8$(通り)．

(iv) $X_1=5$ のとき

$(0,\ 0) \cdots\ 2\times 6 = 12$(通り)，

$(1,\ 0) \cdots\ 2\times 1 = 2$(通り)，

$(2,\ 0) \cdots\ 1\times 2 = 2$(通り)，

$(5,\ 0) \cdots\ 1\times 2 = 2$(通り)．

従って，$X_3=0$ となる目の出方の合計は 1 回目の目の出方を考慮して

$1\times 36 + 2\times(6+5) + 2\times(12+8) + 1\times(12+2+2+2)$

$=116$(通り)

であるから，求める確率は

$\dfrac{116}{6^3} = \dfrac{29}{54}$　　(答)

(2) (1) の表より，$X_n=5$ となるのは，n 回とも 6 の目が出るときで，その確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n \qquad \text{(答)}$$

(3) $X_n=1$ となる確率を p_n とすると，(1) の表より

$$p_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

また，$n \geqq 1$ のとき，$X_{n+1}=1$ となるのは

▼ $X_n=1$ で 2 から 6 の目がでる，

▼ $X_n=5$ で 2 または 4 の目が出る

のいずれかだから

$$p_{n+1}=\frac{5}{6}p_n+\frac{2}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ.

そこで，① の両辺に 6^n をかけると

$$6^n p_{n+1}=5\cdot 6^{n-1}p_n+\frac{1}{3}$$

$6^{n-1}p_n=q_n$ とおくと

$$q_{n+1}=5q_n+\frac{1}{3},$$

$$\therefore \quad q_{n+1}+\frac{1}{12}=5\left(q_n+\frac{1}{12}\right)$$

となり，数列 $\left\{q_n+\frac{1}{12}\right\}$ は初項

$$q_1+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

公比 5 の等比数列だから

$$q_n+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}\cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore \quad q_n=\frac{5^n-1}{12}$$

従って，$p_n=\dfrac{q_n}{6^{n-1}}$ より

$$p_n=\frac{5^n-1}{2\cdot 6^n} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 3 倍角公式を導いて用いる.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta-1)\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

また，倍角公式を 2 度用いて，

$$\begin{aligned}\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 &= 2(2\cos^2\theta-1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

なので，求める整式は

$$f(x) = 4x^3 - 3x, \quad g(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \qquad \text{(答)}$$

(2) $3\alpha + 4\alpha = 7\alpha = 360^\circ$ だから

$$\cos 3\alpha = \cos(360^\circ - 4\alpha) = \cos(-4\alpha) = \cos 4\alpha$$

従って，(1) の $f(x)$, $g(x)$ を用いると

$$f(\cos\alpha) = g(\cos\alpha)$$

なので

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

であり, これを変形すると

$$\begin{aligned}&8\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &(\cos\alpha - 1)(8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1) = 0\end{aligned}$$

となる．ここで明らかに $\cos\alpha - 1 \fallingdotseq 0$ であるから

$$8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1 = 0, \quad \therefore\ P(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 \qquad \text{(答)}$$

(3) $0 < \cos\alpha < 1$ であるから, $P(x)$ の $0 < x < 1$ における増減を調べる.

$$P'(x) = 24x^2 + 8x - 4 = 24\left(x - \frac{-1-\sqrt{7}}{6}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)$$

であり,

$$\frac{-1-\sqrt{7}}{6} < 0 < \frac{-1+\sqrt{7}}{6} < 1$$

なので, 増減は下表のようになる：

x	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$	1
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

そして

$$P(0) = -1 < 0, \quad P(1) = 7 > 0$$

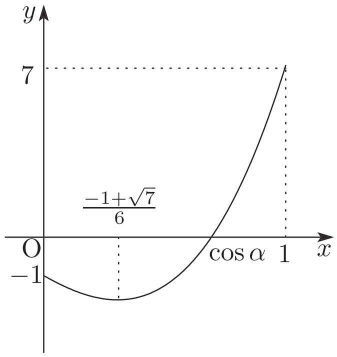
であるから, $y = P(x)$ のグラフは図 1 のようになる.

このグラフと,

$$\begin{aligned}P(0.6) &= 8\cdot 0.216 + 4\cdot 0.36 - 4\cdot 0.6 - 1 \\ &= -0.232 \ < \ 0,\end{aligned}$$

$$P(0.7) = 8\cdot 0.343 + 4\cdot 0.49 - 4\cdot 0.7 - 1$$

図 1



$$= 0.904 \ > \ 0$$

から

$$0.6 < \cos\frac{360°}{7} < 0.7$$

[証明終]

【2】 $y=f(x)$ のグラフを C_1，$y=g(x)$ のグラフを C_2 とする．

まず $g(x)$ を求める．$f'(x)=2x$ であるから，

$$g(x) = \left(x^2+b\right)\cdot 2x - 2x + 1 = 2x^3 + 2(b-1)x + 1$$

C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$2x^3 + 2(b-1)x + 1 = x^2 + b \Longleftrightarrow 2x^3 - x^2 + 2(b-1)x + 1 - b = 0 \quad \cdots(\#)$$

の解である．

題意より，(#) は 2 つの異なる実数解をもつ．ところが，実数係数の 3 次方程式は

▼ 重複を許して 3 個の実数解をもつか，

▼ 1 つの実数解と 2 つの虚数解をもつか

のいずれかに限るから，共有点が 2 個であることにより

3 次方程式 (#) は実数の 2 重解 α と実数の単解 β をもつ ($\alpha \neq \beta$).

(#) についての解と係数の関係により

$$\alpha+\alpha+\beta = -\frac{-1}{2} \qquad \therefore \quad 2\alpha+\beta = \frac{1}{2}\cdots①$$

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha = \frac{2(b-1)}{2} \qquad \therefore \quad \alpha^2+2\alpha\beta = b-1\cdots②$$

$$\alpha\alpha\beta = -\frac{1-b}{2} \qquad \therefore \quad \alpha^2\beta = \frac{b-1}{2}\cdots③$$

②より $b=\alpha^2+2\alpha\beta+1$ で，③より

$$2\alpha^2\beta = \alpha^2+2\alpha\beta \Longleftrightarrow \alpha(2\alpha\beta-\alpha-2\beta)=0$$

となるから，$\alpha=0$ または $2\alpha\beta-\alpha-2\beta=0$ のいずれかが成り立つ．

(i) $\alpha=0$ のとき，①より $\beta=\dfrac{1}{2}$，②より $b=1$ となる．

このとき，$\begin{cases} f(x)=x^2+1, \\ g(x)=2x^3+1 \end{cases}$ となるが，$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$ より，共有点の y 座標が等しいことに反するから，不適．

(ii) $2\alpha\beta-\alpha-2\beta=0 \iff 2\beta(\alpha-1)-\alpha=0$ のとき，①より $2\beta=1-4\alpha$ だから

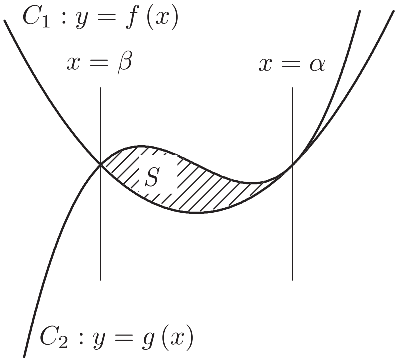
$$(1-4\alpha)(\alpha-1)-\alpha=0 \iff (2\alpha-1)^2=0 \iff \alpha=\frac{1}{2}$$

となり，$\beta=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{4}$

よってこのとき，$\begin{cases} f(x)=x^2+\dfrac{3}{4}, \\ g(x)=2x^3-\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases}$ となる．$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$ より，題意に適する．

以上より，$C_1: y=f(x)$，$C_2: y=g(x)$ を図示して，図 2 を得る．

図 2



求める面積はこの S であるから，

$$S=\int_\beta^\alpha \{g(x)-f(x)\}\,\mathrm{d}x$$

で求められる．ところが，被積分関数 $g(x)-f(x)$ は，3 次方程式 (#) の左辺であり，それが $x=\alpha=\frac{1}{2}$ を 2 重解に，また $x=\beta=-\frac{1}{2}$ を単解にもち，かつ 3 次の項の係数が 2 であることから，

$$g(x)-f(x)=2(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

と因数分解されることが解る．したがって

$$\begin{aligned} S&=\int_\beta^\alpha 2(x-\alpha)^2(x-\beta)\,\mathrm{d}x \\ &=2\int_\beta^\alpha (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,\mathrm{d}x \\ &=2\int_\beta^\alpha \left\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right\}\mathrm{d}x \\ &=2\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-\frac{\beta-\alpha}{3}(x-\alpha)^3\right]_\beta^\alpha \\ &=2\cdot\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \end{aligned}$$

$\beta-\alpha=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-1$ であるから，求める面積 S は

$S=2\cdot\dfrac{1}{12}(-1)^4=\dfrac{1}{6}$　　(答)

【3】(1) $C: y=x^2$ 上に点 $\left(t,\, t^2\right)$ をとる．$y=x^2$ を微分して $y'=2x$ であるから，この点における接線の傾きは $2t$ であり，従って接線の方向ベクトルは $\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}$ である．

図 3 ：接線の方向ベクトル

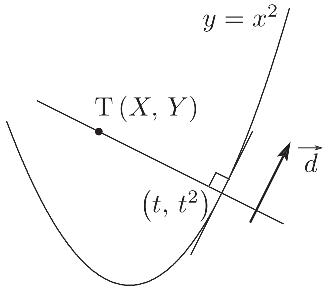


図 3 のように，接線の方向ベクトル $\overrightarrow{d}$ は，この点 $\left(t,\, t^2\right)$ における法線の法線ベクトルでもあるから，法線上の任意の点 $(x,\, y)$ について

$$\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-t\\y-t^2\end{pmatrix}=0$$

が成り立つ．

これを整理して，法線の方程式は

$x-t+2t\left(y-t^2\right)=0 \Longleftrightarrow x+2ty-2t^3-t=0$　　(答)

(2) $C: y=x^2$ 上の 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ の x 座標を，それぞれ t_1，t_2，t_3 とする．

点 P で引いた法線が点 $\mathrm{T}\,(X,\,Y)$ を通るから，(1) で得た法線の方程式に $t=t_1$，$x=X$，$y=Y$ を代入したときに成り立つ，つまり

$X+2t_1Y-2t_1^3-t_1=0$　$\cdots$①

同様に，点 $\mathrm{Q}\left(t_2,\, t_2^2\right)$ で引いた法線，点 $\mathrm{R}\left(t_3,\, t_3^2\right)$ で引いた法線が点 $\mathrm{T}\,(X,\,Y)$ を通ることから

$X+2t_2Y-2t_2^3-t_2=0$　$\cdots$②

$X+2t_3Y-2t_3^3-t_3=0$　$\cdots$③

が成り立つ．

①, ②, ③を t についての条件と考えれば，t についての 3 次方程式

$X+2tY-2t^3-t=0 \Longleftrightarrow 2t^3-(2Y-1)\,t-X=0$　$\cdots(\#)$

が，異なる 3 個の実数解 $t=t_1,\, t_2,\, t_3$ をもつことを意味する．

従って，題意の成立には，

t の 3 次方程式 $(\#)$ が異なる 3 個の実数解をもつこと

が必要かつ十分である．更にこの条件は，$(\#)$ の左辺を $f\,(t)$ とするとき，

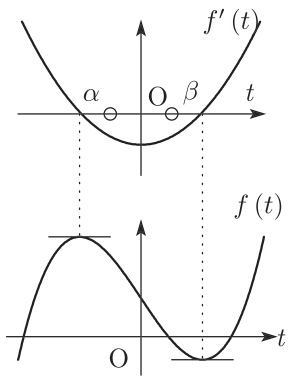
関数 $f\,(t)$ のグラフが t 軸と異なる 3 点を共有すること

と同値であり，更にそれは，

関数 $f(t)$ が極値をもち，それが異符号であること

と同値である．以下，この条件を求める．

図 4 ：$f'(t)$ と $f(t)$



関数

$f(t) = 2t^3 - (2Y-1)t - X$

を微分して

$f'(t) = 6t^2 - (2Y-1)$

を得る．$f(t)$ が極値をもつことが必要だから，2 次方程式 $f'(t) = 0$ は 2 つの異なる実数解をもつ．従って

$2Y - 1 > 0 \iff Y > \dfrac{1}{2}$

この条件の下で，$f'(t) = 0$ の 2 実数解を α，β(ただし$\alpha < \beta$) とすると，

▼ 関数 $f(t)$ の極大値は $f(\alpha) = 2\alpha^3 - (2Y-1)\alpha - X$ であり，

▼ 関数 $f(t)$ の極小値は $f(\beta) = 2\beta^3 - (2Y-1)\beta - X$ である．

ここで，α, β は $6t^2 - (2Y-1) = 0$ の解であるから，

$6\alpha^2 - (2Y-1) = 0, \quad 6\beta^2 - (2Y-1) = 0 \iff 2Y - 1 = 6\alpha^2 = 6\beta^2$

が成り立つ．よって

▼ 極大値 $f(\alpha) = 2\alpha^3 - 6\alpha^3 - X > 0 \quad \therefore X < -4\alpha^3$

▼ 極小値 $f(\beta) = 2\beta^3 - 6\beta^3 - X < 0 \quad \therefore X > -4\beta^3$

ところが，$\beta = -\alpha$ であるから，これをまとめて

$-4\beta^3 < X < 4\beta^3 \iff \left|X\right| < 4\beta^3 \iff X^2 < 16\beta^6$

を得る．これに $\beta^2 = \dfrac{2Y-1}{6}$ を代入して

$X^2 < 16 \cdot \dfrac{(2Y-1)^3}{6^3} = \dfrac{2}{27}(2Y-1)^3$

これは，必要条件 $Y > \dfrac{1}{2}$ をみたす．

以上より，X と Y に関する求める条件は

$X^2 < \dfrac{2}{27}(2Y-1)^3$ 　　(答)

(3) 放物線 C 上の 3 点を $\mathrm{P}\left(t_1,\, t_1^2\right)$，$\mathrm{Q}\left(t_2,\, t_2^2\right)$，$\mathrm{R}\left(t_3,\, t_3^2\right)$ とする．△PQR の重心を $\mathrm{G}\,(U,\, V)$ とすれば，

$$U = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, \quad V = \frac{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}{3}$$

である．

ここで，$t_1,\, t_2,\, t_3$ は 3 次方程式

$$(\#) \quad 2t^3 - (2Y-1)t - X = 0$$

の 3 解であるから，解と係数の関係により

$$t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{0}{2} = 0, \quad t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{-(2Y-1)}{2} = -\frac{1}{2}(2Y-1)$$

が成り立つ．

よって

$$U = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \left\{ (t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2\,(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 0 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (2Y-1) \right\} = \frac{2Y-1}{3} \end{aligned}$$

△PQR の存在，つまり法線が 1 点に会する異なる 3 点 P, Q, R の存在には，(2) での考察から $Y > \dfrac{1}{2}$ が必要であるから，

$$3V = 2Y - 1 > 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

である．以上より，△PQR の重心 $\mathrm{G}\,(U,\, V)$ について，

$$U = 0,\ V > 0$$

が成り立つから，求める G の軌跡は

y 軸の正の部分　　(答)

【4】 $u=-x^3+3x$ だから，$y=-x^3+3x$ と $y=u$ の交点の x 座標が，$x^3-3x+u=0$ の解である．ここで，

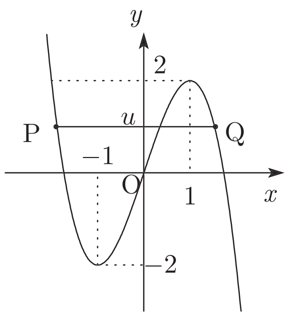
$$y'=-3(x-1)(x+1)$$

より，$y'=-x^3+3x$ の増減表は下のようになる．

x		-1		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$

従って，$y=-x^3+3x$ のグラフとして，図 5 を得る．

図 5

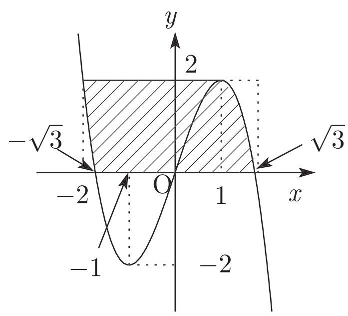


$f_1(u)-f_2(u)$ の値は，図 5 の線分 PQ の長さに他ならないから，

$$\int_0^2 \{f_1(u)-f_2(u)\}\,\mathrm{d}u$$

の値は図 6 の斜線部の面積となる．

図 6 ：面積としての積分



よって，求める値は，

$$2\times\{1-(-2)\}-\int_{-2}^{-\sqrt{3}}(-x^3+3x)\,\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{3}}(-x^3+3x)\,\mathrm{d}x\cdots\cdots①$$

に等しく，C を積分定数として

$$\int(-x^3+3x)\,\mathrm{d}x=-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+C$$

だから，①は，

$$6-\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{-\sqrt{3}}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2\right]_{1}^{\sqrt{3}}$$

$$=6-\left(-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}+\frac{16}{4}-\frac{3}{2}\cdot 2^2\right)+\left(-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=6+2-\frac{5}{4}$$

$$=\frac{27}{4}$$ (答)

問題

【1】P $\left(p,\, p^3\right)$ と置く．このとき, $y=x^3$ より $y'=3x^2$ なので, 点 P における曲線 C の接線の傾きは $3p^2$ である．よって, 接線と x 軸正方向のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta < 90^\circ)$ と置けば

$$\tan\theta = 3p^2$$

このとき, 接線を反時計回りに 45° 回転させた直線 L の傾きは

$$\tan(\theta+45^\circ) = \frac{\tan\theta+\tan 45^\circ}{1-\tan\theta\tan 45^\circ} = \frac{1+3p^2}{1-3p^2}$$

である．ここで, $3p^2=1$ のときは

$$L \mathbin{/\!/} (y \text{ 軸})$$

となり, C と L は相異なる 3 点で交わることはない．よって, $3p^2 \fallingdotseq 1$ であり

$$L: y-p^3 = \frac{1+3p^2}{1-3p^2}(x-p)$$

これと $C: y=x^3$ を連立させると

$$\begin{aligned} & x^3-p^3 = \frac{1+3p^2}{1-3p^2}(x-p) \\ \Leftrightarrow\ & \left(1-3p^2\right)(x-p)\left(x^2+xp+p^2\right) = \left(1+3p^2\right)(x-p) \\ \Leftrightarrow\ & (x-p)\left\{\left(1-3p^2\right)x^2+p\left(1-3p^2\right)x-\left(3p^4+2p^2+1\right)\right\}=0 \end{aligned}$$

を得る．

題意は，この方程式が相異なる 3 つの実数解をもつことと同値であるから，そのような p の値の範囲を求める．そこで

$$f(x) = \left(1-3p^2\right)x^2+p\left(1-3p^2\right)x-\left(3p^4+2p^2+1\right)$$

と置き, $f(x)=0$ の判別式を D とすれば, 成り立つべき条件は

$$f(p) \fallingdotseq 0 \text{ かつ } D>0$$

まず

$$\begin{aligned} f(p) &= p^2\left(1-3p^2\right)+p^2\left(1-3p^2\right)-\left(3p^4+2p^2+1\right) \\ &= -9p^4-1 \ < \ 0 \quad (\because p^4 \geqq 0) \end{aligned}$$

なので, $f(p) \fallingdotseq 0$ はつねに成り立つ．また

$$\begin{aligned} D &= \left\{p\left(1-3p^2\right)\right\}^2+4\left(1-3p^2\right)\left(3p^4+2p^2+1\right) \\ &= \left(1-3p^2\right)\left\{p^2\left(1-3p^2\right)+4\left(3p^4+2p^2+1\right)\right\} \\ &= \left(1-3p^2\right)\left(9p^4+9p^2+4\right) \end{aligned}$$

であり, $p^2 \geqq 0$ より $9p^4+9p^2+4>0$ なので

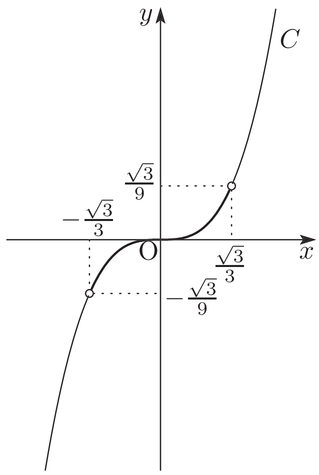
$$1-3p^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad |p| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

以上より, P の存在する範囲は

$$\text{曲線 } y=x^3 \quad \left(\text{ただし } |x| < \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad \text{(答)}$$

であり, これを図示すると次図の太い実線部分になる．ただし, 白丸の点を含まない．

図 1



【2】(1) 3 点 B, C, P の座標を次のようにおく.

$$\begin{cases} \mathrm{B}(\cos\alpha,\ \sin\alpha) & (0 \leqq \alpha < 360^\circ) \\ \mathrm{C}(\cos\beta,\ \sin\beta) & (0 \leqq \beta < 360^\circ) \\ \mathrm{P}(x,\ y) & (x^2+y^2=1) \end{cases}$$

このとき,

$$\begin{aligned} &\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2 \\ &= (x-1)^2+y^2+(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2+(x-\cos\beta)^2+(y-\sin\beta)^2 \\ &= 3\left(x^2+y^2\right)-2(\cos\alpha+\cos\beta+1)x-2(\sin\alpha+\sin\beta)y+3 \\ &= 6-2(\cos\alpha+\cos\beta+1)x-2(\sin\alpha+\sin\beta)y \quad (\because x^2+y^2=1) \end{aligned}$$

これが $x^2+y^2=1$ をみたす任意の実数 $x,\ y$ に対して一定の値をとることから,

$$\cos\alpha+\cos\beta+1=0, \quad \sin\alpha+\sin\beta=0$$

よって,

$$\begin{cases} \cos\beta=-\cos\alpha-1 & \cdots ① \\ \sin\beta=-\sin\alpha & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ.

$\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$ にそれぞれ代入して,

$$(-\cos\alpha-1)^2+(-\sin\alpha)^2=1 \qquad \therefore \quad \cos\alpha=-\frac{1}{2}$$

これと①より,

$$\cos\alpha=\cos\beta=-\frac{1}{2}$$

よって, $\alpha,\ \beta$ はともに $120^\circ,\ 240^\circ$ のいずれかであるから, ②に注意すると,

$$(\alpha,\ \beta)=(120^\circ,\ 240^\circ), \quad (240^\circ,\ 120^\circ)$$

従って, 求める B, C の座標は,

$$\mathrm{B}\ \left(-\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \mathrm{C}\ \left(-\frac{1}{2},\ \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{(複号同順)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 対称性から, B, C の座標をそれぞれ

$$\mathrm{B}\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{C}\ \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とし, かつ P が劣弧 AB 上にあるとしても一般性を失わない.

このとき,

$$\angle\mathrm{POA} = \theta$$

とおくと,

$$0 \leqq \theta \leqq 120^\circ \quad \cdots ③$$

さて, PA の中点を H とすると,

$$\mathrm{PA} = 2\mathrm{PH} = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}\mathrm{PB} &= 2\sin\frac{1}{2}(120^\circ - \theta)\ =\ 2\sin\left(60^\circ - \frac{\theta}{2}\right)\\ &= 2\left(\sin 60^\circ\cos\frac{\theta}{2} - \cos 60^\circ\sin\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\mathrm{PC} &= 2\sin\frac{1}{2}(240^\circ - \theta)\ =\ 2\sin\left(120^\circ - \frac{\theta}{2}\right)\\ &= 2\left(\sin 120^\circ\cos\frac{\theta}{2} - \cos 120^\circ\sin\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

従って, これら 3 式より,

$$\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC} = 2\sin\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} = 4\sin\left(\frac{\theta}{2} + 60^\circ\right) \quad \cdots ④$$

一方, ③より,

$$60^\circ \leqq \frac{\theta}{2} + 60^\circ \leqq 120^\circ \quad \cdots ⑤$$

よって, ⑤の範囲における④の最大値と最小値を求めて

$$\begin{cases}\text{最大値} : 4 & \left(\dfrac{\theta}{2} + 60^\circ = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 60^\circ\ \text{のとき}\right)\\ \text{最小値} : 2\sqrt{3} & \left(\dfrac{\theta}{2} + 60^\circ = 60^\circ,\ 120^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0,\ 120^\circ\ \text{のとき}\right)\end{cases}$$ (答)

【3】(1) $\pi : ax + by + cz = d$ とすれば,

▼ A (1, 0, 0) を通るから $a = d$,

▼ B (0, 1, 0) を通るから $b = d$,

▼ C (0, 0, 1) を通るから $c = d$

となる. よって, $dx + dy + dz = d$ となるが, $d = 0$ のときは平面を表さないから, $d \neq 0$ であり, 従って平面 π の方程式は

$$\pi : x + y + z = 1$$ (答)

(2) 平面 π の法線ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とすれば，$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．図 3 のように，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の $\overrightarrow{n}$ への正射影を $\overline{\mathrm{AK}}$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\overline{\mathrm{AK}} = \frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{t}{\sqrt{3}}$$

となり，正射影ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \overline{\mathrm{AK}} \frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

図 2

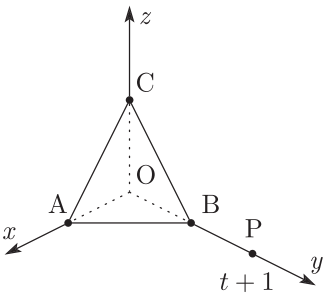
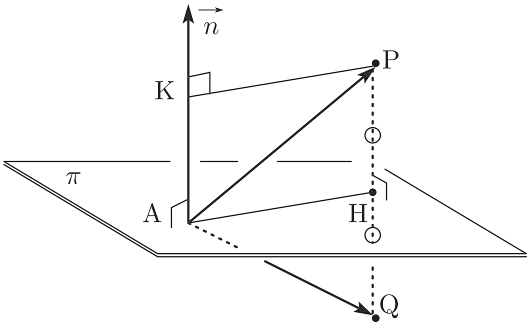


図 3 ：鏡映対称点



平面 π に関する，点 P の鏡映対称点を Q とすれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AK}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2t \\ t+3 \\ -2t \end{pmatrix}$$

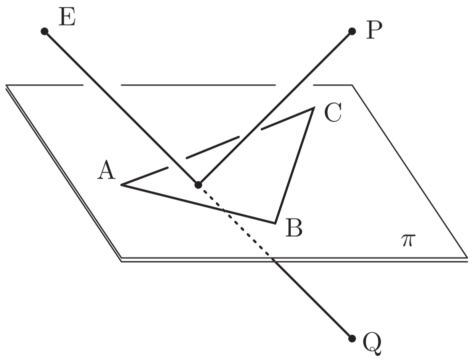
となり，点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(-\frac{2t}{3}, \frac{t}{3}+1, -\frac{2t}{3}\right)$ 　　(答)

(3) 線分 AQ の A 方向への延長線上に点 E をとる．直線 EQ が △ABC の内部及び周上と共有点をもつ条件を求める．図 4 を参照のこと．

$\overrightarrow{\mathrm{EQ}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{EQ}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2t \\ t+3 \\ -2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2t-15 \\ t+15 \\ -2t-9 \end{pmatrix}$$

図 4 ：反射と直進



であるから，直線 EQ 上の点 (X, Y, Z) は，k をパラメータとして

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} + k\overrightarrow{\mathrm{EQ}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2t-15 \\ t+15 \\ -2t-9 \end{pmatrix}$$

と表される．よって

$$X = 5 + k\left(-\frac{2t}{3} - 5\right), \quad Y = -4 + k\left(\frac{t}{3} + 5\right), \quad Z = 3 + k\left(-\frac{2t}{3} - 3\right)$$

であり，これが平面 $\pi : x + y + z = 1$ 上にあるとき，代入して

$$4 + k(-t-3) = 1 \iff k = \frac{3}{t+3}$$

を得る．よって X, Y, Z は

$$X = \frac{3t}{t+3}, \quad Y = \frac{-3t+3}{t+3}, \quad Z = \frac{t}{t+3}$$

となる．

点 (X, Y, Z) が $\triangle$ABC の内部または周上にあるためには，$X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ Z \geqq 0$ であることが必要かつ十分で，

$$\frac{3t}{t+3} \geqq 0, \quad \frac{-3t+3}{t+3} \geqq 0, \quad \frac{t}{t+3} \geqq 0$$

$$\iff 3t(t+3) \geqq 0, \quad (-3t+3)(t+3) \geqq 0, \quad t(t+3) \geqq 0, \quad t+3 \neq 0$$

$$\iff (t < -3 \lor 0 \leqq t) \land -3 < t \leqq 1$$

$$\iff 0 \leqq t \leqq 1$$

よって求める t の範囲は $0 \leqq t \leqq 1$　　(答)

【4】(1) $PQ=t(0<t<a)$ とおくと，条件より $RQ=SQ=\sqrt{a^2-t^2}$ 四面体 PQRS の体積 V は

$$V=\frac{1}{6}RQ\cdot QS\cdot PQ=\frac{1}{6}t(a^2-t^2)$$

これを t の関数と考えて，t で微分すると

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{6}(a^2-3t^2)$$

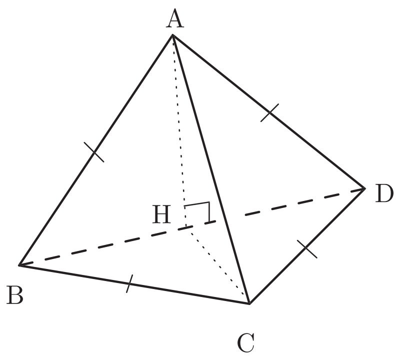
を得るから，増減表は次になる：

t	0	$\cdots$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	a
$\frac{dV}{dt}$		$+$		$-$	
V		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

したがって $t=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ のとき V は最大となり，V の最大値は，$V=\dfrac{\sqrt{3}}{27}a^3$

(2) 四面体 ABCD が，図 5 のようであったとする．

図 5



まず，辺 A から 辺 BD に下ろした垂線の足を H とするとき，BD$\perp\triangle$ ACH を示す．

$\triangle$ ABH $\equiv\triangle$ ADH

($AB=AD$, AH は共通, $\angle AHB=\angle AHD=90^\circ$)

なので $BH=DH$. よって

$\triangle$ CBH $\equiv\triangle$ CDH(3 辺相等)

$\therefore\quad\angle CHB=\angle CHD=90^\circ$

$\therefore\quad BD\perp CH$

これと BD$\perp$AH より BD$\perp$面 ACH が成り立つ．

したがって，四面体 ABCD は面 ACH によって 2 つの合同な四面体に 2 等分される．

$BH=t$ とおくと $AH=CH=\sqrt{a^2-t^2}$. ここで t を固定して考えると，変化しうるのは AC の長さ，つまり $\angle AHC$ の大きさのみであるから，固定された t に対し，2 つの四面体 BHAC，DHAC の体積は，その底面積 $\triangle$ ACH が最大のとき最大となる．

$\triangle$ACH の面積について，

$$\triangle\,\mathrm{AHC}=\frac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{CH}\sin\angle\mathrm{AHC}=\frac{1}{2}\left(a^2-t^2\right)\sin\angle\mathrm{AHC}$$

よって，この面積が最大となるのは，$\angle\mathrm{AHC}=90^\circ$ のときである．

以上より，$\angle\mathrm{BHA}=\angle\mathrm{BHC}=\angle\mathrm{AHC}=90^\circ$ が成り立つから，この四面体は (1) で考察した条件をみたす．t を動かすとき，(1) で調べたように四面体 BHAC の体積は $t=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{27}a^3$ をとる．

したがって，四面体 ABCD の最大値は

$$\frac{2\sqrt{3}}{27}a^3 \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】与えられた 3 次方程式

$z^3 - 2|z| + 1 = 0 \quad \cdots ①$

をみたす実数でない z を

$z = x + \mathbf{i}y$ (x, y は実数, $y \fallingdotseq 0$)

とおくと，①の左辺の実部と虚部について，

$$(x+\mathbf{i}y)^3 - 2\sqrt{x^2+y^2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3 - 3xy^2 - 2\sqrt{x^2+y^2} + 1\right) + \mathbf{i}\left(3x^2y - y^3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 - 2\sqrt{x^2+y^2} + 1 = 0 & \cdots ② \\ 3x^2y - y^3 = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

$y \fallingdotseq 0$ なので，③より

$y^2 = 3x^2 \quad \cdots ④$

これを②に代入して，y を消去すれば

$$8x^3 + 4\sqrt{x^2} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad 8x^3 + 4|x| - 1 = 0 \quad \cdots ⑤$$

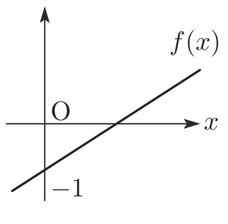
ここで $x = 0$ とすると，⑤から $-1 = 0$ となり矛盾．従って $x \fallingdotseq 0$ である．

そこで, $x > 0$, $x < 0$ で分けて考える．

(i) $x > 0$ のとき；⑤から,

$$8x^3 + 4x - 1 = 0 \quad \cdots ⑥$$

図 1: $x > 0$ のとき



$f(x) = 8x^3 + 4x - 1$ とおくと,

$f'(x) = 24x^2 + 4 > 0$

よって $f(x)$ のグラフは常に増加する．また,

$f(0) = -1 < 0$

よって⑥はただ 1 つの正の実数解をもつ．図 1 を参照のこと．このとき④より，y の値は 2 つ定まる．すなわち z は 2 つ存在する．

(ii) $x < 0$ のとき；⑤は,

$$8x^3 - 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\left(4x^2 - 2x - 1\right) = 0$$

$$\therefore \quad x = -\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

となり, x は 2 つ定まる．このとき④より，y はこの各々の値に対して 2 つずつ,

計 4 つ定まる．すなわち z は 4 つ存在する．

以上から, ①をみたす実数でないものは, 6 個である．　　(答)

【2】2 つの解法を与えておく．

Solution 1.

集合 E の任意の元を α とすると，E が乗法について閉じていることから，

$\alpha^2 \in E, \quad \alpha^2 \cdot \alpha = \alpha^3 \in E, \quad \alpha^3 \cdot \alpha = \alpha^4 \in E$

となり，E は $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4$ を要素にもつ．ところが $\#E = 3$ であるから，これら 4 個の内には等しいものがある．したがって，次の 6 個の方程式のうちいずれかが成り立つ：

① : $\alpha = \alpha^2$,　② : $\alpha = \alpha^3$,　③ : $\alpha = \alpha^4$,

④ : $\alpha^2 = \alpha^3$,　⑤ : $\alpha^2 = \alpha^4$,　⑥ : $\alpha^3 = \alpha^4$.

ただし，① ⇒ ④,　① ⇒ ⑥,　② ⇒ ⑤ であるから，①,②,③を考えれば十分である．

▼ ①のとき，$\alpha = 0,\ 1$

▼ ②のとき，$\alpha = 0,\ 1,\ -1$

▼ ③のとき，$\alpha = 0,\ 1,\ \omega,\ \omega^2$

であるから，E は 5 個の値からなる集合 $C = \left\{0,\ 1,\ -1,\ \omega,\ \omega^2\right\}$ の部分集合である．ここで，ω は 1 の虚数立方根の内の一方である．

まず，1 は①,②,③のすべてをみたすから，$1 \in E$ である．

▼ $-1 \in E$ ならば $(-1)^2 = 1 \in E$ となるから，

$-1 \in E \Rightarrow E = \{0,\ 1,\ -1\}$

▼ $\omega \in E$ ならば，$\omega^2 \in E,\ \omega^3 = 1 \in E$ となるから，

$\omega \in E \Rightarrow E = \left\{\omega,\ \omega^2,\ 1\right\}$

以上より，求める集合 E は $E = \{0,\ 1,\ -1\}\,,\ \left\{1,\ \omega,\ \omega^2\right\}$　　(答)

Solution 2. $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を相異なる 3 個の複素数とする．積 $\alpha\beta\gamma$ の値が 0 か否かで場合を分ける．

Case 1.　$\alpha\beta\gamma \neq 0$ のとき，E が乗法について閉じているから $\alpha^2,\ \alpha\beta,\ \alpha\gamma$ も E の要素であり，かつ α, β, γ がそれぞれ異なることから，$\alpha^2,\ \alpha\beta,\ \alpha\gamma$ もそれぞれ異なる複素数である．よって

$\left\{\alpha^2,\ \alpha\beta,\ \alpha\gamma\right\} = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$

要素の積を作れば，それは等しいから，

$\alpha^3(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma \quad \therefore\ \alpha^3 = 1 \quad (\because\ \alpha\beta\gamma \neq 0)$

よって α は $1,\ \omega,\ \omega^2$ のいずれかである．

同様にして $\beta^3 = \gamma^3 = 1$ が示されるから，$E = \left\{1,\ \omega,\ \omega^2\right\}$ となり，この集合 E は確かに乗法について閉じている．

Case 2.　$\alpha\beta\gamma = 0$ のとき，$\alpha = 0,\ \beta\gamma \neq 0$ として一般性を失わない．Case 1 の場合と同様にして，

$\{0,\ \beta,\ \gamma\} = \left\{0,\ \beta^2,\ \beta\gamma\right\}$

が成り立つ．0 以外の 2 つの要素の積として

$\beta\gamma = \beta^3\gamma \quad \therefore \beta^2 = 1 \iff \beta = \pm 1$

同様にして $\gamma = \pm 1$ が示されるから，このとき $E = \{0,\ 1,\ -1\}$ となる．この場合も

E は確かに乗法について閉じている．

【3】条件式

$F(-2)=F(1)=G(1)=0 \quad \cdots ①$

$F(0)=2G(0) \quad \cdots ②$

$F'(-2)\cdot G'(1)=-1 \quad \cdots ③$

$F'(1)=G'(1)>0 \quad \cdots ④$

とする．

① と因数定理より，

$x+2 \,\big|\, F(x), \quad x-1 \,\big|\, F(x)$

であるから，k を定数として $F(x)=k(x+2)(x-1)$ と置くことができる．

$G(x)=ax^2+bx+c$ とすると，

$G(1)=a+b+c=0 \quad \cdots ⑤ \ (\because\ ①)$

$F(0)=-2k,\ G(0)=c \quad \therefore\ -2k=2c \Longleftrightarrow -k=c \cdots ⑥ \ (\because\ ②)$

また

$F'(x)=k(2x+1), \quad G'(x)=2ax+b$

であるから，③より

$k(-4+1)(2a+b)=-1 \Longleftrightarrow 3k(2a+b)=1 \quad \cdots ⑦$

また④より $3k=2a+b>0$ であるから，⑦より

$3k=2a+b=1 \quad \therefore\ k=\dfrac{1}{3},\ 2a+b=1$

⑥から $c=-\dfrac{1}{3}$，⑤から $a+b=\dfrac{1}{3}$ となり，$a=\dfrac{2}{3},\ b=-\dfrac{1}{3}$ を得る．

以上より，

$F(x)=\dfrac{1}{3}(x+2)(x-1),\ G(x)=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$ 　　(答)

【4】(1) α が $f(x)=0$ の解ならば α^2 も解になるのだから，

$f(\alpha)=0 \Rightarrow f\left(\alpha^2\right)=f\left(\alpha^4\right)=f\left(\alpha^8\right)=0$

つまり，$f(x)=0$ は $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8$ を解にもつ．

もし $|\alpha| \fallingdotseq 0,\ |\alpha| \fallingdotseq 1$ とすれば，

▼ $|\alpha|>1$ の場合には

$|\alpha^2|=|\alpha|^2>|\alpha|, \quad |\alpha^4|=|\alpha^2|^2>|\alpha^2|, \quad |\alpha^8|=|\alpha^4|^2>|\alpha^4|$

が成り立ち，$|\alpha|<|\alpha^2|<|\alpha^4|<|\alpha^8|$ であるから，$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^4,\ \alpha^8$ はすべて異なる値である．

ところが，方程式 $f(x)=0$ の次数は 3 次であるから，3 個より多くの解をもつことはない．よって $|\alpha|>0$ は矛盾を生じる．

▼また，$|\alpha|<1$ の場合も，まったく同様の議論から

$|\alpha|>|\alpha^2|>|\alpha^4|>|\alpha^8|$

となり，同じ矛盾が生じる．

以上より，$|\alpha|$ について，$|\alpha|=0$ または $|\alpha|=1$ であることが示された．［証明終］

(2) $f(x)=0$ は実数係数の方程式であるから，その解は

(i) 実数の 3 解をもつ．重解である場合も認める．

(ii) 実数の解を 1 個，虚数解を 2 個もつ.

のいずれかである.

Case 1.　$f(x)=0$ が 3 個の実数解をもつとき.

(1) で示したように，その解は絶対値が 0 または 1 であるから，3 解は 0, 1, -1 に限る．従ってこのとき，$f(x)$ は

$$f(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$$

Case 2.　$f(x)=0$ が実数解を 1 個，虚数解を 2 個もつとき.

(1) より, 実数解を α とすれば, α は 0, 1, -1 のいずれかであるが, もし $\alpha=-1$ とすれば，$\alpha^2=1$ も解となり，実数解を 2 個もつことになるから不適．よって実数解は 0, 1 のいずれか.

虚数解を β として，β^2 も解であるから，$\overline{\beta}=\beta^2$ であり，更に $\left|\beta\right|=1$ と合わせて，

$$\left|\beta\right|^2=\beta\overline{\beta}=\beta^3=1 \qquad \therefore\ \beta=1,\omega,\omega^2$$

である．よってこのときの $f(x)$ は

$$f(x)=x\left(x^2+x+1\right),\quad f(x)=(x-1)\left(x^2+x+1\right).$$

以上より

$$f(x)=\begin{cases} x(x+1)(x-1) \\ x\left(x^2+x+1\right) \\ (x-1)\left(x^2+x+1\right) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

M3JSB/M3JB/M3TB
選抜東大文系数学
東大文系数学
難関大文系数学 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	