M3MA

冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大理系数学／難関大理系数学M

1章　実戦演習1

問題

【1】真数条件，および底条件より

$0 < x < 1$ または $x > 1$，$0 < y < 1$ または $y > 1$　$\cdots\cdots\cdots$①

この条件の下で，与えられた等式の1つ目は

$$\log_x y^2 + \frac{\log_x x^2}{\log_x y} = 5 \qquad \therefore\quad 2\log_x y + \frac{2}{\log_x y} = 5$$

と変形できる．この両辺に $\log_x y\ (\neq 0)$ をかけて整理すると

$$2(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 2 = 0 \qquad \therefore\quad (2\log_x y - 1)(\log_x y - 2) = 0$$

となるから

$$\log_x y = \frac{1}{2},\ 2 \qquad \therefore\quad y = \sqrt{x},\ x^2$$

$y = \sqrt{x}$ のとき，$x = y^2$ であるから，与えられた等式の2つ目に代入して整理すると

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \qquad \therefore\quad (y+1)(y-3) = 0$$

となる．そして，① と合わせると

$$y = 3 \qquad \therefore\quad x = 3^2 = 9$$

また，$y = x^2$ のとき，与えられた等式の2つ目に代入して整理すると

$$2x^2 - x + 3 = 0$$

この方程式は実数解をもたないので不適である．

以上より，求める x の値は

$x = 9$　　(答)

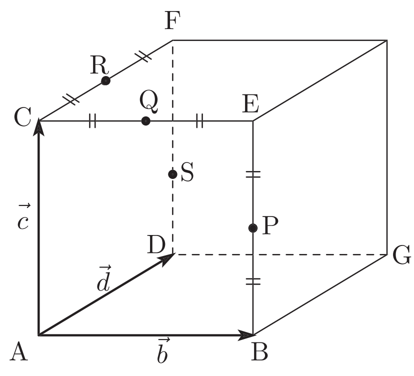
【2】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とおく．

PQ を 2 : 1 に外分する点の位置ベクトルは

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + 2\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{3}{2}\vec{c}$$

また，RS を 1 : 2 に外分する点の位置ベクトルは

$$2\overrightarrow{\mathrm{AR}} - \overrightarrow{\mathrm{AS}} = 2\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) - \vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{c}$$



ゆえに，これらの点は一致する．　(証終)

(2) (1) の結果より，4個の点 P, Q, R, S は同一平面上にある．

また，(1) と同様にして

「QR を 2 : 1 に外分する点と ST を 1 : 2 に外分する点は一致する」

「RS を 2 : 1 に外分する点と TU を 1 : 2 に外分する点は一致する」

ことが示せるので，4個の点 Q, R, S, T は同一平面上にあり，かつ4個の点 R, S, T, U は同一平面上にあるといえる.

以上より，6 個の点 P, Q, R, S, T, U は同じ平面上にある. （証終）

【3】(1) 与えられた不等式より

$2a_4 \leqq a_5 \leqq 3a_4$

$2 \cdot 2a_3 \leqq 2a_4 \leqq a_5 \leqq 3a_4 \leqq 3 \cdot 3a_3$

$4 \cdot 2a_2 \leqq 4a_3 \leqq 2a_4 \leqq a_5 \leqq 3a_4 \leqq 9a_3 \leqq 9 \cdot 3a_2$

$8 \cdot 2a_1 \leqq 8a_2 \leqq 4a_3 \leqq 2a_4 \leqq a_5 \leqq 3a_4 \leqq 9a_3 \leqq 27a_2 \leqq 27 \cdot 3a_1$

そして，$a_1 = 1$ であることと合わせると

$\boldsymbol{16 \leqq a_5 \leqq 81}$ **(答)**

(2) 同様にして

$2 \leqq a_2 \leqq 3,\ 4 \leqq a_3 \leqq 9,\ 8 \leqq a_4 \leqq 27$

が成り立つので，$a_k = 9$ をみたす k の値は

$k = 3,\ 4$

$k = 3$ のとき，$2a_2 \leqq 9 \leqq 3a_2$ かつ $2 \leqq a_2 \leqq 3$ が成り立つから

$a_1 = 1,\ a_2 = 3$

$k = 4$ のとき，$2a_3 \leqq 9 \leqq 3a_3$ かつ $4 \leqq a_3 \leqq 9$ が成り立つから

$a_3 = 4$

このとき，$2a_2 \leqq 4 \leqq 3a_2$ かつ $2 \leqq a_2 \leqq 3$ が成り立つから

$a_1 = 1,\ a_2 = 2$

以上より

$\boldsymbol{k = 3}$ **のとき** $\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 9}$

$\boldsymbol{k = 4}$ **のとき** $\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 9}$ **(答)**

(3) (1) と同様にして

$32 \leqq a_6 \leqq 243,\ 64 \leqq a_7 \leqq 729,\ 128 \leqq a_8 \leqq 2187$

が成り立つので，$a_n = 100$ をみたす n の取り得る値の範囲は

$\boldsymbol{6 \leqq n \leqq 7}$ **(答)**

【4】(1) 時刻 1 で点 Q はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で座標 1 にあるか座標 2 にある．前者の場合，時刻 2 で点 Q は確率 1 で座標 2 にある．また，後者の場合，時刻 2 で点 Q はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で座標 3 にあるか座標 4 にある．

以上より

$\boldsymbol{P(2,\,1)=0,\ P(2,\,2)=\dfrac{1}{2},\ P(2,\,3)=\dfrac{1}{4},}$

$\boldsymbol{P(2,\,4)=\dfrac{1}{4},\ P(2,\,j)=0\ (j\geqq 5)}$　　(答)

(2) 点 Q は 1 回の移動で最大 2，最小 1 移動するから，$j<T$ または $j>2T$ であれば，$\mathrm{P}(T,\,j)=0$ である．

次に，$T\leqq j\leqq 2T$ のとき，$j=T+m$ $(m=0,\ 1,\ ,\ \cdots,\ T)$ とおくと，T 回の移動のうち最初の m 回は距離 2 だけ移動し，残りの $T-m$ 回は距離 1 だけ移動すれば，点 Q は時刻 T で座標 $T+m$ にある．よって，$\mathrm{P}(T,\,j)\fallingdotseq 0$ であるから，求める条件は

$\boldsymbol{j<T}$ **または** $\boldsymbol{j>2T}$　　(答)

(3) (2) の結果より

$2n<T$ または $n>T$

のとき，$P(T,\,2n)=0$ である．

また，$T\leqq 2n\leqq 2T$ のとき，T 回の移動のうち距離 2 だけ移動するのが m 回 $(0\leqq m\leqq T)$ であるとすると，残りの $T-m$ 回は距離 1 だけ移動するので

$2m+(T-m)=2n\qquad\therefore\quad 2n=T+m$

よって，$T\leqq 2n\leqq 2T$ と $2n$：偶数 より

$$2n=T+m\begin{cases}(m=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ T) & (T：\text{奇数のとき})\\(m=0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ T) & (T：\text{偶数のとき})\end{cases}$$

とおいてよい．

ここで，点 Q は座標が偶数 $(=0)$ である点から出発し，座標が偶数 $(=2n)$ である点に到着するので，条件 (c) より，距離 1 だけ移動するとき，確率 $\dfrac{1}{2}$ での移動と確率 1 での移動が同じ回数だけある．また，距離 2 の移動はすべて確率 $\dfrac{1}{2}$ で起こる．

したがって，確率 $\dfrac{1}{2}$ の移動は全部で

$m+\dfrac{T-m}{2}=\dfrac{T+m}{2}=n$ (回)

起こり，このうち $m=2n-T$ 回が距離 2 の移動であるから，この場合の確率は

$P(T,\,2n)=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_{2n-T}}{2^n}$

以上より，求める確率は

$$\boldsymbol{P(T,\,2n)=\begin{cases}0 & (2n<T\ \text{または}\ n>T\ \text{のとき})\\ \dfrac{{}_n\mathrm{C}_{2n-T}}{2^n} & (T\leqq 2n\leqq 2T\ \text{のとき})\end{cases}}\qquad\text{(答)}$$

【5】 $S_n = \log 3 - \log\dfrac{4}{2} + \log\dfrac{5}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\log\dfrac{n+2}{n}$

$= \log 3 - \log 4 + \log 2 + \log 5 - \log 3 - \cdots + (-1)^{n-1}\log(n+2) + (-1)^n \log n$

より $n \geqq 2$ のとき

$$S_n = \log 2 + (-1)^{n-2}\log(n+1) + (-1)^{n-1}\log(n+2)$$
$$= \log 2 + (-1)^{n-1}\log\frac{n+2}{n+1}$$

ここで

$$-\log\frac{n+2}{n+1} \leqq (-1)^{n-1}\log\frac{n+2}{n+1} \leqq \log\frac{n+2}{n+1}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\log\frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = 0$$

なので，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\log\frac{n+2}{n+1} = 0$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\log 2 + (-1)^{n-1}\log\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$= \mathbf{\log 2} \qquad \textbf{(答)}$$

【6】(1)

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\cos x - 1}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{x(\cos x+1)}{\cos^2 x - 1}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{-\frac{x(\cos x+1)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right\}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x+1}{\cos x}\right) = \mathbf{-2} \qquad \textbf{(答)}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\log(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{2x}{\log(1+2x)}\cdot\frac{1}{2}\right\}$$

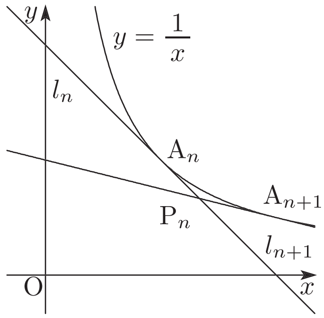
ここで，$x \to 0$ のとき，$x^2 \to 0$，$2x \to 0$ であり

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

であることに注意すると

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{2x}{\log(1+2x)}\cdot\frac{1}{2}\right\} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

【7】(1) $y=\dfrac{1}{x}$ より，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ であるから，接線 l_n，l_{n+1} の方程式は



$$l_n\ :\ y=-\frac{1}{n^2}(x-n)+\frac{1}{n}$$

$$\therefore\quad y=-\frac{x}{n^2}+\frac{2}{n}$$

$$l_{n+1}\ :\ y=-\frac{x}{(n+1)^2}+\frac{2}{n+1}$$

であるから，交点 P_n の x 座標は

$$\frac{x}{n^2}-\frac{x}{(n+1)^2}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}x=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore\quad x=\frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

よって，P_n の y 座標は

$$y=-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2n(n+1)}{2n+1}+\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2}{2n+1}$$

ゆえに，求める P_n の座標は

$$\mathrm{P}_n\left(\boldsymbol{\frac{2n(n+1)}{2n+1},\ \frac{2}{2n+1}}\right)\qquad \text{(答)}$$

(2) 原点を O とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{A}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$$

$$=\left(n,\ \frac{1}{n}\right)-\left(\frac{2n(n+1)}{2n+1},\ \frac{2}{2n+1}\right)$$

$$=\left(-\frac{n}{2n+1},\ \frac{1}{n(2n+1)}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$$

$$=\left(n+1,\ \frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{2n(n+1)}{2n+1},\ \frac{2}{2n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{n+1}{2n+1},\ -\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right)$$

より

$$S_n=\frac{1}{2}\left|-\frac{n}{2n+1}\cdot\left\{-\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right\}-\frac{1}{n(2n+1)}\cdot\frac{n+1}{2n+1}\right|$$

$$=\frac{1}{2n(n+1)(2n+1)}$$

また，線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ の中点の x 座標 c_n は

$$c_n=\frac{n+(n+1)}{2}=\frac{2n+1}{2}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_nS_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{1}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad \textbf{(答)}$$

【8】(1)

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = r \cdot \frac{1+\cos\theta}{2} = r\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{r^2\cos^2\frac{\theta}{2}} = r\cos\frac{\theta}{2} \quad \left(\because \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ r > 0\right)$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{a_1}{b_1} = \cos\frac{\theta}{2}} \qquad \textbf{(答)}$$
$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2} r\cos\frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right) = r\cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos^2\frac{\theta}{2^2}$$
$$b_2 = \sqrt{a_2 b_1} = \sqrt{r^2\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2^2}} = r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{a_2}{b_2} = \cos\frac{\theta}{2^2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) (1) の結果より，非負整数 n に対し

$$\frac{a_n}{b_n} = \cos\frac{\theta}{2^n} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つと推測できる．以下，このことを数学的帰納法で証明する．

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta = \cos\frac{\theta}{2^0}$$

より，$n = 0$ のとき，① は成り立つ．

次に，$n = k\ (\geqq 0)$ のときに① が成り立つと仮定する．すなわち

$$\frac{a_k}{b_k} = \cos\frac{\theta}{2^k} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つと仮定する．このとき

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{\sqrt{a_{k+1}b_k}} = \sqrt{\frac{a_{k+1}}{b_k}}$$
$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a_k + b_k)}{b_k}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{a_k}{b_k} + 1\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\theta}{2^k}\right)} \quad (\because \quad ②)$$
$$= \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}} = \cos\frac{\theta}{2^{k+1}} \quad \left(\because \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

よって，$n = k+1$ のときも① は成り立つ．

したがって，数学的帰納法により，任意の非負整数 n に対して① が成り立つので

$$\boldsymbol{\frac{a_n}{b_n} = \cos\frac{\theta}{2^n}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) (2) の結果より

$$b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} = \sqrt{\left(b_n\cos\frac{\theta}{2^n}\right)b_{n-1}}$$

両辺を 2 乗して

$$b_n{}^2 = b_n b_{n-1} \cos\frac{\theta}{2^n} \qquad \therefore \quad b_n = b_{n-1}\cos\frac{\theta}{2^n}$$

両辺に $\sin\dfrac{\theta}{2^n}$ をかけて

$$b_n \sin\frac{\theta}{2^n} = b_{n-1}\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2}b_{n-1}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}$$

よって，数列 $\left\{b_n \sin\dfrac{\theta}{2^n}\right\}$ は初項 $b_0 \sin\dfrac{\theta}{2^0} = r\sin\theta$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n \sin\frac{\theta}{2^n} = r\sin\theta\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{r}{2^n}\sin\theta$$

そして，$\theta \fallingdotseq 0$ であることと，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{\theta}{2^n}\to 0$ であることに注意すると

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{r}{2^n}\sin\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\theta}{2^n}}{\sin\dfrac{\theta}{2^n}}\cdot\frac{r\sin\theta}{\theta}$$

$$= \frac{r\sin\theta}{\theta}$$

また，(2) の結果より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\cdot b_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(b_n\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$= \frac{r\sin\theta}{\theta}\cdot 1 = \frac{r\sin\theta}{\theta}$$

が成り立つ．（証終）

【9】(1) $f'(x) = \dfrac{3}{2}x(2-x)$

より，$f(x)$ の増減は下表のようになる．　(答)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$

(2) $x_1 = a\ (1<a<2)$ より，$n=1$ のときは $1<x_n<2$ が成り立つ．

$n=k\ (\geqq 1)$ のとき，$1<x_n<2$ が成り立つと仮定する．すなわち，$1<x_k<2$ であると仮定する．ここで

$x_{k+1} = f(x_k)$

であり

$f(1)=1,\ f(2)=2$

であることと，(1) の結果より $f(x)$ は $1<x<2$ において単調に増加することを合わせると

$1<x_{k+1}<2$

が成り立つ．

したがって，数学的帰納法より，すべての自然数 n に対して $1<x_n<2$ が成り立つ．（証終）

(3) $x_{n+1}-x_n = -\dfrac{1}{2}(x_n{}^3-3x_n{}^2+2x_n) = -\dfrac{1}{2}x_n(x_n-1)(x_n-2)$ $\cdots\cdots\cdots$①

であるから，$1<x_n<2$ であることと合わせると，① はつねに正である．

したがって，すべての自然数 n に対して $x_{n+1} > x_n$ である．（証終）

(4) $2 - x_{n+1} = \dfrac{1}{2}({x_n}^3 - 3{x_n}^2 + 4) = \dfrac{1}{2}(x_n + 1)(x_n - 2)^2$

より

$$\frac{2 - x_{n+1}}{2 - x_n} = -\frac{1}{2}(x_n + 1)(x_n - 2)$$

である．ここで，$g(x) = -\dfrac{1}{2}(x + 1)(x - 2)$ とおくと

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

より，$g(x)$ は $x > \dfrac{1}{2}$ の範囲で単調に減少する．よって，(3) より $\{x_n\}$ が単調に増加し，$x_n > \dfrac{1}{2}$ であることと合わせると

$$g(x_1) > g(x_2) > g(x_3) > \cdots > g(x_n) > g(x_{n+1}) > \cdots$$

が成り立つ．さらに，$x_1 = a$ $(1 < a < 2)$，$1 < x_n < 2$ より

$$g(x_1) < g(1) = 1,\ g(x_n) > g(2) = 0$$

であるから，$g(x_1) = b$ とおけば

$$2 - x_{n+1} \leqq b(2 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \cdots\cdots\cdots②$$

が成り立つ．すなわち，② をみたす n に無関係な定数 b $(0 < b < 1)$ が存在する．

（証終）

(5) (2)，(4) の結果より

$$0 < 2 - x_n \leqq b(2 - x_{n-1}) \leqq b^2(2 - x_{n-2}) \leqq \cdots \leqq b^{n-1}(2 - x_1) = b^{n-1}(2 - a)$$

であり，$0 < b < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} b^{n-1}(2 - a) = 0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(2 - x_n) = 0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 2$$

すなわち，数列 $\{x_n\}$ は収束し，その極限値は **2** である．　**(答)**

２章　実戦演習２

問題

【1】1201^{124} の百の位の数値は，201^{124} の百の位の数値と同じなので，以下後者について考察する．二項定理より

$$201^{124} = (200+1)^{124} = \sum_{k=0}^{124} {}_{124}\mathrm{C}_k 200^k$$

が成り立ち，この右辺の一般項において $k \geqq 2$ の場合は，201^{124} の百の位の数値に影響を与えない．よって

$${}_{124}\mathrm{C}_0 + {}_{124}\mathrm{C}_1 \times 200 = 1 + 124 \cdot 200 = 24801$$

より，求める百の位の数値は

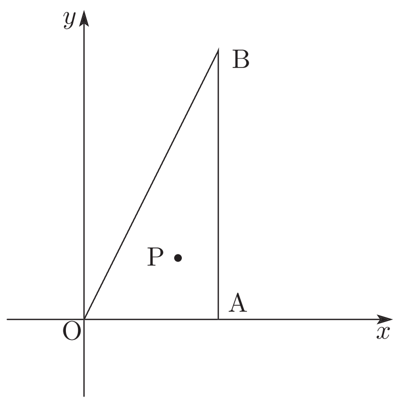
8　　（答）

【2】(1) 点 P と辺 OA との距離は b で，点 P と辺 AB との距離は $1-a$ である．また，直線 OB の方程式は $y=2x$ だから，点 P と辺 OB との距離は

$$\frac{|2a-b|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}$$

点 P は△ OAB の内部またはその周上にあるので領域 $y \leqq 2x$ に含まれる，すなわち $b \leqq 2a$ が成り立つことに注意すると

$$\frac{|2a-b|}{\sqrt{5}} = \frac{2a-b}{\sqrt{5}}$$



以上より，求める距離の和は

$$k = b+1-a+\frac{2a-b}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-1\right)a+\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)b+1} \qquad \text{（答）}$$

(2) 直線

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-1\right)x+\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)y+1 = k \quad \cdots ①$$

が△ OAB の内部または周と共有点をもつときの k の最大値，最小値を求めればよい．直線①の傾きは

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}-1}{\frac{1}{\sqrt{5}}-1} = \frac{2-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{(2-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{1-5} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

であり，この値は 0 より大きく 2 より小さい．よって，直線①が点 B を通るとき，①の y 切片

$$\frac{k-1}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}(k-1)}{\sqrt{5}-1} = \frac{(5+\sqrt{5})(k-1)}{4}$$

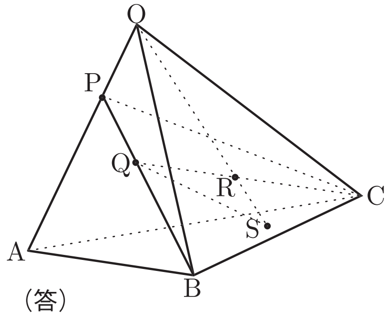
は最大となり，このとき k も最大になるので

最大値 ： $\mathbf{2}$　　（答）

また，直線①が点 A を通るとき，①の y 切片は最小となり，このとき k も最小になるので

最小値 ： $\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$　　（答）

【3】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = p\vec{a}$



$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-q)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + q\vec{b} = p(1-q)\vec{a} + q\vec{b}$

であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

$=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + r\vec{c}$

$\boldsymbol{=p(1-q)(1-r)\vec{a} + q(1-r)\vec{b} + r\vec{c}}$　　（答）

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = s\overrightarrow{\mathrm{OR}} = p(1-q)(1-r)s\vec{a} + q(1-r)s\vec{b} + rs\vec{c}$

と表せて，点 S が平面 ABC 上にあることから

$p(1-q)(1-r)s + q(1-r)s + rs = 1$

$\therefore \quad s = \dfrac{1}{pqr - pq - qr - rp + p + q + r}$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \boldsymbol{\frac{p(1-q)(1-r)\vec{a} + q(1-r)\vec{b} + r\vec{c}}{pqr - pq - qr - rp + p + q + r}} \qquad \text{（答）}$$

(3) 四面体 OPQR の体積を V_3 とし，まず V_1 と V_3，V_2 と V_3 の比を求める．

$\triangle\mathrm{OPQ} = q\triangle\mathrm{OPB} = q\cdot p\triangle\mathrm{OAB}$

であり，四面体 OABC，四面体 OPQR の底面をそれぞれ，△ OAB，△ OPQ としたときの高さの比は，線分 CQ，RQ の長さの比に等しいので，四面体 OABC の高さを h とすると，四面体 OPQR の高さは rh と表せる．よって

$V_1 : V_3 = \dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot h : \dfrac{1}{3}pq\triangle\mathrm{OAB}\cdot rh = 1 : pqr$

次に，四面体 OPQS の体積は，四面体 OPQR と四面体 SPQR の体積の和に等しいから

$V_3 : V_2 = \mathrm{OR} : \mathrm{OS} = 1 : s$

以上より

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_1}\cdot\frac{V_2}{V_3} = pqr\cdot s = \boldsymbol{\frac{pqr}{pqr - pq - qr - rp + p + q + r}} \qquad \text{（答）}$$

【4】(1) 商の微分公式より

$$y' = \frac{(-\sin x)e^x - (\cos x)e^x}{(e^x)^2}$$
$$= -\boldsymbol{\frac{\sin x + \cos x}{e^x}} \quad \text{(答)}$$

(2) 合成関数の微分公式より

$$y' = \cos(\log|x|)\cdot(\log|x|)'$$
$$= \boldsymbol{\frac{\cos(\log|x|)}{x}} \quad \text{(答)}$$

【5】(1) 積の微分公式，合成関数の微分公式より

$$f_n'(x) = (n+2)x^{n+1}e^{-nx} - nx^{n+2}e^{-nx}$$
$$= \boldsymbol{(n+2-nx)x^{n+1}e^{-nx}} \quad \text{(答)}$$

(2) 曲線 $y = f_n(x)$ 上の点 $(t,\ f_n(t))$ における接線の方程式は

$$y = (n+2-nt)t^{n+1}e^{-nt}(x-t) + t^{n+2}e^{-nt}$$
$$\therefore\quad y = (n+2-nt)t^{n+1}e^{-nt}x - (n+1-nt)t^{n+2}e^{-nt}$$

この直線が原点 O を通るとき

$$-(n+1-nt)t^{n+2}e^{-nt} = 0 \qquad \therefore\quad t = 0,\ \frac{n+1}{n}$$

であるから，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = 0,\ y = \left(\frac{n+1}{ne}\right)^{n+1} x} \quad \text{(答)}$$

(3) $g_n(x) = \left(\dfrac{n+1}{ne}\right)^{n+1} x$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_n(1)}{f_n(1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{ne}\right)^{n+1} e^n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}$$
$$= 1\cdot e\cdot e^{-1} = \mathbf{1} \quad \text{(答)}$$

【6】(1) $y = x^{\frac{1}{x}}$ とおき，この両辺の自然対数をとると

$$\log y = \frac{1}{x}\log x$$

両辺を x で微分して

$$\frac{d}{dy}\log y\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1-\log x}{x^2}$$
$$\therefore\quad y' = y\cdot\frac{1-\log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$$

よって，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

ゆえに $f(x)$ は $x = e$ のときに極大となり

極大値：$\boldsymbol{f(e) = e^{\frac{1}{e}}}$ (答)

(2) (1) の増減表より，$f(x)$ は $x>e$ の範囲では単調に減少し，$e<3$ であるから

$$f(e)>f(3) \iff e^{\frac{1}{e}}>3^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \quad e^{\frac{1}{e}}>\sqrt[3]{3}$$

（証終）

【7】(1) 円錐の高さを h $(0<h<r)$ とすると

$$x=\sqrt{r^2-h^2}$$

が成り立つので

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2h=\frac{1}{3}\pi(r^2-h^2)h$$

と表せる．V を h の関数とみて微分すると

$$V'=\frac{1}{3}\pi(r^2-3h^2)$$

となるので，V の増減は下表のようになる．

h	(0)	$\cdots$	$\dfrac{r}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(r)
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ゆえに V は $h=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ のときに極大かつ最大となる．このとき

$$x=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}r$$

となるので，求める最大値とそのときの x の値は

最大値 : $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi r^3}$ $\left(\boldsymbol{x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}r}\ \textbf{のとき}\right)$ （答）

(2) 円錐の側面の展開図において，扇形の弧の長さを l とすると，$l=2\pi x$ より

$$S=\frac{1}{2}rl+\pi x^2=\pi x(r+x)$$

であり

$$V=\frac{1}{3}\pi(r^2-h^2)h=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{r^2-x^2}$$

であるから

$$Q=\frac{V^2}{S^3}=\frac{\pi^2x(r^2-x^2)}{9\pi^3(r+x)^3}=\frac{x(r-x)}{9\pi(r+x)^2}$$

と表せる．そして，$r+x=u$ $(r<u<2r)$ とおくと

$$Q=\frac{(u-r)(2r-u)}{9\pi u^2}=\frac{1}{9\pi}\left(-\frac{2r^2}{u^2}+\frac{3r}{u}-1\right)$$

となり，Q を u の関数とみて微分すると

$$Q'=\frac{1}{9\pi}\left(\frac{4r^2}{u^3}-\frac{3r}{u^2}\right)=\frac{r(4r-3u)}{9\pi u^3}$$

となるので，Q の増減は下表のようになる．

u	(r)	$\cdots$	$\dfrac{4r}{3}$	$\cdots$	$(2r)$
Q'		$+$	0	$-$	
Q		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ゆえに，V は $u=\dfrac{4r}{3}$ のときに極大かつ最大となる．このとき

$$x=\frac{4r}{3}-r=\frac{r}{3}$$

となるので，求める最大値とそのときの x は

最大値 ： $\boldsymbol{\dfrac{1}{72\pi}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{r}{3}}\ \textbf{のとき}\right)$　(答)

【8】(1) 商の微分公式，合成関数の微分公式より

$$f'(x)=\frac{1\cdot\log x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2}=\frac{\log x-1}{(\log x)^2}$$

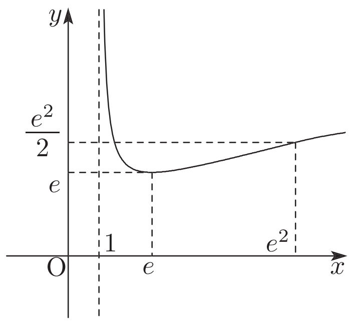
$$f''(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot(\log x)^2-2\log x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot(\log x-1)}{(\log x)^4}=\frac{2-\log x}{x(\log x)^3}$$

となり

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x}{\log x}=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log x}=\infty$$

であるから，$y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸は下表のようになる．　(答)

x	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
y		↘	e	↗	$\dfrac{e^2}{2}$	↗



また，グラフは右上図のようになる．　(答)

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=\frac{\log t-1}{(\log t)^2}(x-t)+\frac{t}{\log t}$$

この直線が点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を通るとき

$$0=\frac{\log t-1}{(\log t)^2}(a-t)+\frac{t}{\log t}\qquad\therefore\quad a=\frac{t}{1-\log t}\qquad\cdots①$$

ここで，$g(t)=\dfrac{t}{1-\log t}$ とおくと

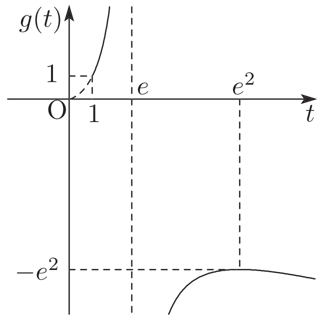
$$g'(t)=\frac{1\cdot(1-\log t)-t\cdot\left(-\dfrac{1}{t}\right)}{(1-\log t)^2}=\frac{2-\log t}{(1-\log t)^2}$$

となり

$$\lim_{t\to e-0}\frac{t}{1-\log t}=\infty,\ \lim_{t\to e+0}\frac{t}{1-\log t}=-\infty,\ \lim_{t\to\infty}\frac{t}{1-\log t}=-\infty$$

である．ゆえに，$g(t)$ の増減は下表のようになり，グラフは右下図のようになる．

t	(1)	$\cdots$	(e)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$g'(t)$		$+$		$+$	0	$-$
$g(t)$	(1)	$\nearrow$		$\nearrow$	$-e^2$	$\searrow$



そして，(1) の結果より，$y=f(x)$ のグラフが 1 つの直線と異なる 2 点で接することはないから，接線が 2 本引けるためには，方程式① が $t>1$ の範囲に異なる 2 つの解をもてばよく，そのような a の値の範囲は

$\boldsymbol{a<-e^2}$　**(答)**

【9】(1) $f(x)=6e^x-x^3$ とおくと

$$f'(x)=6e^x-3x^2,\ f''(x)=6e^x-6x,\ f'''(x)=6e^x-6$$

であり

$x>0$ のとき $f'''(x)>0$ より $f''(x)$ は $x>0$ において単調増加であり，

かつ $f''(0)=6>0$

より

$f''(x)>0\quad(x>0)$

また

$x>0$ のとき $f''(x)>0$ より $f'(x)$ は $x>0$ において単調増加であり，

かつ $f'(0)=6>0$

より

$f'(x)>0\quad(x>0)$

さらに

$x>0$ のとき $f'(x)>0$ より $f(x)$ は $x>0$ において単調増加であり，

かつ $f(0)=6>0$

より

$f(x)>0\quad(x>0)$

したがって，$x>0$ のとき

$$6e^x-x^3>0 \iff x^3<6e^x \iff \frac{x^2}{e^x}<\frac{6}{x}$$

が成り立つ．（証終）

(2) $x>0$ のとき $x^2e^{-x}>0$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x}=0$ であるから，(1) の結果と合わせると，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$$

が成り立つ．（証終）

(3) $g(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)$ とおくと

$$g'(x)=-e^{-x}(x^2+3x+1)+e^{-x}(2x+3)=(-x^2-x+2)e^{-x}=-(x+2)(x-1)e^{-x}$$

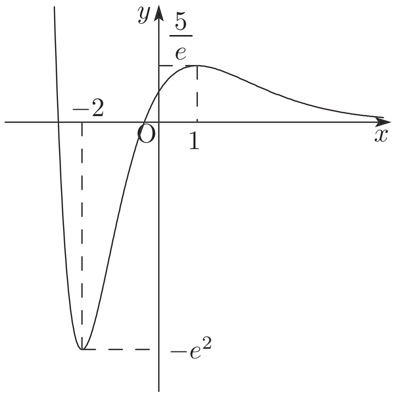
となり

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x^2+3x+1)=\infty$$

また，(2) と同じようにして

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(x^2+3x+1)=0$$

となることが示せる．ゆえに，$g(x)$ の増減は下表のようになり，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる．



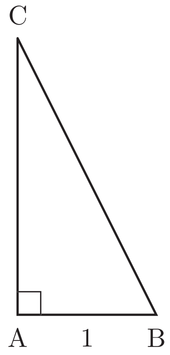
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{e}$	$\searrow$

そして，x の方程式 $x^2+3x+1=ke^x$ の実数解の個数は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数と一致するので，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} \textbf{0 個} \quad (k<-e^2 \text{ のとき}) \\ \textbf{1 個} \quad (k=-e^2,\ k>5e^{-1} \text{ のとき}) \\ \textbf{2 個} \quad (-e^2<k \leqq 0,\ k=5e^{-1} \text{ のとき}) \\ \textbf{3 個} \quad (0<k<5e^{-1} \text{ のとき}) \end{cases}$$ (答)

問題

【1】(1) $\angle \mathrm{DAB} = \theta$ とし，点 D から辺 AB に下ろした垂線の足を H とする．ただし，D = B のときは，H = B とする．このとき



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| \cos\theta = \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|$$

が成り立つことに注意すると

$$t = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \cos\theta$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$$

であり，仮定より

$$0 \leqq \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| \leqq 1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 1$$

であるから

$$\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 1} \qquad \text{（答）}$$

(2) $\mathrm{D} \neq \mathrm{C}$ のとき，$\angle \mathrm{DAC} = \alpha$，$\angle \mathrm{DCA} = \beta$ とし，点 D から辺 CA に下ろした垂線の足を I とする．このとき

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| \cos\alpha = \left|\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right| \cos\beta = \left|\overrightarrow{\mathrm{CI}}\right|$$

が成り立つことに注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} \quad \cdots ①$$

$$\Longleftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \cos\alpha = \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| \cos\beta$$

$$\Longleftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CI}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|$$

$$\Longleftrightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CI}}\right|$$

よって，① が成り立つのは点 I が辺 CA の中点に一致する場合であり，このとき点 D は辺 BC の中点に，点 H は辺 AB の中点にそれぞれ一致するので

$$t = \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

また，D = C のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$$

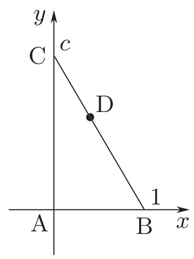
であるから，① は成り立たない．

以上より，求める t の値は

$$t = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \text{（答）}$$

■別解

A(0, 0)，B(1, 0)，C(0, c) ($c > 0$) となるように座標を設定して考える．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (0,\ c)$ であり，点 D が辺 CB を $s : (1-s)$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ に内分するとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$= (s,\ c(1-s))$$

よって

$$t = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = s$$

$0 \leqq s \leqq 1$ より

$$0 \leqq t \leqq 1$$

(2) $s = t$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (t,\ c(1-t))$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (0,\ c)$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = c^2(1-t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (t,\ -ct)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (0,\ -c)$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = c^2 t$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ が成り立つとき

$$c^2(1-t) = c^2 t \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{2}$$

【2】(1) $k = 10i + j$ ($i,\ j$ は負でない整数で，$j \leqq 9$) のとき

$$\left[\frac{k}{10}\right] = i$$

である．よって，$n = 10l + m$ ($l,\ m$ は負でない整数で，$m \leqq 9$) とおくと，$l \geqq 1$ すなわち $n \geqq 10$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{10}\right] &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{k}{10}\right] \quad (k=0 \text{ を加えても和は変わらない}) \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} 10i + l(m+1) \\ &= 5(l-1)l + l(m+1)\end{aligned}$$

と表せて，これは $l = 0$ すなわち $n \leqq 9$ のときも成り立つ．

ここで，$0 \leqq l(m+1) \leqq 10l$ であることに注意すると

$$5(l-1)l \leqq 5(l-1)l + l(m+1) \leqq 5l(l+1)$$

が成り立つ．そして，$5(l-1)l$ は l が増加するにつれて単調に増加することと

$$5 \cdot 6 \cdot 7\ (=210) < 238 < 5 \cdot 7 \cdot 8\ (=280)$$

であることより

$$5(l-1)l \leqq 238 \leqq 5l(l+1)$$

をみたす整数 l は，$l = 7$ のみである．このとき

$$238 = 5 \cdot 6 \cdot 7 + 7 \cdot 4$$

より

$$m + 1 = 4 \qquad \therefore \quad m = 3$$

であるから，求める正の整数 n の値は

$n = 10 \cdot 7 + 3 = \mathbf{73}$　　**(答)**

(2) 正の整数 n に対して，$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = m$ であるとき

$$m \leqq \sqrt{n} + \frac{1}{2} < m + 1 \qquad \therefore \quad m - \frac{1}{2} \leqq \sqrt{n} < m + \frac{1}{2}$$

であり，この各辺を 2 乗して

$$m^2 - m + \frac{1}{4} \leqq n < m^2 + m + \frac{1}{4} \quad \cdots ①$$

ここで

$$\sqrt{n+1}+\frac{1}{2} \geqq m+1 \qquad \therefore \quad \sqrt{n+1} \geqq m+\frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

であれば，$\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right] \geqq m+1$ である．いま，②の両辺を 2 乗すると

$$n+1 \geqq m^2+m+\frac{1}{4} \qquad \therefore \quad n \geqq m^2+m-\frac{3}{4} \quad \cdots ③$$

となるので，①，③の両方をみたす正の整数 n は，$n=m^2+m$ のみであり，このとき

$$\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]=m+1$$

それ以外の場合には

$$\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]=m$$

であるので

$$\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\begin{cases} \mathbf{1} & (\boldsymbol{n=m^2+m} \text{ をみたす正の整数 } \boldsymbol{m} \text{ が存在するとき}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{n=m^2+m} \text{ をみたす正の整数 } \boldsymbol{m} \text{ が存在しないとき}) \end{cases}$$ (答)

【3】A の要素を a，b，c，d，e とおき

$$1 \leqq a<b<c<d<e \leqq 19$$

であるとする．このとき，A のどの 2 つの要素の差も 1 より大きいことから

$$b-a>1,\ c-b>1,\ d-c>1,\ e-d>1$$

となる．これより

$$1 \leqq a<b-1<c-2<d-3<e-4 \leqq 15$$

が成り立ち，これをみたす a，b，c，d，e の組の個数が，求める A の個数であるから

$${}_{15}\mathrm{C}_5=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\mathbf{3003}$$ (答)

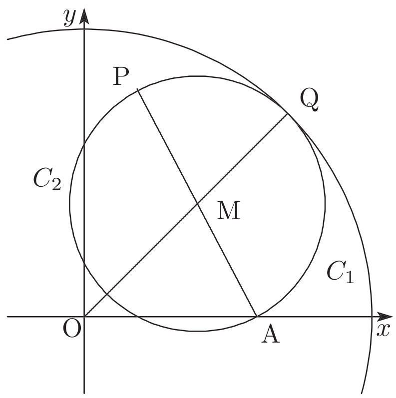
【4】(1) C_1 と C_2 は点 Q で接しているので，3 点 O，M，Q は同一直線上にある．そして，点 Q の座標が

$(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)$

であることから，点 M の座標は

$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\ (0<r<5)$

と表すことができる．このとき，C_2 の半径は $5-r$ となり，これが線分 AM の長さに等しいことから



$$\mathrm{AM}^2=(5-r)^2$$

$$\Longleftrightarrow (r\cos\theta-3)^2+r^2\sin^2\theta=(5-r)^2$$

$$\Longleftrightarrow r^2\cos^2\theta-6r\cos\theta+9+r^2\sin^2\theta=25-10r+r^2$$

$$\therefore \quad r=\frac{8}{5-3\cos\theta}$$

したがって，求める M の座標は

$$\mathrm{M}\left(\boldsymbol{\frac{8\cos\theta}{5-3\cos\theta}},\ \boldsymbol{\frac{8\sin\theta}{5-3\cos\theta}}\right)$$ (答)

(2) P は線分 AM を 2 : 1 に外分する点であるから，P$(X,\ Y)$ とおくと

$$X=-3+2\cdot\frac{8\cos\theta}{5-3\cos\theta},\ Y=2\cdot\frac{8\sin\theta}{5-3\cos\theta}\quad\cdots①$$

点 P は円 C_1 の内部または周上にあるので，$-5\leqq X\leqq 5$ であることに注意し，①の第 1 式を $\cos\theta$ について解くと

$$\cos\theta=\frac{5X+15}{3X+25}$$

これを①の第 2 式に代入し，$\sin\theta$ について解くと

$$\sin\theta=\frac{5Y}{3X+25}$$

となるから，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より

$$\left(\frac{5X+15}{3X+25}\right)^2+\left(\frac{5Y}{3X+25}\right)^2=1\qquad\therefore\quad \frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{16}=1$$

したがって，求める点 P の軌跡は

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1}$　　(答)

【5】(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x-\sin x&=2\left\{\sin x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\\&=2\left(\sin x\cos\frac{2\pi}{3}+\cos x\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\&=2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

であり，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき，$-\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{2\pi}{3}\leqq\dfrac{5\pi}{3}$ であるから

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x>0\iff 2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)>0\iff 0<x+\frac{2\pi}{3}<\pi$$

ゆえに，求める x の値の範囲は

$\boldsymbol{-\dfrac{2\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{3}}$　　(答)

(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left|\frac{4\sin x}{\sqrt{3}\cos x-\sin x}\right|dx&=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2|\sin x|}{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}dx\\&=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\frac{-2\sin x}{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x}{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}dx\end{aligned}$$

ここで，$x+\dfrac{2\pi}{3}=\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}2\sin x=2\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)&=2\sin\theta\cos\frac{2\pi}{3}-2\cos\theta\sin\frac{2\pi}{3}\\&=-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\end{aligned}$$

となるので，求める定積分の値は

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\left(1+\sqrt{3}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\left(1+\sqrt{3}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\Big[\theta+\sqrt{3}\log|\sin\theta|\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}-\Big[\theta+\sqrt{3}\log|\sin\theta|\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\log\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\log\sqrt{3}}\qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t f(t)dt$ の両辺を x で微分すると

$g'(x)=e^x f(x)\quad\cdots①$

また，$x(f(x)-1)=2\displaystyle\int_0^x e^{-t}g(t)dt$ の両辺を x で微分すると

$f(x)-1+xf'(x)=2e^{-x}g(x)\quad\cdots②$

さらに，②の両辺を x で微分すると

$2f'(x)+xf''(x)=-2e^{-x}g(x)+2e^{-x}g'(x)\quad\cdots③$

①，②，③より，$g(x)$，$g'(x)$ を消去すると

$2f'(x)+xf''(x)=-f(x)+1-xf'(x)+2f(x)$

$\therefore\quad xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1\quad\cdots④$ （証終）

(2) $f(x)$ の次数を n とおく．$n\geqq 2$ と仮定し，$f(x)=ax^n+h(x)$ ($a\fallingdotseq 0$, $h(x)$ は高々 $n-1$ 次の整式) とすると

$xf''(x)=n(n-1)ax^{n-1}+xh''(x)$

$(x+2)f'(x)=nax^n+2nax^{n-1}+(x+2)h'(x)$

より，④の左辺の n 次の項の係数は

$na-a=(n-1)a\fallingdotseq 0\quad(\because\quad a\fallingdotseq 0,\ n\geqq 2)$

となるので，④の左辺の次数は $n\,(\geqq 2)$ である．これは，④の右辺の次数が 0 であることに反するので，$f(x)$ は定数または 1 次式である． （証終）

(3) $g(0)=\displaystyle\int_0^0 e^t f(t)dt=0$ であるから，②において $x=0$ とすると

$f(0)-1=0\qquad\therefore\quad f(0)=1$

よって，(2) の結果と合わせると，$f(x)=ax+1$ とおける．このとき，④より

$a(x+2)-ax-1=1\qquad\therefore\quad a=1$

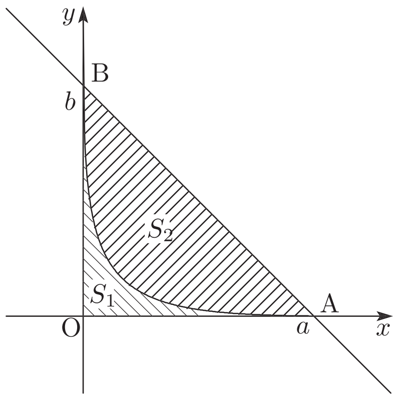
したがって

$f(x)=\boldsymbol{x+1}$ (答)

これと②より

$x+1-1+x=2e^{-x}g(x)\qquad\therefore\quad g(x)=\boldsymbol{xe^x}$ (答)

【7】(1) $y=0$ のとき



$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}}=1 \iff \frac{x}{a}=1 \qquad \therefore \quad x=a$$

であり，$0 \leqq x \leqq a$ において，$y \geqq 0$ である．ここで，$X=\dfrac{x}{a}$ とおくと，$dx=adX$ であるから

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^a y\,dx\\&=b\int_0^1\left(1-3\sqrt[3]{X}+3\sqrt[3]{X^2}-X\right)adX\\&=ab\left[X-\frac{9}{4}X^{\frac{4}{3}}+\frac{9}{5}X^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}X^2\right]_0^1\\&=ab\left(1-\frac{9}{4}+\frac{9}{5}-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{20}ab}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $X=\dfrac{x}{a}$，$Y=\dfrac{y}{b}$ とおき，C と l の式から Y を消去して整理すると

$$\sqrt[3]{1-X}=1-\sqrt[3]{X} \iff 1-X=1-3\sqrt[3]{X}+3\sqrt[3]{X^2}-X \iff X^2=X$$

$\therefore \quad X=0,\ 1$ すなわち $x=0,\ a$

また，$\sqrt[3]{X}+\sqrt[3]{Y}=1$ のとき

$$Y=\left(1-\sqrt[3]{X}\right)^3=1-X+3\left(\sqrt[3]{X^2}-\sqrt[3]{X}\right)$$

より，$0 \leqq X \leqq 1$ において，$1-X \geqq \left(1-\sqrt[3]{X}\right)^3$ である．よって，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$ とすると

$$S_2=\triangle\mathrm{OAB}-S_1=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{20}ab=\frac{9}{20}ab$$

であるから

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{20}ab\div\left(\frac{9}{20}ab\right)=\boldsymbol{\frac{1}{9}}\qquad\text{(答)}$$

【8】(1) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$$\sin x-\cos x \geqq 0 \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5\pi}{4}\right)$$

であるから，求める面積は

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx\\&=\sqrt{2}\left[-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\\&=\sqrt{2}(-\cos\pi+\cos 0)=\boldsymbol{2\sqrt{2}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x$，$\cos x$ はともに 0 以上だから

$$
\begin{aligned}
|\sin x| \geqq |\cos x| &\iff \sin x \geqq \cos x \\
&\iff \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqq 0 \quad \cdots ① \\
&\iff \frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \quad \left(①\text{で等号が成立するのは } x = \frac{\pi}{4}\text{ のとき}\right)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin x$ は 0 以上，$\cos x$ は 0 以下だから

$$
\begin{aligned}
|\sin x| \geqq |\cos x| &\iff \sin x \geqq -\cos x \\
&\iff \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqq 0 \quad \cdots ② \\
&\iff \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4} \quad \left(②\text{で等号が成立するのは } x = \frac{3\pi}{4}\text{ のとき}\right)
\end{aligned}
$$

$\pi \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{4}$ のとき，$\sin x$，$\cos x$ はともに 0 以下だから

$$
\begin{aligned}
|\sin x| \geqq |\cos x| &\iff \sin x \leqq \cos x \\
&\iff \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 0 \quad \cdots ③
\end{aligned}
$$

これをみたす x は $x = \dfrac{5\pi}{4}$ のみであり，このとき③ で等号が成立する．

以上より

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}}\textbf{のとき} && \boldsymbol{|\sin x| > |\cos x|} \\
&\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}}\textbf{のとき} && \boldsymbol{|\sin x| = |\cos x|} \qquad \text{(答)} \\
&\boldsymbol{\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}}\textbf{のとき} && \boldsymbol{|\sin x| < |\cos x|}
\end{aligned}
$$

(3) $y = |\sin x|$ と $y = |\cos x|$ のグラフは直線 $x = \dfrac{3\pi}{4}$ に関して対称であるから，(2) の結果と合わせると

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 x\,dx - 2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos 2x)dx - \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)dx \\
&= \pi\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \pi\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) - \pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\right)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

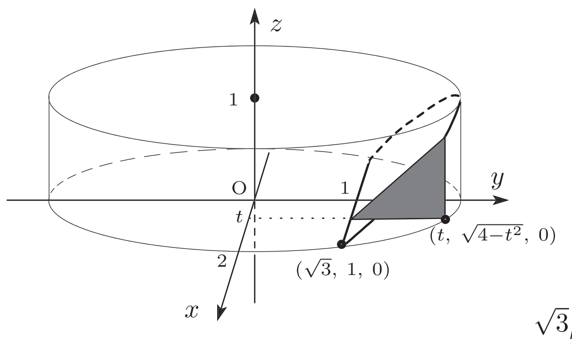
【9】(1) $S_k = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot k\cdot\sin\dfrac{k}{2n}\pi = \boldsymbol{\dfrac{k}{2}\sin\dfrac{k}{2n}\pi}$ 　(答)

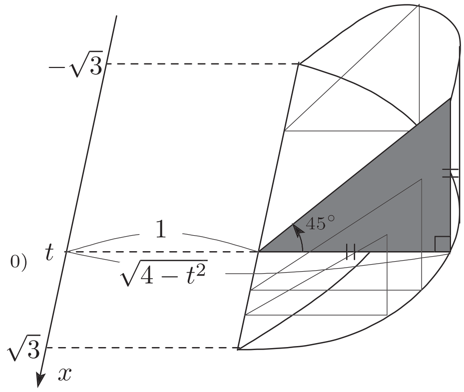
(2) (1) の結果より，区分求積法を用いると

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} S_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2}\sin\frac{k}{2n}\pi \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^1$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{\pi^2}} \qquad \text{(答)}$$

【10】平面 H の下側の立体を P とする．立体 P の平面 $x = t$ $(-\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3})$ による切り口の面積 $S(t)$ を求める．





xy 平面上の直線 $x = t$，$z = 0$ と円 $x^2 + y^2 = 4$，$z = 0$ の共有点の y 座標は

$\pm\sqrt{4 - t^2}$

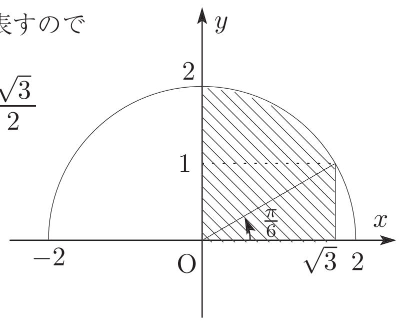
である．ゆえに，立体 P の平面 $x = t$ $(-\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3})$ による切り口は直角をはさむ 2 辺の長さが $\sqrt{4 - t^2} - 1$ の直角 2 等辺 3 角形であり，その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4 - t^2} - 1\right)^2 = \frac{5 - t^2 - 2\sqrt{4 - t^2}}{2}$$

となる．したがって，立体 P の yz 平面に関する対称性より，求める体積は

$$2\int_0^{\sqrt{3}} S(t)\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(5 - t^2 - 2\sqrt{4 - t^2}\right) dt$$
$$= \left[5t - \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} - 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - t^2}\,dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - t^2}\,dt$ は右図の斜線部分の面積を表すので



$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - t^2}\,dt = \frac{\pi \cdot 2^2}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より，求める体積は

$$2\int_0^{\sqrt{3}} S(t)\,dt = 5\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} - 2\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \boldsymbol{3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2$$
$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\right|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_3}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\right|^2\quad\left(\because\quad\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}=\vec{0}\right)$$

これは点 Q の位置によらない値なので，2 点 Q，R に対して

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{RP_1}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{RP_2}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{RP_3}}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2$$

が成り立つ.　（証終）

【2】 (1) 袋の中には偶数のカードと奇数のカードが 50 枚ずつ入っている．そして，$X+Y$ が偶数となるためには，X が偶数の場合は Y は偶数，X が奇数の場合は Y は奇数であればよい．よって，X の偶奇に関わらず，$X+Y$ が偶数となる確率は

$$\frac{50}{100}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\qquad\text{(答)}$$

(2) 100 枚のカードの中からカードを 1 枚ずつ，計 2 枚取り出す方法は，取り出したカードを元に戻すとき

$100^2=10000$（通り）

あり，そのそれぞれは同様に確からしい.

$X+Y\leqq 5$ となる X，Y の組は

$(X,\ Y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$

の 10 通りあるから，求める確率は

$$\frac{10}{10000}=\boldsymbol{\frac{1}{1000}}\qquad\text{(答)}$$

(3) $X+Y\leqq n$ となる確率を $P(n)$ とおく．$n<m$ のとき，X，Y が不等式 $X+Y\leqq n$ をみたせば，不等式 $X+Y\leqq m$ もみたすから

$P(1)\leqq P(2)\leqq\cdots\leqq P(200)\leqq P(201)\leqq\cdots\qquad\cdots①$

が成り立つ.

ここで，$X+Y=k$ $(2\leqq k\leqq 101)$ となる X，Y の組は

$(X,\ Y)=(1,\ k-1),\ (2,\ k-2),\ \cdots,\ (k-1,\ 1)$

の $k-1$ 通りあるから，$X+Y\leqq n$ $(2\leqq n\leqq 101)$ となる X，Y の組は

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n-1)\ \text{(通り)}$$

ある．よって $2\leqq n\leqq 101$ のとき，$P(n)=\dfrac{n(n-1)}{20000}$ と表せて，これが $\dfrac{1}{4}$ に等し

いとき

$$\frac{n(n-1)}{20000}=\frac{1}{4}\iff n(n-1)=5000 \quad \cdots②$$

が成り立つが

$$71\cdot 70=4970,\ 72\cdot 71=5112$$

であるから，②をみたす自然数 n $(2\leqq n\leqq 101)$ は存在しない.

よって，①と合わせると，$X+Y\leqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{4}$ であるような自然数 n は存在しない. （証終）

【3】p^n 以下の正整数で，p^k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ で割り切れるものの個数は

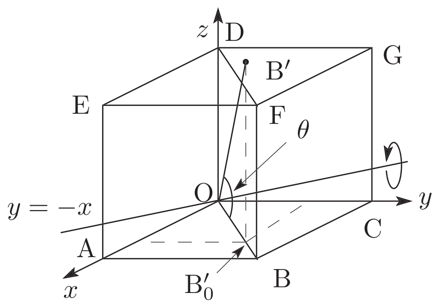
$$\frac{p^n}{p^k}=p^{n-k}$$

であるから，求める回数は

$$p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p+1=\boldsymbol{\frac{p^n-1}{p-1}} \qquad \text{(答)}$$

【4】点 A, B, C, D, E, F, G の回転後の点をそれぞれ A$'$, B$'$, C$'$, D$'$, E$'$, F$'$, G$'$ とする.

(1) 点 O, B, F を通る平面で考えると B$'$, F$'$ も同一平面上にあり，回転の角度を θ とすると



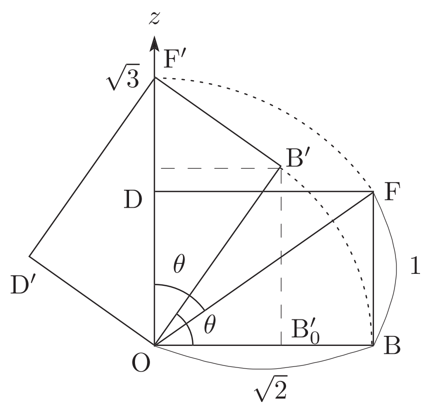
$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OF}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{OF}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

である．このとき，B$'$ から xy 平面上に下ろした垂線の足を B_0' とすると

$$\mathrm{OB}_0'=\mathrm{OB}'\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$$

$$\mathrm{B}'\mathrm{B}_0'=\mathrm{OB}'\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$$



であり，△OAB は OA = AB の直角二等辺三角形であるから，B$'$ の座標は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{OB}_0',\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{OB}_0',\ \mathrm{B}'\mathrm{B}_0'\right)$$

$$=\left(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta\right)$$

となる.

よって，回転後の頂点 B の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{A'G'}}$ を直線 $y=-x$ に平行または垂直なベクトルを用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{A'G'}}=\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'F'}}$$

ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 1,\ 0)-(1,\ 0,\ 0)\\&=(-1,\ 1,\ 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{B'F'}}&=\overrightarrow{\mathrm{OF'}}-\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=(0,\ 0,\ \sqrt{3})-\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\\&=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A'G'}}&=(-1,\ 1,\ 0)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\\&=\boldsymbol{\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}\end{aligned}$$

(答)

【5】(1) 点 $\dfrac{(1+i)z+2-i}{z-2i}$ が中心 $1+i$, 半径 1 の円を描くので

$$\left|\frac{(1+i)z+2-i}{z-2i}-(1+i)\right|=1$$

で, これを変形すると

$$\begin{aligned}&|(1+i)z+2-i-(1+i)(z-2i)|=|z-2i|\\\iff&|z-2i|=|i|\\\iff&|z-2i|=1\end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{C_1}$ **は中心 $\boldsymbol{2i}$, 半径 1 の円**である.　(答)

(2) $iz=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)z$ なので, C_2 は円 C_1 を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた円, すなわち

中心 $i\cdot 2i=-2$,
半径 1 の円

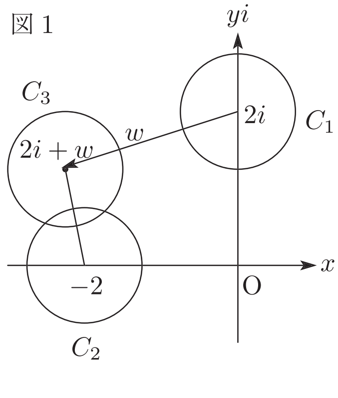
である.

一方, C_3 は

中心 $2i+w$,
半径 1 の円

であるから, 2 円が共有点をもつための条件は

図 1

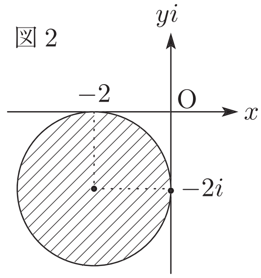


$$1-1 \leqq |(2i+w)-(-2)| \leqq 1+1$$
$$\iff |w-(-2-2i)| \leqq 2$$

よって，w の存在範囲は**図 2 の斜線部分**

(境界を含む) である．　　(答)

図 2



＜研究＞

一般に半径 r，R の 2 円が共有点をもつための条件は，

2 円の中心間の距離 d に対して

$$|R-r| \leqq d \leqq R+r$$

が成り立つことである．各自，図をかいて確認してほしい．

【6】 (1) $z_1 = wz_0 - 1$，$z_2 = wz_1 - 1$ より

$$z_1 - z_0 = (w-1)z_0 - 1$$
$$z_2 - z_0 = w(wz_0-1) - 1 - z_0 = (w+1)\{(w-1)z_0 - 1\}$$

となり

$$z_2 - z_0 = (w+1)(z_1 - z_0)$$

が成り立つ．$z_0 \fallingdotseq \dfrac{1}{w-1}$ であるとき

$$z_1 - z_0 = (w-1)z_0 - 1 \fallingdotseq 0$$

また

$$w+1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

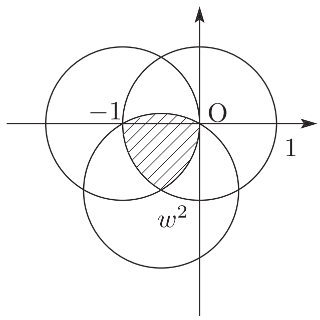
であるから，点 A_2 は点 A_1 を A_0 のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点である．よって，三角形 $A_0A_1A_2$ は正三角形となる．　　(証終)

(2) A_0，A_1，A_2 が原点中心，半径 1 の円の周上または内部に含まれる条件は

$$|z_0| \leqq 1,\ |z_1| \leqq 1,\ |z_2| \leqq 1$$

であるが，$w^3 = 1$，$|w| = 1$ より

$$|z_1| \leqq 1 \iff |wz_0 - 1| \leqq 1$$
$$\iff |z_0 - w^2| \leqq 1$$
$$|z_2| \leqq 1 \iff |w(wz_0-1) - 1| \leqq 1$$
$$\iff |w^2 z_0 - (w+1)| \leqq 1$$
$$\iff |z_0 - (w^2+w)| \leqq 1$$
$$\iff |z_0 + 1| \leqq 1$$



これらを図示すると，点 A_0 が動きうる範囲は図の斜線部分となる（境界を含む）．

この領域の面積は，1 辺 1 の正三角形と，半径 1・中心角 $\dfrac{\pi}{3}$ の弓形 3 個分で

$$3 \cdot \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$　　(答)

【7】 (1)

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_0$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} \cdot 2(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \boldsymbol{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\quad z_2 = \dfrac{-1}{z_0} = \dfrac{\cos\pi + i\sin\pi}{2(\cos\theta + i\sin\theta)} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\{\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\}}$ 　(答)

(3) (1), (2) より,

$$\begin{cases} \mathrm{OP}_0 = |z_0| = 2,\ \mathrm{OP}_1 = |z_1| = 1 \\ \angle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{O} = \dfrac{\pi}{2} \qquad (\because \text{図 } 1) \end{cases}$$

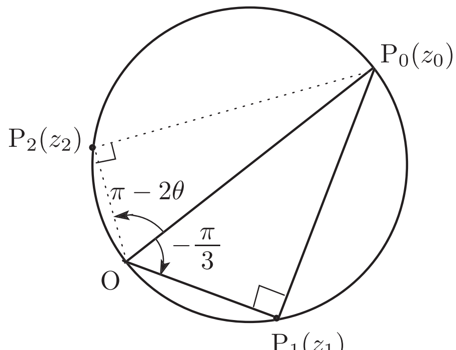


図 1

よって, 4 点 $\mathrm{O}, \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ が同一円周上にあるのは, $\angle\mathrm{OP}_2\mathrm{P}_0 = \dfrac{\pi}{2}$ のときで $\dfrac{z_0 - z_2}{0 - z_2}$ が純虚数のときである.

$$\frac{z_0 - z_2}{0 - z_2}$$
$$= \frac{z_0 + \frac{1}{z_0}}{\frac{1}{z_0}} = {z_0}^2 + 1$$
$$= \{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^2 + 1 = 4(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 1$$
$$= (4\cos 2\theta + 1) + 4i\sin 2\theta$$
$$\therefore \quad 4\cos 2\theta + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4(2\cos^2\theta - 1) + 1 = 0$$
$$\therefore \quad \cos^2\theta = \frac{3}{8},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より},\ \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{8}},\ \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}}$$
$$\therefore \quad z_0 = 2\left(\sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{5}{8}}i\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}i} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r > 0,\quad 0 \leqq \theta < 2\pi)$$

とおくと

$$w = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= r\left\{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$\therefore \quad w^{24} = r^{24}\left[\cos\left\{24\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right\} + i\sin\left\{24\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$$
$$= r^{24}(\cos 24\theta + i\sin 24\theta)$$

なので, $w^{24} = 1$ であるとき

$$r^{24} = 1 \qquad \therefore \quad r = 1$$

そして

$$24\theta = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$
$$\therefore \quad \theta = \frac{n}{12}\pi$$

よって, $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であるとき

$$\theta = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$$

この θ に対して

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

であり, 図示すると**図の 5 つの点**になる.

(答)

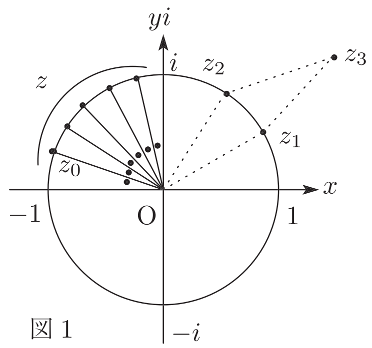


図 1

(2) 図 1 より, z と z_2 の距離が最大になるのは,

$$\theta = \frac{11}{12}\pi$$

のときである. よって,

$$z_0 = \cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi \ = \ \cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i} \qquad \text{(答)}$$

(3)
$$z_3 = z_1 + z_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

である. そこで, 座標平面上で考えると, 3 点

$$\mathrm{P}_0\ \left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right),\quad \mathrm{P}_2\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{P}_3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

を頂点とする三角形の面積を求めればよい. ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_0} = \left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{4},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

なので, 求める面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}\left|-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$
$$= \frac{1}{16}\left|-(\sqrt{6}+\sqrt{2}+2) - \sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3})\right|$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【9】(1) $w_0 = z + \dfrac{1}{z}$ より

$$w_1 = {w_0}^2 - 2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$$

$$w_2 = {w_1}^2 - 2 = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 - 2 = z^4 + \frac{1}{z^4}$$

よって

$$w_n = z^{2^n} + \frac{1}{z^{2^n}} \quad (n = 0,\, 1,\, \cdots)$$

と類推できるので, これを数学的帰納法で証明する.

(I) $w_0 = z + \dfrac{1}{z}$ なので, $n = 0$ のときの成立は明らかである.

(II) $n = k\ (\geqq 0)$ のときの成立, すなわち $w_k = z^{2^k} + \dfrac{1}{z^{2^k}}$ を仮定すると

$$\begin{aligned} w_{k+1} = {w_k}^2 - 2 &= \left(z^{2^k} + \frac{1}{z^{2^k}}\right)^2 - 2 \\ &= \left(z^{2^k}\right)^2 + \left(\frac{1}{z^{2^k}}\right)^2 = z^{2^{k+1}} + \frac{1}{z^{2^{k+1}}} \end{aligned}$$

となるので, $n = k + 1$ のときも成立する.

以上より

$$\boldsymbol{w_n = z^{2^n} + \frac{1}{z^{2^n}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ なので

$$\begin{aligned} w_0 = z + \frac{1}{z} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \sqrt{2} \times \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

$$\therefore \quad |w_0|^2 = \left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{3^2 \times 6 + 2}{4^2} = \boldsymbol{\frac{7}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) ド・モアブルの定理より

$$z^{2^n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2^n}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 2^n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} \times 2^n\right)\right\}$$

となるので

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2^n}, \quad \theta_n = \frac{\pi}{6} \times 2^n$$

とおくと

$$\begin{aligned} w_n &= r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) + \frac{1}{r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)} \\ &= r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) + \frac{1}{r_n}\{\cos(-\theta_n) + i\sin(-\theta_n)\} \end{aligned}$$

$$= \left(r_n + \frac{1}{r_n}\right)\cos\theta_n + i\left(r_n - \frac{1}{r_n}\right)\sin\theta_n$$

$$\therefore \quad |w_n|^2 = \left(r_n + \frac{1}{r_n}\right)^2\cos^2\theta_n + \left(r_n - \frac{1}{r_n}\right)^2\sin^2\theta_n$$

$$= \left({r_n}^2 + \frac{1}{{r_n}^2}\right) + 2(\cos^2\theta_n - \sin^2\theta_n)$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} + 2^{2^n}\right\} + 2\cos 2\theta_n$$

そこで, $f(n) = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} + 2^{2^n}\right\} + 2\cos 2\theta_n$ とおけば, (2) より, $f(0) < 10^2$ であり

$$f(1) \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + 2 < 10^2$$

$$f(2) \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2^4 + 2 < 10^2$$

そして, $n \geqq 3$ のとき

$$|2\cos 2\theta_n| \leqq 2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} > 0,\ 2^{2^n} \geqq 2^8$$

なので

$$f(n) > 0 + 2^8 - 2 > 10^2$$

よって, $f(n) > 10^2$ すなわち $|w_n| > 10$ となる最小の番号 n は

$\boldsymbol{n = 3}$ （答）

5章　実戦演習5

問題

【1】(1) 出た目の数が1，4ならBに，2，5ならCに移り，3，6ならAに戻るので，求める確率はすべて

$$\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\quad \text{(答)}$$

(2) (1)と同じように考えると，n 回投げる直前に駒がどこにあっても，n 回投げたとき，移動させた後の駒がA, B, Cにある確率はすべて

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}}\quad \text{(答)}$$

(3) サイコロを n 回投げたとき，駒が頂点Bを $2n$ 回通過するには，出た目の合計を k とすると，$k=6n-2$，$6n-1$，$6n$ であればよい．すなわち，$n\geqq 2$ のとき

・6の目が $n-1$ 回，4の目が1回出るか，6の目が $n-2$ 回，5の目が2回出る

・6の目が $n-1$ 回，5の目が1回出る

・6の目が n 回出る

のいずれかであればよいので，求める確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1+1}{6^n}=\frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot 6^n}$$

これは $n=1$ のときも成り立つので，求める確率は

$$\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot 6^n}}\quad \text{(答)}$$

【2】(1) 数列 $\{c_n\}$ は，初項24，公比8の等比数列であるから，その一般項は

$$c_n=24\cdot 8^{n-1}=3\cdot 8^n$$

このとき，与えられた漸化式より

$$b_{n+1}=4b_n+3\cdot 8^n$$

この各辺を 8^{n+1} で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{8^{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b_n}{8^n}+\frac{3}{8}$$

よって，$\dfrac{b_n}{8^n}=d_n$ とおくと

$$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{3}{8}\ \text{すなわち}\ d_{n+1}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\left(d_n-\frac{3}{4}\right)$$

が成り立つので，数列 $\left\{d_n-\dfrac{3}{4}\right\}$ は初項

$$d_1-\frac{3}{4}=\frac{b_1}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$d_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad \therefore\quad b_n=\boldsymbol{\frac{3}{4}\cdot 8^n+\frac{1}{2}\cdot 4^n}\quad \text{(答)}\quad \cdots①$$

(2) 与えられた漸化式より

$$\begin{aligned}a_{n+3}&=2a_{n+2}+b_{n+2}\\&=2(2a_{n+1}+b_{n+1})+4b_{n+1}+c_{n+1}=4a_{n+1}+6b_{n+1}+c_{n+1}\\&=4(2a_n+b_n)+6(4b_n+c_n)+8c_n=8a_n+28b_n+14c_n\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_{n+3}-a_n=7(a_n+4b_n+2c_n)\quad\cdots②$$

が成り立つ．ここで，a_n, b_n, c_n が整数であれば，与えられた漸化式より，a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} も整数であるので，帰納的に任意の自然数 n に対し，a_n, b_n, c_n は整数である．ゆえに，②より，$a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れる． （証終）

また

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 2a_1 + b_1 = 6 + 8 = 14$$
$$b_2 = \frac{3}{4}\cdot 8^2 + \frac{1}{2}\cdot 4^2 = 56 \quad (\because \quad ①)$$
$$a_3 = 2a_2 + b_2 = 84$$

であるから，$a_{n+3}-a_n$ が 7 で割り切れることと合わせると，a_n が 7 で割り切れるための条件は

n が 3 で割ると 2 余る数であるか，n が 3 の倍数であること （答）

である．

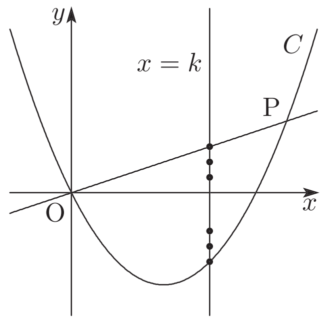
【3】(1) 直線 OP は，原点 O を通り，傾きが

$$\frac{3n^2-6n-0}{n-0} = 3n-6$$

の直線であるから，その方程式は

$$y = (3n-6)x$$

となる．



よって，直線 $x=k$ 上にあり D に含まれる格子点は

$(k,\ (3n-6)k)$, $(k,\ (3n-6)k-1)$, $\cdots$,
$(k,\ 3k^2-6k)$

であるから，その個数は

$$f(k) = (3n-6)k - (3k^2-6k) + 1 = \boldsymbol{-3k^2+3nk+1} \quad \text{（答）}$$

(2) (1) の結果より，D に含まれる格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(-3k^2+3nk+1) = -3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3n\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n + 1$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(n^2-n+2)} \quad \text{（答）}$$

(3) $f(k) = -3\left(k-\dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{3n^2}{4} + 1$

であり，k は整数であるから，n が偶数の場合，$k=\dfrac{n}{2}$ のときに $f(k)$ は最大になる．また，n が奇数の場合，k が $\dfrac{n}{2}$ に最も近い整数のとき，すなわち $k=\dfrac{n\pm1}{2}$ のときに $f(k)$ は最大になる．

以上をまとめると，$f(k)$ が最大になるような k の値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{n}{2}} & \textbf{(}\boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数のとき)} \\ \boldsymbol{\dfrac{n\pm1}{2}} & \textbf{(}\boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数のとき)} \end{cases} \quad \text{（答）}$$

【4】(1) P(2, 0) のとき

$$\overline{\mathrm{P}S} = \frac{|3\cdot 2 - 0|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{5}\sqrt{10}} \quad \text{（答）}$$

P$(x,\ y)$ のとき

$$\overline{\mathrm{P}S} = \frac{|3x-y|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|3x-y|}{\sqrt{10}}$$

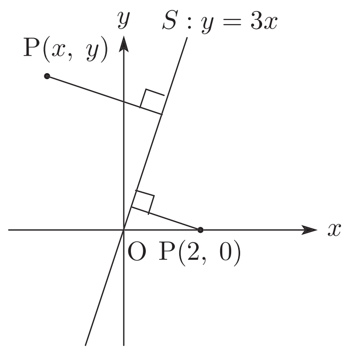
であるから，$\overline{\mathrm{P}S} \leqq 1$ となるのは

$$|3x-y| \leqq \sqrt{10}$$

$$\iff \quad -\sqrt{10} \leqq 3x-y \leqq \sqrt{10}$$

$$\iff \quad \boldsymbol{3x-\sqrt{10} \leqq y \leqq 3x+\sqrt{10}} \quad \text{（答）}$$

で表される領域である．



(2) P(2, 1) のとき

$$\overline{\mathrm{P}S} = \mathrm{OP} - \sqrt{2}$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \quad \text{（答）}$$

P$(x,\ y)$ のとき

$$\overline{\mathrm{P}S} = \left|\mathrm{OP} - \sqrt{2}\right|$$

$$= \left|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}\right|$$

であるから，$\overline{\mathrm{P}S} \leqq 1$ となるのは

$$\left|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}\right| \leqq 1$$

$$\iff \quad -1 \leqq \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2} \leqq 1$$

$$\iff \quad \sqrt{2}-1 \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq \sqrt{2}+1$$

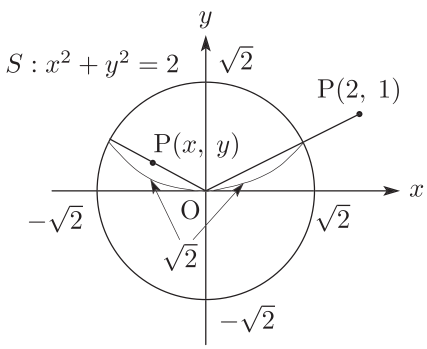
$$\iff \quad \left(\sqrt{2}-1\right)^2 \leqq x^2+y^2 \leqq \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

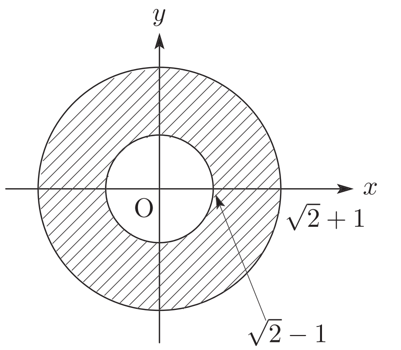
で表される領域であり，その面積は

$$\pi\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^2 - \pi\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$$= \boldsymbol{4\sqrt{2}\pi} \quad \text{（答）}$$

である．





(3) $\mathrm{P}(x,\ y)$ のとき

$$\overline{\mathrm{P}S} = \begin{cases} |y| & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x^2+y^2} & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，$\overline{\mathrm{P}S} \leqq 1$ となるのは

(i) $x \geqq 0$ のとき

$$|y| \leqq 1$$

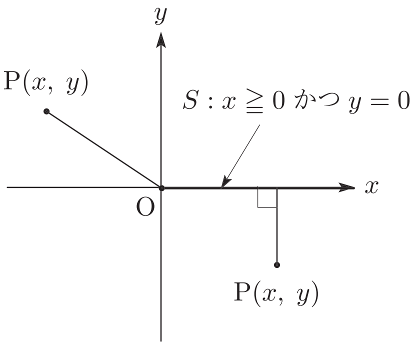
$$\iff \quad -1 \leqq y \leqq 1$$

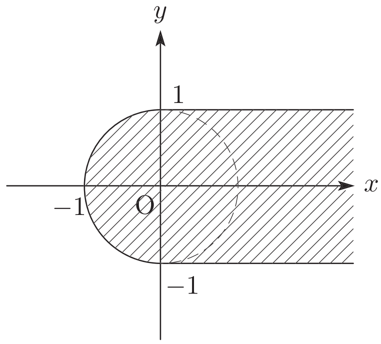
(ii) $x \leqq 0$ のとき

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqq 1$$

$$\iff \quad x^2+y^2 \leqq 1$$

で表される領域であり，これを図示すると**右図の斜線部 (境界を含む)** である．　(答)





【5】(1) C_1 と C_2 の交点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} 6x^2+4y^2=3 \ \cdots\cdots \text{①} \\ 8x-8y^2=1 \ \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$ の解 $(x,\ y)$ として得られる．ここで，②より $y^2 = x - \dfrac{1}{8}$ であり，これを①に代入して

$$6x^2 + 4\left(x - \frac{1}{8}\right) = 3 \qquad \therefore\ \ (2x-1)(6x+7)=0$$

$y^2 = x - \dfrac{1}{8} \geqq 0$ すなわち $x \geqq \dfrac{1}{8}$ に注意して　　$x = \dfrac{1}{2}$

したがって，C_1，C_2 の交点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$ である．

一方，①の両辺を x で微分して

$$12x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore\ \ 3x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

ゆえに，C_1 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$ における接線の傾き m_1 は，複号同順で

$$m_1 = -\frac{\frac{3}{2}}{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}} = \mp\frac{3}{\sqrt{6}}$$

次に，②の両辺を x で微分して

$$8 - 16y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore\ \ 1 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

ゆえに，C_1 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$ における接線の傾き m_2 は，複号同順で

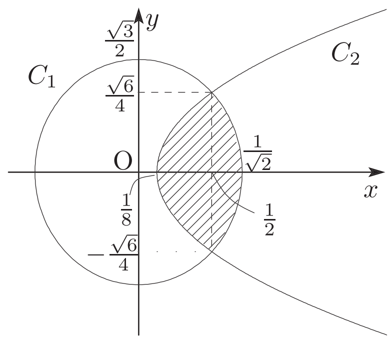
$$m_2 = \frac{1}{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}} = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}$$

したがって，複号同順で

$$m_1m_2=\left(\mp\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=-1$$

となるので，交点における C_1 と C_2 の接線は直交する． （証終）

(2) C_1 と C_2 のグラフは右図のようになり，題意の領域は右図の斜線部分のようになる．ここで，C_1 の $x \geqq 0$ の部分を表す方程式は



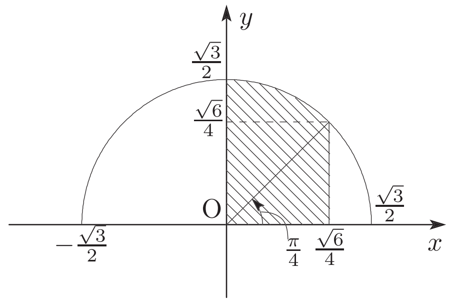
$$x=\sqrt{\frac{3-4y^2}{6}}$$

であるから，求める面積 S は

$$S=2\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left\{\sqrt{\frac{3-4y^2}{6}}-\left(y^2+\frac{1}{8}\right)\right\}dy$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}dy-2\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left(y^2+\frac{1}{8}\right)dy$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}dy$ は右図の斜線部分の面積を表すので



$$\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}dy$$

$$=\frac{\pi}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{3\pi+6}{32}$$

したがって

$$S=2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3\pi+6}{32}-2\left[\frac{y^3}{3}+\frac{y}{8}\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}\pi}{16}} \quad \text{(答)}$$

【6】 $x=1-\cos\theta,\ y=\theta-\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$$

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta \neq 0$ なので

$$\frac{dy}{dx}=\boldsymbol{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}} \quad \text{(答)}$$

次に $\displaystyle\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$ であり

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{\sin\theta\sin\theta-\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

なので

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\boldsymbol{\frac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}} \quad \text{(答)}$$

【7】(1) $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$, $y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ より

$$\frac{dx}{dt}=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ \frac{dy}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\qquad \therefore\ \boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}}\qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$ となるのは

$$\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{1}{2}\iff\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}=\frac{1}{2}\iff 2e^{2t}-2=e^{2t}+1$$
$$\iff e^{2t}=3$$

したがって

$$t=\boldsymbol{\frac{\log 3}{2}}\qquad \text{(答)}$$

(3) $t=\dfrac{\log 3}{2}$ に対応する x, y は，$e^t=\sqrt{3}$ より

$$x=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ y=\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって，点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ における接線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\qquad\therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから

$$\boldsymbol{k=\frac{\sqrt{3}}{2}}\qquad \text{(答)}$$

(4) (1) より，$\dfrac{dx}{dt}>0$, $y>0$ なので，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\sqrt{2}}y\,dx$$

で与えられる．いま，$x=\sqrt{2}$ のとき

$$\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\sqrt{2}\iff e^{2t}-2\sqrt{2}e^t-1=0$$

$e^t>0$ より

$$e^t=\sqrt{2}+\sqrt{3}\ \text{すなわち}\ t=\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

よって，$\alpha=\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ とおくと，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\sqrt{2}}y\,dx=\int_0^{\alpha}y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_0^{\alpha}\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\alpha}(e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+2t\right]_0^{\alpha}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\alpha}-\frac{1}{2}e^{-2\alpha}+2\alpha\right)$$

ここで

$$e^{2\alpha}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6},\ e^{-2\alpha}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$$

なので

$$S=\frac{1}{4}\left\{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}-\frac{5-2\sqrt{6}}{2}+2\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}}\qquad \text{(答)}$$

【8】(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ より

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

であるから

$0<x<e$ のとき　$f'(x)>0$

$x=e$ のとき $f'(x)=0$

$x>e$ のとき $f'(x)<0$

したがって，$f(x)$ は $x\geqq e$ において単調に減少する．（証終）

(2) $n>m\geqq 3>e$ をみたす m，n に対して，$f(n)<f(m)$ が成り立ち

$$\begin{aligned}f(n)<f(m) &\iff \frac{\log n}{n}<\frac{\log m}{m}\\ &\iff m\log n<n\log m\\ &\iff n^m<m^n\end{aligned}$$

と同値変形できる．ゆえに，$n>m\geqq 3$ のとき，$m^n>n^m$ が成り立つ．（証終）

(3) 自然数 n について

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
2^n	2	4	8	16	32	$\cdots$
n^2	1	4	9	16	25	$\cdots$

ここで，$n\geqq 5$ において，$2^n>n^2$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

（I）$n=5$ のとき，上表より成立する．

（II）$n=k$ $(k\geqq 5)$ のときの成立，すなわち

$2^k>k^2$

の成立を仮定する．ここで，上式の両辺に 2 をかけて

$2^{k+1}>2k^2$

であるから，$2k^2$ と $(k+1)^2$ の大小を比較すると

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-3)(k+1)+2>0$（$\because$　$k\geqq 5$）

ゆえに

$2^{k+1}>(k+1)^2$

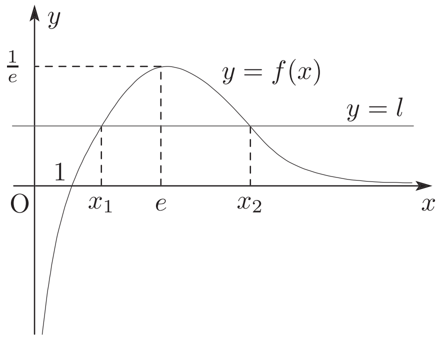
したがって，$n\geqq 5$ で $2^n>n^2$ が成立するので，これと表を合わせると，$2^n\leqq n^2$ をみたす n は

$n=2,\ 3,\ 4$　（答）

(4) $m=n$ のとき，すべての自然数について $n^m=m^n$ が成り立つ．

$m\neq n$ のときを考える．

(1) より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．$f(x_1)=f(x_2)$ をみたす x_1，x_2（ただし $x_1 \fallingdotseq x_2$）は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=l$ $(0<l<f(e))$ の共有点の x 座標として与えられ，$x_1<x_2$ とすると



$1<x_1<e<x_2$

よって，$f(m)=f(n)$，$m<n$ をみたす m は

$1<m<e(<3) \qquad \therefore \quad m=2$

であるから，(3) と $m<n$ であることを考えると

$(m,\ n)=(2,\ 4)$

$m>n$，$m=n$ の場合も含めると，求める自然数の組 $(m,\ n)$ は

$\boldsymbol{(m,\ n)=(2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (k,\ k)}$ (答)

ただし，$\boldsymbol{k}$ は自然数である．

【9】(1) 曲線 $C_2: y=-\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\left(X,\ -\dfrac{a}{X}\right)$ における接線の方程式は $y'=\dfrac{a}{x^2}$ より

$$y=\frac{a}{X^2}(x-X)-\frac{a}{X}$$

であり，この直線が C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ を通るので

$$\frac{1}{t}=\frac{a}{X^2}(t-X)-\frac{a}{X}$$

$\therefore \quad X^2+2atX-at^2=0 \ \cdots\cdots$ ①

①の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=(at)^2+at^2>0$ $(\because\ a>0,\ t>0)$ なので①は異なる 2 解をもつ．

ここで，点 P から曲線 C_2 へ 2 本の接線を引くとき，その接点の x 座標は，X の 2 次方程式①の 2 実解に他ならないので，接点 Q，R の x 座標をそれぞれ q，r とすると，解と係数の関係より

$q+r=-2at,\ qr=-at^2$

ここで，△PQR の重心を $\mathrm{G}(x_{\mathrm{G}},\ y_{\mathrm{G}})$ とおくと

$$x_{\mathrm{G}}=\frac{t+q+r}{3}=\frac{t-2at}{3}=\frac{(1-2a)t}{3}$$

であり，点 P が動くとき，重心 G が定点であるためには

$$\frac{(1-2a)t}{3}=(\text{定数}) \text{ すなわち } 1-2a=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{2}$$

が必要である．このとき

$$y_{\mathrm{G}}=\frac{\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2q}-\dfrac{1}{2r}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}-\frac{q+r}{2qr}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2}\right)=0$$

であり，$\mathrm{G}=\mathrm{O}$ となる．

以上より，求める a の値は

$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$ (答)

(2) (1) より

$$q+r=-t,\ qr=-\frac{t^2}{2}$$

であり，このとき，$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=\left(q,\ -\frac{1}{2q}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{GR}}=\left(r,\ -\frac{1}{2r}\right)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GR}}&=qr+\frac{1}{4qr}\\&=-\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

$t^2>0$ なので，相加相乗平均の関係より

$$t^2+\frac{1}{t^2}\geqq 2\quad\left(\text{等号成立は } t^2=\frac{1}{t^2} \text{ すなわち } t=1 \text{ のとき}\right)$$

が成り立ち，関数の連続性および $\lim\limits_{t\to\infty}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)=\infty$ より，$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ の取る値の範囲は

$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{GQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GR}}\leqq -1}$　　**(答)**

(3) $\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=\left(q,\ -\frac{1}{2q}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{GR}}=\left(r,\ -\frac{1}{2r}\right)$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{GR}}\right|^2=\left(q^2+\frac{1}{4q^2}\right)\left(r^2+\frac{1}{4r^2}\right)$$

ここで

$$\begin{aligned}\left(q^2+\frac{1}{4q^2}\right)\left(r^2+\frac{1}{4r^2}\right)&=q^2r^2+\frac{q^2}{4r^2}+\frac{r^2}{4q^2}+\frac{1}{16q^2r^2}\\&=q^2r^2+\frac{1}{16q^2r^2}+\frac{q^4+r^4}{4q^2r^2}\\&=q^2r^2+\frac{1}{16q^2r^2}+\frac{\left\{(q+r)^2-2qr\right\}^2-2q^2r^2}{4q^2r^2}\\&=\frac{t^4}{4}+\frac{1}{4t^4}+\frac{(t^2+t^2)^2-\frac{t^4}{2}}{t^4}\\&=\frac{1}{4}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)^2+3\end{aligned}$$

ゆえに

$$\cos\theta=\frac{-\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)^2+3}}$$

ここで，$T=t^2+\frac{1}{t^2}$ とおくと，$T\geqq 2$ であり

$$\cos\theta=\frac{-T}{\sqrt{T^2+12}}=-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{12}{T^2}}}$$

よって，T の関数 $\cos\theta$ は単調に減少する関数であるから

$$\cos\theta\leqq-\frac{1}{2}\quad\text{（等号は } T=2 \text{ すなわち } t=1 \text{ のとき成立）}$$

したがって，θ の最小値は

$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$　　**(答)**

【10】(1) $x(t)=e^{-3t}\cos 4t$，$y(t)=e^{-3t}\sin 4t$ より

$$r(t)=\sqrt{\{x(t)\}^2+\{y(t)\}^2}=e^{-3t}$$

よって，$x(t)=r(t)\cos\theta(t)$，$y(t)=r(t)\sin\theta(t)$ であるから

$$\theta(t)=4t$$

以上より，点 P の極座標は

$$\boldsymbol{(e^{-3t},\ 4t)}$$ (答)

(2) 直線 $y=(\tan\alpha)x$ は x 軸正方向となす角が α の直線であるから

$$4t_n=\alpha+(n-1)\pi$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{t_n=\frac{\alpha+(n-1)\pi}{4}}$$ (答)

(3) $x(t)=e^{-3t}\cos 4t$，$y(t)=e^{-3t}\sin 4t$ より

$$x'(t)=-3e^{-3t}\cos 4t-4e^{-3t}\sin 4t=e^{-3t}(-3\cos 4t-4\sin 4t)$$

$$y'(t)=-3e^{-3t}\sin 4t+4e^{-3t}\cos 4t=e^{-3t}(-3\sin 4t+4\cos 4t)$$

であるから

$$\begin{aligned}v(t)&=\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\\&=e^{-3t}\sqrt{(-3\cos 4t-4\sin 4t)^2+(-3\sin 4t+4\cos 4t)^2}\\&=e^{-3t}\sqrt{25\cos^2 4t+25\sin^2 4t}\\&=\boldsymbol{5e^{-3t}}\end{aligned}$$ (答)

(4) (3) より

$$\begin{aligned}L_n&=\int_{t_n}^{t_{n+1}}5e^{-3t}\,dt\\&=\left[-\frac{5}{3}e^{-3t}\right]_{t_n}^{t_{n+1}}\\&=-\frac{5}{3}\left(e^{-3t_{n+1}}-e^{-3t_n}\right)\\&=-\frac{5}{3}\left(e^{-\frac{3\alpha+3n\pi}{4}}-e^{-\frac{3\alpha+3(n-1)\pi}{4}}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{5}{3}e^{-\frac{3\alpha}{4}}\left(1-e^{-\frac{3\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3\pi}{4}}\right)^{n-1}}\end{aligned}$$ (答)

(5) $0<e^{-\frac{3\pi}{4}}<1$ より，無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}L_n$ は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}L_n=\frac{5}{3}e^{-\frac{3\alpha}{4}}\left(1-e^{-\frac{3\pi}{4}}\right)\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{3\pi}{4}}}=\boldsymbol{\frac{5}{3}e^{-\frac{3\alpha}{4}}}$$ (答)

Z-KAI

会員番号		氏　名	