M3MB

冬期講習

解答

Z会東大進学教室

難関大数学ⅠAⅡB

難関大文系数学M

問題

【1】題意の共通解を α とおくと

$$\begin{cases} \alpha^2 - 2a\alpha - b = 0 & \cdots ① \\ \alpha^3 - (2a^2 + b)\alpha - 4ab = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② − ①×α より

$$2a\alpha^2 - 2a^2\alpha - 4ab = 0 \iff 2a(\alpha^2 - a\alpha - 2b) = 0$$

ここで, $a = 0$ とすると, ①, ②はそれぞれ

$$\alpha^2 - b = 0, \quad \alpha(\alpha^2 - b) = 0$$

であり, $b > 0$ なので, ①をみたす $\alpha = \pm\sqrt{b}$ がともに②をみたすことになり, 不適である. ゆえに

$$\alpha^2 - a\alpha - 2b = 0 \quad \cdots ③$$

③ − ① より

$$a\alpha - b = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{b}{a} \ (\because \quad a \neq 0)$$

これを③に代入すると

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - a \cdot \frac{b}{a} - 2b = 0 \iff b(b - 3a^2) = 0$$

$b > 0$ なので

$$b = 3a^2$$

$b > 0$ だから, $a \neq 0$ はこの条件に含まれる. このとき, ①, ②はそれぞれ

$$\alpha^2 - 2a\alpha - 3a^2 = 0 \iff (\alpha + a)(\alpha - 3a) = 0$$
$$\alpha^3 - 5a^2\alpha - 12a^3 = 0 \iff (\alpha - 3a)(\alpha^2 + 3a\alpha + 4a^2) = 0$$

$a \neq 0$ だから

$$3a \neq -a$$
$$\alpha^2 + 3a\alpha + 4a^2 = \left(\alpha + \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{7}{4}a^2 > 0$$

よって, $\alpha = 3a$ だけが解となり, 条件をみたす. したがって, 求める条件は

$\boldsymbol{b = 3a^2}$　　(答)

そして, このときの共通解は, $\boldsymbol{x = 3a}$　　(答)

【2】(1) 合成して，

$$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)\quad(図1)$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq \sin(\theta+45^\circ)\leqq 1\quad(図2)$$

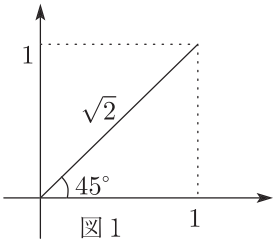


図1

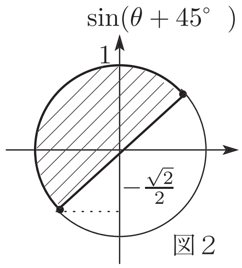


図2

$$\therefore\quad \boldsymbol{-1\leqq t\leqq \sqrt{2}}\qquad(答)$$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方して，

$$\begin{aligned}t^2&=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\\&=1+2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(t^2-1)\quad\cdots①$$

①より

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2\sin\theta\cos\theta-2a(\sin\theta+\cos\theta)+1\\&=t^2-1-2at+1\\&=\boldsymbol{t^2-2at}\qquad(答)\end{aligned}$$

(3) $f(\theta)=g(t)=t^2-2at=(t-a)^2-a^2$

とおくと，$y=g(t)$ のグラフは

軸：$t=a$

である下に凸の放物線であり，t のとりうる値の範囲が $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ であることと，-1 と $\sqrt{2}$ の中間は $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ であることから，$a>0$ であることも考えて，以下のように場合分けを行う．

(i) $\boldsymbol{0<a\leqq\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ のとき

$$\begin{cases}\textbf{最大値}:\ g(\sqrt{2})=\boldsymbol{2-2\sqrt{2}a}\\ \textbf{最小値}:\ g(a)=\boldsymbol{-a^2}\end{cases}\quad(答)$$

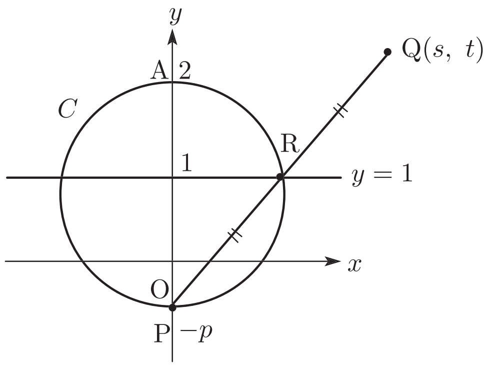
(ii) $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}<a\leqq\sqrt{2}}$ のとき

$$\begin{cases}\textbf{最大値}:\ g(-1)=\boldsymbol{1+2a}\\ \textbf{最小値}:\ g(a)=\boldsymbol{-a^2}\end{cases}\quad(答)$$

(iii) $\boldsymbol{a>\sqrt{2}}$ のとき

$$\begin{cases}\textbf{最大値}:\ g(-1)=\boldsymbol{1+2a}\\ \textbf{最小値}:\ g(\sqrt{2})=\boldsymbol{2-2\sqrt{2}a}\end{cases}\quad(答)$$

【3】(1) まず, 円 C の方程式を求める.



線分 AP の中点が C の中心で, その座標は,

$$\left(0,\ \frac{2-p}{2}\right)$$

C の半径は, A, P の y 座標に注目して,

$$\frac{2-(-p)}{2}=\frac{2+p}{2}$$

よって, C の方程式は,

$$x^2+\left(y-\frac{2-p}{2}\right)^2=\left(\frac{2+p}{2}\right)^2 \quad \cdots(*)$$

ところで, 線分 PQ の中点 R の座標は,

$$\mathrm{R}\left(\frac{s}{2},\ \frac{t-p}{2}\right)$$

であるが, 一方で R は直線 $y=1$ 上の点であるから,

$$\frac{t-p}{2}=1$$

$$\therefore \quad t=\boldsymbol{2+p} \qquad \text{(答)} \cdots ①$$

このとき,

$$\mathrm{R}\left(\frac{s}{2},\ 1\right)$$

で, R は円 C 上にあるから, これを $(*)$ に代入して,

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(1-\frac{2-p}{2}\right)^2=\left(\frac{2+p}{2}\right)^2$$

これを整理して,

$$s^2=4(1+p)$$

$s \geqq 0$ だから,

$$s=\boldsymbol{2\sqrt{1+p}} \qquad \text{(答)} \cdots ②$$

(2) ①より,

$$p=t-2$$

これを②に代入して,

$$s=2\sqrt{1+p}=2\sqrt{t-1}$$

$$\therefore \quad s^2=4(t-1)$$

$$\therefore \quad t=\frac{s^2}{4}+1$$

ここで, $p>0$ だから, ②より,

$s>2\sqrt{1+0}=2$

以上から, 点 Q の描く曲線は,

放物線 $\boldsymbol{y=\dfrac{x^2}{4}+1}$ の $\boldsymbol{x>2}$ の部分　　(答)

【4】(1) $y=|x|$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ の交点の x 座標は

$$x^2=|x|^2$$

に注意すると

$|x|=-\dfrac{1}{2}x^2+3$

$\iff \quad |x|^2+2|x|-6=0$

$\iff \quad |x|=-1+\sqrt{7} \quad (\because |x| \geqq 0)$

より, $x=-1+\sqrt{7},\ 1-\sqrt{7}$ である.

よって, **D は図 1 の斜線部で境界を含む.**

(答)

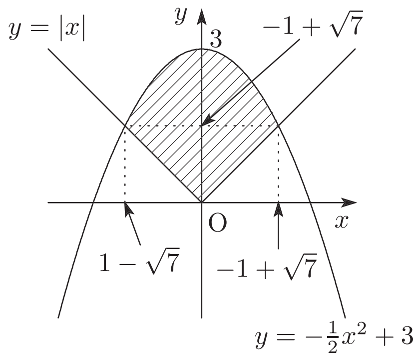


図 1

(2) $\quad \mathrm{B}\left(\alpha,\ -\dfrac{1}{2}\alpha^2+3\right) \quad$ (ただし, $1-\sqrt{7} \leqq \alpha \leqq -1+\sqrt{7}$)

とおくと, B における $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ の接線の方程式は, $y'=-x$ より

$y-\left(-\dfrac{1}{2}\alpha^2+3\right)=-\alpha(x-\alpha)$

A を通るので

$0-\left(-\dfrac{1}{2}\alpha^2+3\right)=-\alpha\left(-\dfrac{7}{2}-\alpha\right) \quad \iff \quad \alpha^2+7\alpha+6=0$

$1-\sqrt{7} \leqq \alpha \leqq -1+\sqrt{7}$ より

$$\alpha=-1 \qquad \therefore \quad \mathrm{B}\ \left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$$

このとき, 接線の傾きは, $-(-1)=1$ であるから

$$\mathrm{AB} \mathbin{/\!/} (\text{直線 } y=x)$$

よって, $\triangle$ ABP の面積は, P が $y=x$ $(0 \leqq x \leqq -1+\sqrt{7})$ 上にあるとき最大となるから, $\mathrm{P}=\mathrm{O}$ のときを考えて, 求める最大値は

$$\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}=\boldsymbol{\frac{35}{8}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}=\dfrac{y-0}{x-\left(-\dfrac{7}{2}\right)}$ であるから, $\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ は, 点 A と D 内の点 $(x,\ y)$ を結ぶ直線の傾きを表す. よって, (2) の考察より

$$\boldsymbol{0 \leqq \frac{y}{x+\frac{7}{2}} \leqq 1} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】自然数を 6 で割った余りで分類すると

$$6k-5,\quad 6k-4,\quad 6k-3,\quad 6k-2,\quad 6k-1,\quad 6k$$

(ただし $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

2 でも 3 でも割り切れない数は $6k-5$, $6k-1$ に限り，

$$6k-5<6k-1$$

なので，

$$a_{2k-1}=6k-5 \quad \cdots①,\quad a_{2k}=6k-1 \quad \cdots②$$

と表すことができる．

(1)
$$\begin{aligned}1003&=6\cdot167+1 = 6\cdot167+6-5\\&=6\cdot168-5\end{aligned}$$

①より

$$a_{2\cdot168-1}=6\cdot168-5$$

よって

$$a_{335}=1003 \qquad \therefore\ \textbf{第 335 項} \qquad (答)$$

(2) ②より

$$a_{2000}=a_{2\cdot1000}=6\cdot1000-1=\mathbf{5999} \qquad (答)$$

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2m}a_n&=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k}) =\sum_{k=1}^{m}\{(6k-5)+(6k-1)\}\\&=\sum_{k=1}^{m}(12k-6)=6\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\\&=6\cdot2\cdot\frac{m(m+1)}{2}-6m=\boldsymbol{6m^2} \qquad (答)\end{aligned}$$

【2】(1) 自然数 a, b がともに 2 以上であるとすると

$$\frac{1}{a}\leqq\frac{1}{2},\ \frac{1}{b}\leqq\frac{1}{2}$$

すなわち

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqq1$$

となり，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>1$ をみたさない．

したがって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>1$ をみたす自然数 a, b の少なくとも一方は 1 である．

（証終）

(2) $a=1$ のとき $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<1$ は成立しないので，$a\geqq2$ として考える．

(i) $a=2$ のとき

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}<1 \qquad \therefore\ b>2 \text{ すなわち } b\geqq3$$

であるから

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

(ii) $a \geqq 3$ のとき，$b \geqq 4$ であり

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\left(<\frac{5}{6}\right)$$

以上より，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ は $a=2,\ b=3$ のとき最大で，最大値は

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{6}$$

である．（証終）

(3) $a=1$ のとき

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$$

となり，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$ をみたさないので，$a \geqq 2$ として考える．

(i) $a=2$ のとき

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1 \qquad \therefore \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{2}$$

また，$b \geqq 3$ であるから

（ア）$b=3$ のとき

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{c}<\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad c>6 \text{ すなわち } c \geqq 7$$

であるから

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$$

（イ）$b \geqq 4$ のとき，$c \geqq 5$ であり

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{38}{40}\left(<\frac{41}{42}\right)$$

(ii) $a \geqq 3$ のとき，$b \geqq 4,\ c \geqq 5$ であり

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}\left(<\frac{41}{42}\right)$$

以上より，$\dfrac{41}{42}>\dfrac{38}{40}>\dfrac{47}{60}$ であるから，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ は $a=2,\ b=3,\ c=7$ のとき最大で，最大値は

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{41}{42}$$

である．（証終）

【3】 $\begin{cases} 3\text{ の倍数の目}\quad 3,\ 6 & \rightarrow\quad 4\text{ 点} \\ \text{その他の目}\quad 1,\ 2,\ 4,\ 5 & \rightarrow\quad 1\text{ 点} \end{cases}$

8 回のうち, 3 の倍数の目が x 回, 得点を T とすると, $x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ で正の整数 k を用いて, T は,

$$T = 4x + (8 - x) = 4k \iff 3x = 4(k-2) \quad \cdots ①$$

①から, x は 4 の倍数だから, $x = 0,\ 4,\ 8$ の場合に限られる.

各場合は排反だから, 求める確率は,

$$ {}_8\mathrm{C}_0 \left(\frac{2}{3}\right)^8 + {}_8\mathrm{C}_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_8\mathrm{C}_8 \left(\frac{1}{3}\right)^8 $$

$$= \frac{1}{3^8}(2^8 + 70 \cdot 2^4 + 1) = \boldsymbol{\frac{17}{81}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) a_nは 3 で割り切れるが, b_nは 3 で割り切れない $\cdots (*)$

$(*)$ が $n \geqq 3$ で成り立つことを数学的帰納法で示す.

i) $n = 3$ のとき, 条件から

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = 2 \\ b_2 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_3 = 12 \\ b_3 = 17 \end{cases}$$

であり, このとき $(*)$ は成立する.

ii) $n = k(k \geqq 3)$ のとき $(*)$ の成立を仮定すると, 整数 $m,\ l$ を用いて

$$a_k = 3m,\ b_k = 3l \pm 1$$

とかける.

ここで

$$\begin{cases} a_{k+1} = 2a_k b_k & \cdots ① \\ b_{k+1} = 2{a_k}^2 + {b_k}^2 & \cdots ② \end{cases}$$

であり, ①より

$$a_{k+1} = 3 \cdot 2m(3l \pm 1)$$

よって, a_{k+1} は 3 で割り切れる.

また, ②より

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 2 \cdot 9m^2 + (3l \pm 1)^2 \\ &= 18m^2 + 9l^2 \pm 6l + 1 \\ &= 3(6m^2 + 3l^2 \pm 2l) + 1 \end{aligned}$$

よって, b_{k+1} は 3 で割り切れない.

以上から, $n = k + 1$ のとき $(*)$ は成立する.

i), ii) より, $n \geqq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 で割り切れない. (証終)

(2) (1) より

$$b_n (n \geqq 3) \text{ は 3 で割り切れない}$$

また, (1) と同様の議論により

$$b_n (n \geqq 1) \text{ は 2 で割り切れない} \quad \cdots (*)'$$

さて, ここで 2 以上の自然数 m について a_m と b_m が公約数をもつと仮定する.

このとき，$a_m{}'$，$b_m{}'$ を自然数として

$$\begin{cases} a_m = pa_m{}' \\ b_m = pb_m{}' \end{cases}$$

なる奇素数 p が存在する．($(*)'$ より公約数は奇数)

このとき

$$\begin{cases} pa_m{}' = 2a_{m-1}b_{m-1} & \cdots ③ \\ pb_m{}' = 2{a_{m-1}}^2 + {b_{m-1}}^2 & \cdots ④ \end{cases}$$

であり，③より a_{m-1} または b_{m-1} が p で割り切れる．

いま，a_{m-1} が p で割り切れるとするとき，整数 l を用いて $a_{m-1} = lp$ とおけて，④より

$${b_{m-1}}^2 = pb_m{}' - 2l^2p^2 = p(b_m{}' - 2l^2p)$$

となり，b_{m-1} も p で割り切れる．

同様に，b_{m-1} が p で割り切れるとき，整数 k を用いて $b_{m-1} = kp$ とおけて，④より

$$2{a_{m-1}}^2 = pb_m{}' - k^2p^2 = p(b_m{}' - k^2p)$$

p は奇素数であるので，a_{m-1} は p で割り切れる．以上より，

a_mと b_mが互いに素でないとき，a_{m-1}と b_{m-1}も互いに素でない

が成り立つ．これを繰り返し用いることにより

a_mと b_mが互いに素でないとき，a_2と b_2も互いに素でない

が成り立つが，これは $a_2 = 2$，$b_2 = 3$ であることに反する．

よって，a_m と b_m は互いに素である．

すなわち，$n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素である．　(証終)

問題

【1】　$C_1 : y = f(x) = x^3 - a^2 x,\ C_2 : y = g(x) = k(x^2 - a^2)$

だから

$f'(x) = 3x^2 - a^2,\ g'(x) = 2kx$

(1) C_1 と C_2 が $(a,\ 0)$ において共通の接線を持つので,

$$f(a) = g(a) = 0 \quad \cdots ①\text{かつ } f'(a) = g'(a) \quad \cdots ②$$

①は常にみたされるので,

$$② \iff 2a^2 = 2ka \iff k = a \quad (\because a > 0) \quad \cdots ③$$

$(-a,\ 0)$ で 2 接線が直交するので,

$$f'(-a)g'(-a) = -1 \iff 2a^2 \cdot (-2ka) = -1$$

$$\iff 4ka^3 = 1 \quad \cdots ④$$

③, ④と $a > 0$ より,

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{\sqrt{2}},\ k = \frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \text{(答)} \quad \cdots ⑤$$

(2) ⑤ より,

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x,\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

ここで, $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - g'(x) \\ &= 3x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \\ &= 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \end{aligned}$$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ での $h(x)$ の増減表は, 次のようになる.

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	最大	↘	0

よって,

$$\boldsymbol{x = -\frac{\sqrt{2}}{6}} \text{ のとき, } \textbf{最大値} \boldsymbol{\frac{8}{27}\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

【2】 $\alpha \leqq \beta,\ \alpha \neq 0,\ \beta > 0$ $\cdots$①

$f(x) = \dfrac{3}{\alpha\beta}(x-\alpha)(x-\beta)$ $\cdots$②

$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ $\cdots$③

とおく.

(1) α の正負で場合分けする.

(i) $\alpha < 0$ のとき (図 1 参照);

$\dfrac{3}{\alpha\beta} < 0$ より, $0 \leqq x \leqq \beta$ において

$$|f(x)| = f(x)$$

$$\therefore \int_0^\beta |f(x)|dx = \int_0^\beta f(x)dx = F(\beta)$$

(ii) $\alpha > 0$ のとき (図 2 参照);

$\dfrac{3}{\alpha\beta} > 0$ より, $0 \leqq x \leqq \beta$ において

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (0 \leqq x \leqq \alpha) \\ -f(x) & (\alpha \leqq x \leqq \beta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \int_0^\beta |f(x)|dx &= \int_0^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta \{-f(x)\}dx \\ &= F(\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)dx \\ &= F(\alpha) - \left\{\int_0^\beta f(x)dx - \int_0^\alpha f(x)dx\right\} \\ &= 2F(\alpha) - F(\beta) \end{aligned}$$

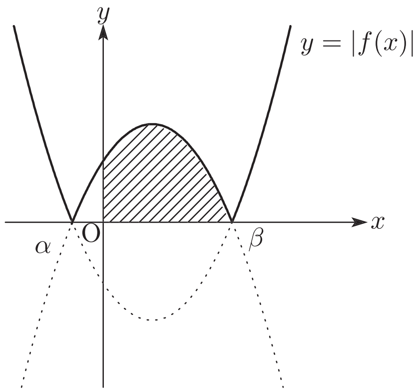


図 1

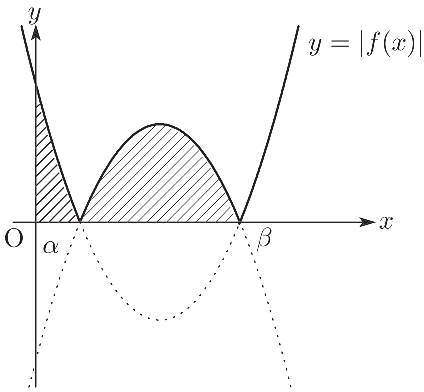


図 2

(i), (ii) より

$$\int_0^\beta |f(x)|dx = \begin{cases} \boldsymbol{F(\beta)} & \textbf{(}\boldsymbol{\alpha < 0}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{2F(\alpha) - F(\beta)} & \textbf{(}\boldsymbol{\alpha > 0}\ \textbf{のとき)} \end{cases}$$ (答)

(2) $\alpha = \beta^2 \quad \cdots ④$

とおく. ①, ④ より,

$$\beta^2 \leqq \beta \iff 0 < \beta \leqq 1 \quad \cdots ⑤$$

また, ①, ④ より, $\alpha > 0$ なので, (1) の結果と④より,

$$\int_0^{\beta} |f(x)|dx = 2F(\alpha) - F(\beta) = 2F(\beta^2) - F(\beta) \quad \cdots ⑥$$

ここで,

$$\begin{aligned} F(\beta) &= \frac{3}{\alpha\beta}\int_0^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= \frac{3}{\beta^3}\int_0^{\beta}(x-\beta^2)(x-\beta)dx \\ &= \frac{3}{\beta^3}\int_0^{\beta}\{x^2-(\beta^2+\beta)x+\beta^3\}dx \\ &= \frac{3}{\beta^3}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\beta^2+\beta)x^2+\beta^3x\right]_0^{\beta} \\ &= \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2} \quad \cdots ⑦ \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} F(\beta^2) &= \frac{3}{\beta^3}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\beta^2+\beta)x^2+\beta^3x\right]_0^{\beta^2} \\ &= -\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 \quad \cdots ⑧ \end{aligned}$$

⑥, ⑦, ⑧より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta}|f(x)|dx &= 2\left(-\frac{1}{2}\beta^3+\frac{3}{2}\beta^2\right) - \left(\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\beta^3+3\beta^2-\frac{3}{2}\beta+\frac{1}{2} \\ &= g(\beta) \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} g'(\beta) &= -3\beta^2+6\beta-\frac{3}{2} \\ &= -3\left(\beta-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\beta-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

ここで, $0 < \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} < 1 < \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ より, 次の増減表を得る.

β	0	$\cdots$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$g'(\beta)$		$-$	0	$+$	
$g(\beta)$		↘	最小	↗	

これより, 求める β の値は,

$$\boldsymbol{\beta = \frac{2-\sqrt{2}}{2}} \qquad (答)$$

【3】(1)

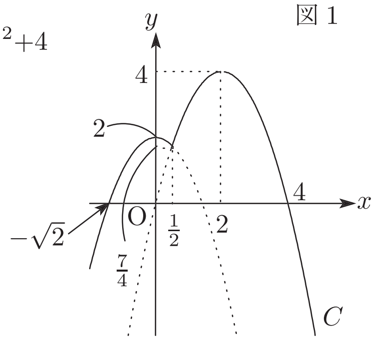
$2x-1 \geqq 0 \iff x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$y=(2x-1)-x^2+2x+1=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$

$2x-1 \leqq 0 \iff x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$y=-(2x-1)-x^2+2x+1=-x^2+2$

なので, **C の概形は図 1 のようになる.** (答)



(2) $y=-x^2+4x$ 上の点 $(t,\ -t^2+4t)$ における接線の方程式は, $y'=-2x+4$ より

$$y-(-t^2+4t)=(-2t+4)(x-t)$$

$$\iff \quad y=(4-2t)x+t^2 \quad \cdots ①$$

これが, $y=-x^2+2$ に接するとき, x の 2 次方程式

$$-x^2+2=(4-2t)x+t^2$$

$$\iff \quad x^2+2(2-t)x+(t^2-2)=0 \quad \cdots ②$$

は重解をもつので

$$(2-t)^2-(t^2-2)=6-4t=0 \qquad \therefore \quad t=\frac{3}{2}\left(\geqq \frac{1}{2}\right)$$

また, このとき②は

$$x^2+x+\frac{1}{4}=0 \qquad \therefore \quad x=-\frac{1}{2}\left(\leqq \frac{1}{2}\right)$$

となるから, このときの①は確かに C と相異なる 2 点で接している.

したがって, $a,\ b$ の値は, ①に $t=\dfrac{3}{2}$ を代入して

$$a=4-2\times\frac{3}{2}=\mathbf{1}, \quad b=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{9}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) の考察より

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(x+\frac{9}{4}\right)-(-x^2+2)\right\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{\left(x+\frac{9}{4}\right)-(-x^2+4x)\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^3=\mathbf{\frac{2}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 点 P, Q の x 座標を $p, q\ (p<q)$ とすると, $y'=2x$ より, 点 P, Q における接線の式は,

$$y=2p(x-p)+p^2=2px-p^2 \quad \cdots①$$
$$y=2q(x-q)+q^2=2qx-q^2 \quad \cdots②$$

①, ②より, y を消去すると,

$$2(p-q)x=p^2-q^2$$
$$\therefore \quad x=\frac{p+q}{2} \qquad (\because p\neq q)$$

①, ②の交点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ pq\right)$ だから, 条件より,

$$\begin{cases} \dfrac{p+q}{2}=a \\ pq=a-1 \end{cases} \quad \cdots③$$

p, q は, t の 2 次方程式 $t^2-2at+a-1=0 \quad \cdots④$ の 2 解であり,

④の判別式を D とすると, $\dfrac{D}{4}=a^2-(a-1)=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ なので, 任意の実数 a に対して異なる実数 p, q が存在する.

直線 PQ の式は,

$$y=\frac{q^2-p^2}{q-p}(x-p)+p^2=(p+q)x-pq$$

図 1 より,

$$S_1=\int_p^q\left\{(p+q)x-pq-x^2\right\}dx$$
$$=-\int_p^q(x-p)(x-q)dx$$
$$=\frac{1}{6}(q-p)^3$$

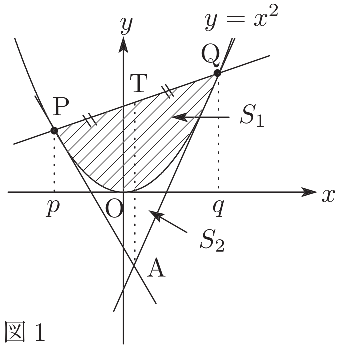


図 1

③より,

$$(q-p)^2=(q+p)^2-4pq$$
$$=4(a^2-a+1)$$

$$\therefore \quad S_1=\frac{1}{6}\{4(a^2-a+1)\}^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{4}{3}(a^2-a+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 直線 $x=\dfrac{p+q}{2}$ と直線 PQ との交点 T とすると,

$$\mathrm{T}\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}\right)$$

$$\triangle \mathrm{APQ}\ の面積 = S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\times \mathrm{AT}\times(q-p)$$
$$=\frac{1}{4}(q-p)^3 \qquad \left(\because \mathrm{AT}=\left|\frac{1}{2}(p^2+q^2)-pq\right|=\frac{1}{2}(q-p)^2\right)$$

$S_1=\dfrac{1}{6}(q-p)^3$ より, $S_2=\dfrac{1}{12}(q-p)^3$

$$\therefore \quad \frac{S_2}{S_1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (1) の考察より，a は任意の実数をとることができ，

$$a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqq \frac{3}{4}$$

$$S_1 \geqq \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ S_1の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ $\left(a = \dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)$ (答)

問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$ だから，k を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{k}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

と表すことができる．そして，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{k}{2}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{s}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{t}\right)$$

であるが，ここで R は直線 PQ 上にあるから，

$$\frac{k}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)=1 \qquad \therefore\quad \frac{k}{2}\cdot 3=1 \qquad \therefore\quad k=\frac{2}{3}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\triangle\,\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}$$

$$\begin{aligned}\triangle\,\mathrm{OPQ}&=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}\\&=\frac{1}{2}s\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\angle\mathrm{AOB}\end{aligned}$$

$\triangle\,\mathrm{OAB}=2\triangle\,\mathrm{OPQ}$ に代入すると，

$$1=2st \qquad \therefore\quad st=\frac{1}{2}$$

また，$\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t}=3$ より，

$$\frac{t+s}{st}=3 \qquad \therefore\quad s+t=\frac{3}{2}$$

よって，s，t を 2 解とする 2 次方程式は，

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$$

だから，これより

$$(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \therefore\quad x=1,\ \frac{1}{2}$$

よって

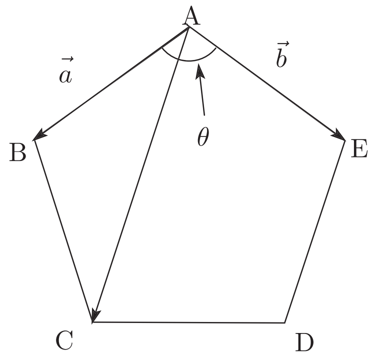
$$(s,\ t)=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(1,\ \frac{1}{2}\right)} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 正五角形の内角の和は

$180^\circ \times (5-2) = 540^\circ$

よって，求める θ は

$\theta = \dfrac{540^\circ}{5} = \mathbf{108^\circ}$　　(答)



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}}$

であり，正五角形の対称性より，

AB の中点と D を結ぶ直線に関して，

AB，EC はともに対称だから，

$\mathrm{AB} \,/\!/\, \mathrm{EC}$

よって x を実数として，

$\overrightarrow{\mathrm{EC}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

と表せる．

ここで，△ CDE について余弦定理より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right|\cos\angle\mathrm{CDE} = \left|\overrightarrow{\mathrm{EC}}\right|^2$$

$$\Longleftrightarrow \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|^2\cos\theta = x^2\left|\vec{a}\right|^2$$

$\left|\vec{a}\right| \fallingdotseq 0$ だから，

$2(1-\cos\theta) = x^2$

$x > 0$ より，

$x = \sqrt{2(1-k)}$

よって，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = x\vec{a} + \vec{b}$

$= \boldsymbol{\sqrt{2(1-k)}\,\vec{a} + \vec{b}}$　　(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left|\vec{a}\right|^2 \cos(180^\circ - \theta)$

$= -\left|\vec{a}\right|^2 k$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ だから，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})$

$= \vec{a} \cdot \{(\sqrt{2(1-k)} - 1)\vec{a} + \vec{b}\}$

$= (\sqrt{2(1-k)} - 1)\left|\vec{a}\right|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}$

$= (\sqrt{2(1-k)} - 1)\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|^2 k$

よって，

$$-\left|\vec{a}\right|^2 k = (\sqrt{2(1-k)} - 1)\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|^2 k$$

$\therefore\ \ -k = (\sqrt{2(1-k)} - 1) + k$

これより，

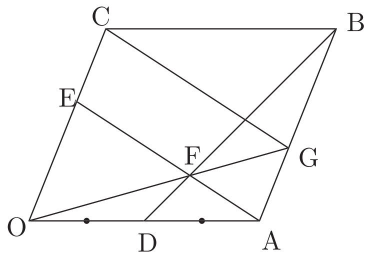
$4k^2 - 4k + 1 = 2(1-k)$　　$\therefore\ \ 4k^2 - 2k - 1 = 0$　　$\therefore\ \ k = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$\cos 108^\circ < 0$ だから

$k = \boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}}$　　(答)

【3】(1) F は AE 上の点であるから，s を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$= s\overrightarrow{a} + \alpha(1-s)\overrightarrow{b} \quad \cdots ①$$



とかける．一方，F は BD 上の点でもあるから，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = t\overrightarrow{\mathrm{OD}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= \frac{t}{2}\overrightarrow{a} + (1-t)(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$
$$= \left(1 - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b} \quad \cdots ②$$

とかける．そして，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は 1 次独立なので，①，②より

$$s = 1 - \frac{t}{2}, \quad \alpha(1-s) = 1-t$$

2 式より s を消去すると

$$\alpha\left\{1 - \left(1 - \frac{t}{2}\right)\right\} = 1 - t \qquad \therefore \quad \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)t = 1$$

よって, $t = \dfrac{2}{\alpha+2}$ となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \boldsymbol{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\overrightarrow{a} + \frac{\alpha}{\alpha+2}\overrightarrow{b}} \qquad \text{(答)}$$

(2) G は OF 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{k(\alpha+1)}{\alpha+2}\overrightarrow{a} + \frac{k\alpha}{\alpha+2}\overrightarrow{b} \quad \cdots ③$$

と書ける．一方，G は AB 上の点でもあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{a} + u\overrightarrow{b} \quad \cdots ④$$

そして，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は 1 次独立であるから，③，④より

$$\frac{k(\alpha+1)}{\alpha+2} = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

よって

$$u = \frac{\alpha}{\alpha+1} \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{b}$$

次に

$$\overrightarrow{\mathrm{EC}} = (1-\alpha)\overrightarrow{b}$$

すると, AG // EC であるから, AE // CG であることと，四角形 AGCE は平行四辺形となることは同値であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{EC}} \qquad \therefore \quad \frac{\alpha}{\alpha+1} = 1 - \alpha$$

これより

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となるが, $0 < \alpha < 1$ なので

$$\alpha = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【4】 $\overrightarrow{a}=(\sin\theta,\ 0,\ 0)$
$\overrightarrow{b}=(0,\ \cos\theta,\ 0)$
$\overrightarrow{c}=(0,\ 0,\ 1)$

とする．$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，

$\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$

(1) 点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ は平面 α 上にあるので，

$$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{c}+x\overrightarrow{\mathrm{CA}}+y\overrightarrow{\mathrm{CB}}\quad (x,\ y \text{ は実数})$$

とおけて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}&=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+(1-x-y)\overrightarrow{c}\quad\cdots(*)\\&=(x\sin\theta,\ y\cos\theta,\ 1-x-y)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{p}\perp$ 平面 $\alpha \iff \overrightarrow{p}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\overrightarrow{p}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(\sin\theta,\ 0,\ -1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ \cos\theta,\ -1)$$

より，

$$\begin{cases}\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=x\sin^2\theta-1+x+y=0 & \cdots①\\ \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=y\cos^2\theta-1+x+y=0 & \cdots②\end{cases}$$

① − ② より，

$$x\sin^2\theta=y\cos^2\theta \iff y=x\tan^2\theta\quad\cdots③$$

③を①に代入して，

$$x\sin^2\theta-1+x+x\tan^2\theta=0$$
$$\iff x=\frac{1}{1+\sin^2\theta+\tan^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta\sin^2\theta}\quad\cdots④$$

④を③に代入して，

$$y=\frac{\tan^2\theta}{1+\sin^2\theta+\tan^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta\sin^2\theta}\quad\cdots⑤$$

$(*)$, ④, ⑤ から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}(\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{a}+\sin^2\theta\cdot\overrightarrow{b}+\sin^2\theta\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{c})}\end{aligned}\quad(\text{答})$$

(2) (1) と，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$, $|\overrightarrow{a}|=\sin\theta$, $|\overrightarrow{b}|=\cos\theta$, $|\overrightarrow{c}|=1$ より，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=\frac{1}{(1+\sin^2\theta\cos^2\theta)^2}(\cos^4\theta\cdot\sin^2\theta+\sin^4\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta\cos^4\theta)\\&=\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(1+\sin^2\theta\cos^2\theta)^2}\cdot(1+\sin^2\theta\cos^2\theta)\\&=\boldsymbol{\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}}\quad(\text{答})\end{aligned}$$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最大 $\iff$ $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ が最大だから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}=1-\frac{1}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

よって，

$\sin^2\theta\cos^2\theta$ が最大のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ が最大である．

$\sin^2\theta\cos^2\theta = \dfrac{1}{4}\sin^2 2\theta,\ 0° < \theta < 90°$ より,

$$\begin{aligned} \sin 2\theta = 1 \quad &\iff \quad 2\theta = 90° \\ &\iff \quad \theta = 45° \text{ のとき, } \sin^2\theta\cos^2\theta \text{ は最大値 } \frac{1}{4} \text{ をとる.} \end{aligned}$$

最大値は $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 1 - \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{5}$ より,

$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$ **($\boldsymbol{\theta = 45°}$のとき)** 　(答)

問題

【1】$a,\ b,\ c$ は, 正の実数であるから, 相加・相乗平均の関係より

$$\frac{ab+1}{2} \geqq \sqrt{ab\cdot 1},\quad \frac{bc+1}{2} \geqq \sqrt{bc\cdot 1},\quad \frac{ca+1}{2} \geqq \sqrt{ca\cdot 1}\quad \cdots(*)$$

$$\therefore\quad ab+1 \geqq 2\sqrt{ab},\quad bc+1 \geqq 2\sqrt{bc},\quad ca+1 \geqq 2\sqrt{ca}$$

そして, 辺々の値はすべて正なので, 辺々の積をとると

$$(ab+1)(bc+1)(ca+1) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}$$

$$\therefore\quad (ab+1)(bc+1)(ca+1) \geqq 8abc$$

$$\therefore\quad \frac{abc}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)} \leqq \frac{1}{8}$$

また, $(*)$ の等号は

$ab=1$ かつ $bc=1$ かつ $ca=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=b=c=1$

のときに成り立つ. (証終)

＜研究＞

等号成立条件

$ab=1$ かつ $bc=1$ かつ $ca=1 \quad \Longleftrightarrow \quad a=b=c=1$

はすぐにわかると思うが, 丁寧に求めると以下のようになる.

$$\begin{cases} ab=1 & \cdots ① \\ bc=1 & \cdots ② \\ ca=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①, ②の辺々をかけると

$ab^2c=1$

で, ③と合わせて

$b^2=1 \qquad \therefore\quad b=1 \quad (\because b>0)$

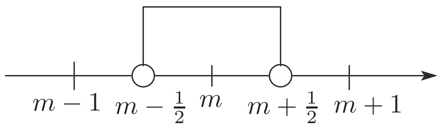
これと①, ②から

$a=1,\ c=1$

を得る.

【2】(1) 正の整数 m に対して,

$$\left(m \pm \frac{1}{2}\right)^2 = m^2 \pm m + \frac{1}{4} \fallingdotseq (\text{整数})$$



である.

ゆえに, $a_k = m$ となるための条件は

$$m - \frac{1}{2} < \sqrt{k} < m + \frac{1}{2}$$

辺々 2 乗して

$$m^2 - m + \frac{1}{4} < k < m^2 + m + \frac{1}{4}$$

この範囲にある正の整数 k は

$$k = m^2 - m + 1,\ m^2 - m + 2,\ \cdots,\ m^2 + m$$

の

$$(m^2 + m) - (m^2 - m + 1) + 1 = 2m\ (\text{個})$$

ある. これより

$m = 1$ のとき, $k = 1,\ 2$
$m = 2$ のとき, $k = 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$m = 3$ のとき, $k = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$

すなわち

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 2$$
$$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 3$$

となるから

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 = \mathbf{28} \qquad (\text{答})$$

(2) a_{2000} の値を求める. $a_{2000} = N$ とすると

$$2 + 4 + \cdots + 2(N-1) < 2000 \leqq 2 + 4 + \cdots + 2N$$
$$\iff (N-1)N < 2000 \leqq N(N+1)$$

であるが

$$44 \times 45 = 1980,\ 45 \times 46 = 2070$$

なので

$$N = 45$$

したがって, a_{2000} までの各項の分布は以下のようになる.

$$\underbrace{1\ 1}_{2\ \text{個}} \,|\, \underbrace{2\ 2\ 2\ 2}_{4\ \text{個}} \,|\, \cdots \,|\, \underbrace{44\ 44\ \cdots\ 44}_{88\ \text{個}} \,|\, \underbrace{45\ 45\ \cdots\ 45}_{2000-1980=20\ \text{個}}$$

これより

$$\sum_{k=1}^{2000} a_k = \sum_{m=1}^{44} m \cdot 2m + 45 \cdot 20$$
$$= \frac{1}{3} \times 44 \times 45 \times 89 + 45 \times 20 = \mathbf{59640} \qquad (\text{答})$$

【3】 $y = ax^2 + bx + c \quad \cdots ①$

①が 2 点 A(1, 2), B(−2, 5) を通るから,

$2 = a + b + c$

$5 = 4a - 2b + c$

この 2 式から, b, c を a で表して,

$b = a - 1,\ c = -2a + 3$

よって, ①は,

$y = ax^2 + (a-1)x - 2a + 3$

これを変形して,

$a(x^2 + x - 2) = x + y - 3 \quad \cdots ②$

いま, ①は放物線を表しているから,

$a \fallingdotseq 0$

で, この実数に対して, ②が成り立たないための条件は, 次の (i) または (ii) である.

(i) $x^2 + x - 2 = 0$ かつ $x + y - 3 \fallingdotseq 0$

(ii) $x^2 + x - 2 \fallingdotseq 0$ かつ $x + y - 3 = 0$

(i) のとき

$x^2 + x - 2 = 0 \iff (x+2)(x-1) = 0$

$\therefore \quad x = -2,\ 1$

これと $y \fallingdotseq -x + 3$ から,

$x = -2$ のとき, $y \fallingdotseq 5$

$x = 1$ のとき, $y \fallingdotseq 2$

つまり, まとめると,

直線 $x = -2$ [ただし, 点 (−2, 5) を除く]

直線 $x = 1$ [ただし, 点 (1, 2) を除く]

(ii) のとき

直線 $y = -x + 3$ [ただし, 点 (−2, 5), (1, 2) を除く]

以上から, 求める図形は,

$$\begin{cases} \textbf{3 直線 } \boldsymbol{x = -2,\ x = 1,\ y = -x + 3} \\ \textbf{ただし, 点 (−2, 5), (1, 2) は除く} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

<参考>

本問は, ”図示せよ”という問題ではないので作図の必要は特にないが, 結果を図示すれば, 図 1 の太線部分のようになる.

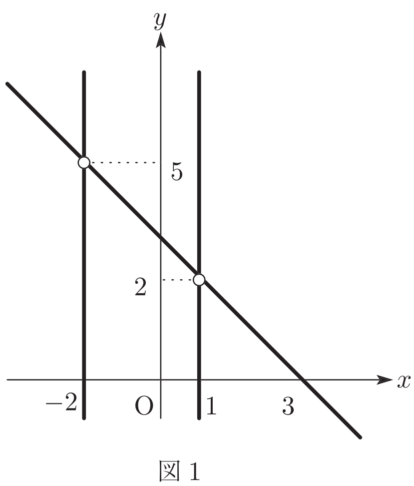


図 1

【4】(1) 先に 1 個ずつ各箱に入れると残った球は $h-k$ 個であり, これらは各箱に自由に入れることができる．この入れ方は k 種類のものから重複を許して $h-k$ 個取り出す重複組合せの数に一致するので, 求める入れ方の数は

$${}_k\mathrm{H}_{h-k} = {}_{h-1}\mathrm{C}_{h-k} = \boldsymbol{\frac{(h-1)!}{(k-1)!(h-k)!}}\textbf{(通り)} \qquad \text{(答)}$$

(2) b の連の個数は 5 以下であり, また, a の連の個数と b の連の個数の差は 1 以下である．したがって, b の連の個数は以下のようになる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{p=1}\text{のとき，}\mathbf{1,\ 2} \\ \boldsymbol{p=2}\text{のとき，}\mathbf{1,\ 2,\ 3} \\ \boldsymbol{p=3}\text{のとき，}\mathbf{2,\ 3,\ 4} \\ \boldsymbol{p=4}\text{のとき，}\mathbf{3,\ 4,\ 5} \\ \boldsymbol{p=5}\text{のとき，}\mathbf{4,\ 5} \\ \boldsymbol{p=6}\text{のとき，}\mathbf{5} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(3) まず, 順列は全体で

$$\frac{12!}{7!5!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 792(\text{通り})$$

ある．このとき, 連の個数の和が 4 になるのは (2) の結果より a の連, b の連がともに 2 個となる場合である．そして, a の 1 つの連, b の 1 つの連をそれぞれ文字 A, B で置き換えると, これらは

ABAB,　BABA

の各場合となる．ここで, ABAB となる並べ方は, まず A については 7 個の同じ球を空箱が生じないように 2 つの箱に入れる方法の数なので, (1) より

$${}_{7-1}\mathrm{C}_{7-2} = {}_6\mathrm{C}_5 = 6(\text{通り})$$

B についても同様に

$${}_{5-1}\mathrm{C}_{5-2} = {}_4\mathrm{C}_3 = 4(\text{通り})$$

あるので, ABAB となる並べ方は

$$6\cdot 4 = 24(\text{通り})$$

BABA となる場合も同じなので, 連の個数の和が 4 となる確率は

$$\frac{24\cdot 2}{792} = \boldsymbol{\frac{2}{33}} \qquad \text{(答)}$$

同様に, 連の個数の和が 7 になるのは

(a の連の個数, b の連の個数) = (4, 3), (3, 4)

すなわち

ABABABA,　BABABAB

の各場合である．よって, まず ABABABA となる並べ方の数は

$${}_{7-1}\mathrm{C}_{7-4}\cdot {}_{5-1}\mathrm{C}_{5-3} = {}_6\mathrm{C}_3\cdot {}_4\mathrm{C}_2 = 20\cdot 6 = 120(\text{通り})$$

また, BABABAB となる並べ方の数は

$${}_{7-1}\mathrm{C}_{7-3}\cdot {}_{5-1}\mathrm{C}_{5-4} = {}_6\mathrm{C}_4\cdot {}_4\mathrm{C}_1 = 15\cdot 4 = 60(\text{通り})$$

よって, 連の個数の和が 7 となる確率は

$$\frac{120+60}{792} = \boldsymbol{\frac{5}{22}} \qquad \text{(答)}$$

また, 連の個数の和が 11 になるのは

$(a$ の連の個数, b の連の個数$) = (6,\ 5)$

すなわち, ABABABABABA となる場合となる. よって, この並べ方の数は

$${}_{7-1}\mathrm{C}_{7-6} \cdot {}_{5-1}\mathrm{C}_{5-5} = {}_{6}\mathrm{C}_{1} \cdot {}_{4}\mathrm{C}_{0} = 6 \cdot 1 = 6(\text{通り})$$

なので, 連の個数の和が 11 となる確率は

$$\frac{6}{792} = \boldsymbol{\frac{1}{132}} \qquad (\text{答})$$

M3MB

難関大数学Ｉ Ａ Ⅱ Ｂ

難関大文系数学M

Z-KAI

会員番号		氏　名	