冬期講習

解答

Z会東大進学教室

高２東大物理発展

～力学・熱力学・電場と電位～

1章　力と運動

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 長い糸の張力の大きさを T_1，短い糸の張力の大きさを T_2，加速度の大きさを a とすると，それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} ma = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta + T_1 - T_2 & \cdots ① \\ ma = mg\sin\theta - \dfrac{1}{2}\mu mg\cos\theta + T_2 & \cdots ② \\ kma = kmg - T_1 & \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ より，

$$(k+2)ma = \left(k + 2\sin\theta - \frac{3}{2}\mu\cos\theta\right)mg \qquad \therefore \quad a = \frac{2k + 4\sin\theta - 3\mu\cos\theta}{2(k+2)}g$$

(2) ③ より，

$$\begin{aligned} T_1 &= km(g-a) \\ &= \frac{4 - 4\sin\theta + 3\mu\cos\theta}{2(k+2)}kmg \end{aligned}$$

(3) ② より，

$$\begin{aligned} T_2 &= m\left(a - g\sin\theta + \frac{1}{2}\mu g\cos\theta\right) \\ &= \frac{2k - 2k\sin\theta + (k-1)\mu\cos\theta}{2(k+2)}mg \end{aligned}$$

(4) 2 本の糸がたるまない条件は $T_1 > 0$ かつ $T_2 > 0$ だが，$T_1 > 0$ はすでに満たされている．よって $T_2 > 0$ のみを考えればよく，

$$2k - 2k\sin\theta + (k-1)\mu\cos\theta > 0 \qquad \therefore \quad k > \frac{\mu\cos\theta}{2 - 2\sin\theta + \mu\cos\theta}$$

(5) 初速度は 0 なので，

$$\begin{cases} v = at \\ L = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases} \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{2k + 4\sin\theta - 3\mu\cos\theta}{k+2}gL}$$

【2】

《解答》

(1) (a) AB 間および BC 間で作用する摩擦力の大きさを f_1，f_2 とおき，加速度の大きさを a とすると，それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} ma = f_1 \quad \cdots ① \\ ma = F_1 - f_1 - f_2 \quad \cdots ② \\ ma = f_2 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ より，

$$3ma = F_1 \qquad \therefore \quad a = \frac{F_1}{3m}$$

(b) a を ①，③ に代入すると，

$$\begin{cases} \text{A と B の間} \ \cdots \ f_1 = \dfrac{1}{3}F_1 \\ \text{B と C の間} \ \cdots \ f_2 = \dfrac{1}{3}F_1 \end{cases}$$

(c) 初速度は 0 なので，

$$\begin{cases} v = at \\ d = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases} \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{2F_1 d}{3m}}$$

(2) AB 間および BC 間で作用する垂直抗力の大きさを N_1，N_2 とすると，A と B が受ける力の鉛直成分のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = N_1 - mg \\ 0 = N_2 - mg - N_1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} N_1 = mg \\ N_2 = 2mg \end{cases}$$

F_1 を F_2 の下限 F_{20} で置き換えたとき，A と B の間で作用する静止摩擦力の大きさが μN_1 に等しいので，

$$\frac{1}{3}F_{20} = \mu \cdot mg \qquad \therefore \quad F_{20} = 3\mu mg$$

(3) A，B，C の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B}，a_{C} とすると，それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} ma_{\mathrm{A}} = \mu' N_1 \\ ma_{\mathrm{B}} = F_3 - \mu' N_1 - \mu' N_2 \\ ma_{\mathrm{C}} = \mu' N_2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a_{\mathrm{A}} = \mu' g \\ a_{\mathrm{B}} = \dfrac{F_3}{m} - 3\mu' g \\ a_{\mathrm{C}} = 2\mu' g \end{cases}$$

【3】

《解答》

(1) 箱と台車 2 について，力のつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = T_0 - S_0 & \cdots ① \\ 0 = R_0 - mg & \cdots ② \\ 0 = T_0 - M_2 g & \cdots ③ \end{cases}$$

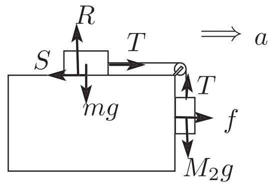
(イ) ② より，$R_0 = mg$

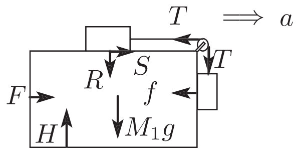
(ロ) ① − ③ より，$S_0 = M_2 g$

(ハ) 滑り出さないための条件は $S_0 \leqq \mu R_0$ なので，

$$M_2 g \leqq \mu mg \qquad \therefore \quad M_2 \leqq \mu m$$

(2) それぞれの運動方程式は，





$$\begin{cases} ma = T - S & \cdots ④ \\ m \cdot 0 = R - mg & \cdots ⑤ \\ M_1 a = F + S - T - f & \cdots ⑥ \\ M_1 \cdot 0 = H - M_1 g - R - T & \cdots ⑦ \\ M_2 a = f & \cdots ⑧ \\ M_2 \cdot 0 = T - M_2 g & \cdots ⑨ \end{cases}$$

(ニ) ④ + ⑥ + ⑧ より，

$$(M_1 + M_2 + m)a = F \qquad \therefore \quad a = \frac{F}{M_1 + M_2 + m}$$

(ホ) ⑨ より，$T = M_2 g$

(ヘ) ④ より，

$$\begin{aligned} S &= T - ma \\ &= M_2 g - \frac{m}{M_1 + M_2 + m} F \end{aligned}$$

(ト) ⑧ より，$f = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2 + m} F$

(3) (チ) ⑥ より，$a = \dfrac{F + S - T - f}{M_1}$

(リ) ⑦ より，$H = M_1 g + T + R$

(4) (ヌ) (ヘ) で F を大きくすると $S < 0$ となる．このとき，箱が左に滑らないための条件は $-S \leqq \mu R$ なので，

$$\frac{m}{M_1 + M_2 + m} F - M_2 g \leqq \mu mg \qquad \therefore \quad F \leqq \frac{(M_2 + \mu m)(M_1 + M_2 + m) g}{m}$$

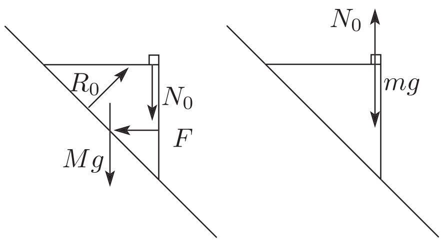
(5) (ル) $S = 0$ なので，

$$0 = M_2 g - \frac{m}{M_1 + M_2 + m} F \qquad \therefore \quad F = \frac{M_2 (M_1 + M_2 + m) g}{m}$$

【4】

《解答》

I (1) AB 間で作用する垂直抗力の大きさを N_0，A が斜面から受ける垂直抗力の大きさを R_0 とすると，力のつりあいの式は，



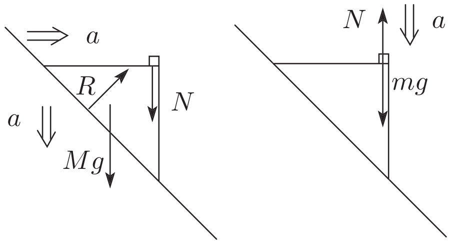
$$\begin{cases} 0 = R_0 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} - F \quad \cdots ① \\ 0 = Mg + N_0 - R_0 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ② \\ 0 = mg - N_0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ より，

$$0 = (M+m)g - F \qquad \therefore \quad F = (M+m)g$$

(2) B には x 方向の力が作用しないので，x 方向には移動することなく y 方向にのみ移動する．よって，B が A の左端に達したときの B の y 座標は d となる．

(3) AB 間で作用する垂直抗力の大きさを N，A が斜面から受ける垂直抗力の大きさを R とおき，B の加速度の大きさを a とすると，それぞれの運動方程式は，



$$\begin{cases} Ma = R \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ④ \\ Ma = Mg + N - R \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ⑤ \\ ma = mg - N \quad \cdots ⑥ \end{cases}$$

④ + ⑤ + ⑥ より，

$$(2M+m)a = (M+m)g \qquad \therefore \quad a = \frac{M+m}{2M+m}g$$

初速度は 0 なので，

$$\begin{cases} v = at \\ d = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases} \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{2gd(M+m)}{2M+m}}$$

II (1) a_x と a_y は等しいので，これを a' とおく．AB 間で作用する垂直抗力の大きさを N'，静止摩擦力の大きさを f，また A が斜面から受ける垂直抗力の大きさを R' とすると，それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} Ma' = R' \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} - f \quad \cdots ⑦ \\ Ma' = Mg + N' - R' \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ⑧ \\ ma' = f \quad \cdots ⑨ \\ ma' = mg - N' \quad \cdots ⑩ \end{cases}$$

⑦ + ⑧ + ⑨ + ⑩ より，

$$(2M + 2m)a' = (M + m)g \qquad \therefore \quad a' = \frac{1}{2}g$$

(2) ⑨，⑩ に a' を代入すると，

$$f = \frac{1}{2}mg \quad , \quad N' = \frac{1}{2}mg$$

AB 間に滑りを生じない限界では $f = \mu_0 N'$ なので，

$$\frac{1}{2}mg = \mu_0 \cdot \frac{1}{2}mg \qquad \therefore \quad \mu_0 = 1$$

2章　単振動

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 張力の大きさを f_1 とすると，物体 A と B が受ける力のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = f_1 - 2mg & \therefore \quad f_1 = 2mg \\ 0 = f_1 - mg - k(H - l_0) \end{cases}$$

これらより，f_1 を消去すると，

$$0 = 2mg - mg - k(H - l_0) \qquad \therefore \quad H = l_0 + \frac{mg}{k}$$

(2) (1) より，$x = 0$ におけるのびは $H - l_0 = \dfrac{mg}{k}$ と分かる．物体 B の位置を x_0，張力の大きさを f_2 とすると，物体 A+D と B が受ける力のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = f_2 - 3mg & \therefore \quad f_2 = 3mg \\ 0 = f_2 - mg - k\left(\dfrac{mg}{k} + x_0\right) \end{cases}$$

これらより，f_2 を消去すると，

$$0 = 3mg - mg - k\left(\frac{mg}{k} + x_0\right) \qquad \therefore \quad x_0 = \frac{mg}{k}$$

(3) 位置 x における物体 B の加速度を a，張力の大きさを f，垂直抗力の大きさを N とすると，それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} 2m \cdot (-a) = f - 2mg \\ ma = f - mg - k\left(\dfrac{mg}{k} + x\right) \\ 2m \cdot 0 = N + k\left(\dfrac{mg}{k} + x\right) - 2mg \end{cases} \qquad \therefore \qquad \begin{cases} 2ma = 2mg - f & \cdots ① \\ ma = f - 2mg - kx & \cdots ② \\ 0 = N - mg + kx & \cdots ③ \end{cases}$$

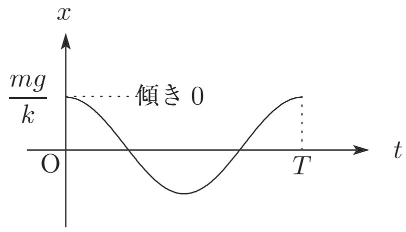
①+②より，

$$3ma = -kx \qquad \therefore \quad a = -\frac{k}{3m}x \quad \cdots ④$$

物体 A，B の運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{k}{3m}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

(4) $x=\dfrac{mg}{k}$ の位置から初速 0 で運動を始めるので，$x-t$ グラフは右図のようになる．よって，物体 B が振動する範囲は，



$$-\frac{mg}{k}\leqq x\leqq\frac{mg}{k}$$

(5) ④を①に代入すると，

$$-\frac{2}{3}kx=2mg-f \qquad \therefore \quad f=2mg+\frac{2}{3}kx$$

(4) をふまえると，

$$f_{\min}=2mg+\frac{2k}{3}\cdot\left(-\frac{mg}{k}\right)=\frac{4}{3}mg$$

(6) ③ より，$N=mg-kx$ と表せる．(4) をふまえると，

$$N_{\max}=mg-k\cdot\left(-\frac{mg}{k}\right)=2mg$$

【2】

《解答》

(1) $F_{\mathrm{G}}=-mg\sin\theta$

(2) 接線方向の加速度を a とすると，この方向の運動方程式は，

$$ma=-mg\sin\theta \qquad \therefore \quad a=-g\sin\theta$$

与えられた近似式を用いるとともに，$R\theta=x$ とおくと，

$$a\fallingdotseq -g\cdot\theta=-\frac{g}{R}x$$

運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega_1=\sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T_1=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

(3) (a) $l=2\cdot R\cos\dfrac{\theta}{2}$

(b) $F_{\mathrm{S}}=k(l-l_0)\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}$ なので，

$$\begin{aligned}F&=-mg\sin\theta+k\left(2R\cos\frac{\theta}{2}-l_0\right)\cdot\sin\frac{\theta}{2}\\&=-mg\sin\theta+kR\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-kl_0\sin\frac{\theta}{2}\\&=(kR-mg)\sin\theta-kl_0\sin\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

(4) (2) と同様に，近似式を用いるとともに $R\theta=x$ とおくと，

$$\begin{aligned}F&\fallingdotseq(kR-mg)\theta-kl_0\cdot\frac{\theta}{2}\\&=(kR-mg)\cdot\frac{x}{R}-kl_0\cdot\frac{x}{2R}\\&=-\frac{kl_0-2(kR-mg)}{2R}x\end{aligned}$$

この式で x の係数が負の場合に，F は復元力となる．よって，l_{C} が満たすべき条件は，

$$-\frac{kl_{\mathrm{C}}-2(kR-mg)}{2R}=0 \qquad \therefore \quad l_{\mathrm{C}}=\frac{2(kR-mg)}{k}$$

(5) l_{C} を用いると，$F=-\dfrac{kl_0-kl_{\mathrm{C}}}{2R}x$ と表せる．(2) と同様に接線方向の加速度を a とすると，この方向の運動方程式は，

$$ma=-\frac{k(l_0-l_{\mathrm{C}})}{2R}x \qquad \therefore \quad a=-\frac{k(l_0-l_{\mathrm{C}})}{2mR}x$$

運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega_2=\sqrt{\frac{k(l_0-l_{\mathrm{C}})}{2mR}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T_2=2\pi\sqrt{\frac{2mR}{k(l_0-l_{\mathrm{C}})}}$$

【3】

《解答》

(1) 垂直抗力の大きさを N_0 とすると，力のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = Mg + N_0 - kd \\ 0 = mg - N_0 \qquad \therefore \quad N_0 = mg \end{cases}$$

これらより N_0 を消去すると，

$$0 = Mg + mg - kd \qquad \therefore \quad d = \frac{(M+m)g}{k}$$

(2) $\begin{cases} Ma = Mg + N - k(x - l_0) \quad \cdots ① \\ ma = mg - N \quad \cdots ② \end{cases}$

(3) ①+②より，

$$(M+m)a = (M+m)g + kl_0 - kx \quad \cdots ③$$

振動の中心では $a = 0$ なので，

$$0 = (M+m)g + kl_0 - kx_0 \qquad \therefore \quad x_0 = l_0 + \frac{(M+m)g}{k}$$

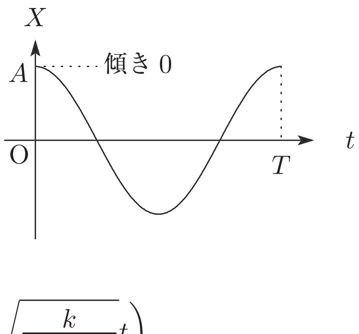
x_0 を用いて③を書き換えると，

$$(M+m)a = kx_0 - kx \qquad \therefore \quad a = -\frac{k}{M+m}(x - x_0)$$

運動は単振動と分かり，

$$角振動数\ \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \qquad \therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

(4) つりあいからのずれ $x - x_0$ を X とおくと，$X-t$ グラフは右図のようになるので，



$$x - x_0 = A\cos(\omega t)$$
$$\therefore \quad x = x_0 + A\cos(\omega t)$$

(3) をふまえると，

$$x = l_0 + \frac{(M+m)g}{k} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t\right)$$

(5) ① × m − ② × M より，

$$0 = (M+m)N - mk(x - l_0) \qquad \therefore \quad N = \frac{mk}{M+m}(x - l_0)$$

(4) をふまえると，

$$N = mg + \frac{mkA}{M+m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t\right)$$

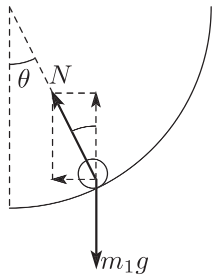
小球が皿から浮き上がらないための条件は $N_{\min} \geqq 0$ なので，

$$mg + \frac{mkA}{M+m}\cdot(-1) \geqq 0 \qquad \therefore \quad A \leqq \frac{(M+m)g}{k}$$

【4】

《解答》

I (1) 図の角度 θ が微小で $\cos\theta \fallingdotseq 1$ とみなせるときは，小球の高さの変化を無視できるので，鉛直方向の加速度は 0 とみてよい．このときの垂直抗力の大きさを N とすると，鉛直方向の運動方程式は，



$$\begin{aligned} m_1\cdot 0 &= N\cos\theta - m_1g \\ &\fallingdotseq N\cdot 1 - m_1g \qquad \therefore\quad N \fallingdotseq m_1g \end{aligned}$$

また $\sin\theta = \dfrac{x_1}{R}$ なので，x 方向の運動方程式は，

$$m_1a_1 = -m_1g\cdot\frac{x_1}{R}$$

(2) (1) より $a_1 = -\dfrac{g}{R}x_1$ と表せるので，運動は単振動と分かり，

$$角振動数\ \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \therefore\quad 周期\ T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

II (1) I と同様に $N \fallingdotseq m_1g$ とみなせる．また $\sin\theta = \dfrac{x_1 - x_2}{R}$ なので，x 方向の運動方程式は，

$$\begin{cases} m_1a_1 = -m_1g\cdot\dfrac{x_1-x_2}{R} & \cdots ① \\ m_2a_2 = +m_1g\cdot\dfrac{x_1-x_2}{R} & \cdots ② \end{cases}$$

(2) 重心の表式をふまえると，

$$\frac{m_1L + m_2\cdot 0}{m_1+m_2} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} \qquad \therefore\quad m_1x_1 + m_2x_2 = m_1L \quad \cdots ③$$

(3) ①，③ より，x_2 を消去すると，

$$\begin{aligned} m_1a_1 &= -\frac{m_1g}{R}\cdot\left(x_1 - \frac{m_1L - m_1x_1}{m_2}\right) \\ &= \frac{{m_1}^2gL}{m_2R} - \frac{m_1g(m_1+m_2)}{m_2R}x_1 \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

振動の中心位置を $x_1 = x_0$ とすると，この位置では $a_1 = 0$ なので，

$$0 = \frac{{m_1}^2gL}{m_2R} - \frac{m_1g(m_1+m_2)}{m_2R}x_0 \qquad \therefore\quad x_0 = \frac{m_1}{m_1+m_2}L$$

(4) x_0 を用いて④を書き換えると，

$$m_1 a_1 = -\frac{m_1 g(m_1+m_2)}{m_2 R}(x_1 - x_0) \qquad \therefore \quad a_1 = -\frac{(m_1+m_2)g}{m_2 R}(x_1 - x_0)$$

運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega' = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)g}{m_2 R}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T' = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 R}{(m_1+m_2)g}}$$

3章　円運動

問題

■演習

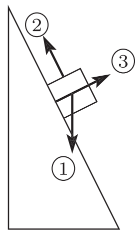
【1】

《解答》

(a) 円錐面に平行な方向について，力のつりあいより，

$$0 = k(l_1 - l) - mg\cos\theta \qquad \therefore\ \frac{l_1}{l} = 1 + \frac{mg\cos\theta}{kl}$$

(b) それぞれの力は右図の向きで作用していて，



$$\begin{cases} ①\text{の力}\cdots\text{重力}\ mg \\ ②\text{の力}\cdots\text{弾性力}\ k(l_2 - l) \\ ③\text{の力}\cdots\text{垂直抗力}\ N \end{cases}$$

鉛直方向について，力のつりあいより，

$$0 = k(l_2 - l)\cos\theta + N\sin\theta - mg \qquad \therefore\ N = \frac{mg - k(l_2 - l)\cos\theta}{\sin\theta}$$

(c) 向心方向の運動方程式は，

$$m \times l_2\sin\theta\cdot\omega^2 = k(l_2 - l)\sin\theta - N\cos\theta \quad \cdots(*)$$

(b) の N を代入すると，

$$ml_2\omega^2\sin\theta = \frac{k(l_2 - l) - mg\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \therefore\ l_2 = \frac{kl + mg\cos\theta}{k - m\omega^2\sin^2\theta}$$

ここで $g = l\Omega^2$，$k = m{\omega_0}^2$ なので，

$$l_2 = \frac{m{\omega_0}^2 l + ml\Omega^2\cos\theta}{m{\omega_0}^2 - m\omega^2\sin^2\theta} \qquad \therefore\ \frac{l_2}{l} = \frac{{\omega_0}^2 + \Omega^2\cos\theta}{{\omega_0}^2 - \omega^2\sin^2\theta}$$

(d) $(*)$ で $N = 0$ のとき，

$$ml_{\mathrm{c}}{\omega_{\mathrm{c}}}^2\sin\theta = k(l_{\mathrm{c}} - l)\sin\theta \qquad \therefore\ l_{\mathrm{c}} = \frac{k}{k - m{\omega_{\mathrm{c}}}^2}l$$

ここで $k = m{\omega_0}^2$ なので，

$$l_{\mathrm{c}} = \frac{m{\omega_0}^2}{m{\omega_0}^2 - m{\omega_{\mathrm{c}}}^2}l \qquad \therefore\ \frac{l_{\mathrm{c}}}{l} = \frac{{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2 - {\omega_{\mathrm{c}}}^2}$$

これと (c) より，

$$\frac{{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2 - {\omega_{\mathrm{c}}}^2} = \frac{{\omega_0}^2 + \Omega^2\cos\theta}{{\omega_0}^2 - {\omega_{\mathrm{c}}}^2\sin^2\theta} \qquad \therefore\ \frac{1}{{\omega_{\mathrm{c}}}^2} = \frac{\Omega^2 + {\omega_0}^2\cos\theta}{{\omega_0}^2\Omega^2}$$

【2】

《解答》

(1) 点 Q を重力による位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(r + r\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{Q}}}^2 + 0 \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{Q}} = \sqrt{v^2 + 2gr(1+\cos\theta)}$$

(2) $\begin{cases} a = \dfrac{v^2}{r} \\ b = g\sin\theta \end{cases}$

(3) 小球が受ける垂直抗力を f とすると，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{r} = f + mg\cos\theta \qquad \therefore \quad f = \frac{mv^2}{r} - mg\cos\theta$$

(4) 床から受ける垂直抗力を N，静止摩擦力を F とすると，ブロックに作用する力のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = N + f\cos\theta - Mg \\ 0 = f\sin\theta - F \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} N = Mg - \left(\dfrac{mv^2}{r} - mg\cos\theta\right)\cos\theta \\ F = \left(\dfrac{mv^2}{r} - mg\cos\theta\right)\sin\theta \end{cases}$$

(5) (3) で $f = 0$ となるとき，

$$\frac{mv^2}{r} - mg\cos\theta = 0 \qquad \therefore \quad \frac{v^2}{r} = g\cos\theta$$

(2) をふまえると，

$$\begin{cases} a = g\cos\theta \\ b = g\sin\theta \end{cases} \qquad \therefore \quad a^2 + b^2 = g^2$$

【3】

《解答》

(1) 円軌道の最下点を重力による位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+0=\frac{1}{2}mv^2+mg(R-R\cos\theta) \qquad \therefore \quad v=\sqrt{{v_0}^2-2gR(1-\cos\theta)}$$

(2) 向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{R}=T-mg\cos\theta \qquad \therefore \quad T=\frac{mv^2}{R}+mg\cos\theta$$

これと (1) より，

$$T=\frac{m{v_0}^2}{R}-2mg+3mg\cos\theta$$

(3) P で $T_{\min}=0$ となる場合が，半円を描いて P に到達できる限界なので，

$$\frac{m{v_0}^2}{R}-2mg+3mg\cos\pi=0 \qquad \therefore \quad v_0=\sqrt{5gR}$$

(4) (2) より，Q における張力の大きさは，

$$T_{\mathrm{Q}}=\frac{m\cdot 5gR}{R}-2mg=3mg$$

この張力が $-x$ 方向に作用し，重力が $-y$ 方向に作用するので，

$$\begin{cases} x \text{ 成分}\cdots-3mg \\ y \text{ 成分}\cdots-mg \end{cases}$$

(5) $+y$ 方向

(6) (1)，(3) より，Q における速さは，

$$v_{\mathrm{Q}}=\sqrt{5gR-2gR\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{3gR}$$

これをふまえて，Q を重力による位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギーの保存より，

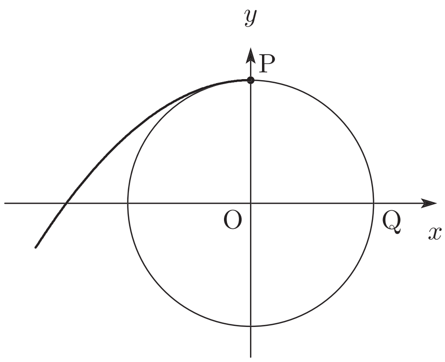
$$\frac{1}{2}m\cdot 3gR+0=0+mgy_{\max} \qquad \therefore \quad y_{\max}=\frac{3}{2}R$$

(7) (1)，(3) より，P における速さは，

$$v_{\mathrm{P}}=\sqrt{5gR-2gR(1-\cos\pi)}=\sqrt{gR}$$

(8) 糸から外れた時刻を $t = 0$ とすると，時刻 t における位置は，

$$\begin{cases} x = -\sqrt{gR} \cdot t \\ y = R - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$



$y = 0$ となる時刻を $t = t_0$ とすると，

$$R - \frac{1}{2}g{t_0}^2 = 0 \qquad \therefore \quad t_0 = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

このときの x 座標は，

$$x = -\sqrt{gR} \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}} = -\sqrt{2}R$$

【4】
《解答》

(ア) 床面を重力による位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{V_0}^2+0=\frac{1}{2}m{V_\mathrm{B}}^2+mg(R-R\cos 60^\circ)\qquad\therefore\quad V_\mathrm{B}=\sqrt{{V_0}^2-gR}$$

(イ) 向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{{V_\mathrm{B}}^2}{R}=N_\mathrm{B}-mg\cos 60^\circ$$

(ア) をふまえると，

$$m\cdot\frac{{V_0}^2-gR}{R}=N_\mathrm{B}-\frac{1}{2}mg\qquad\therefore\quad N_\mathrm{B}=\frac{m{V_0}^2}{R}-\frac{1}{2}mg$$

(ウ) 床面を重力による位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{V_0}^2+0=\frac{1}{2}m{V_\mathrm{C}}^2+mgR\qquad\therefore\quad \frac{1}{2}m{V_\mathrm{C}}^2=\frac{1}{2}m{V_0}^2-mgR$$

点 C を通過する場合は $\frac{1}{2}m{V_\mathrm{C}}^2>0$ なので，

$$\frac{1}{2}m{V_0}^2-mgR>0\qquad\therefore\quad V_0>\sqrt{2gR}$$

(エ) $N_\mathrm{D}=0$ であることをふまえると，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{{V_\mathrm{D}}^2}{R}=mg\sin\theta\qquad\therefore\quad V_\mathrm{D}=\sqrt{gR\sin\theta}$$

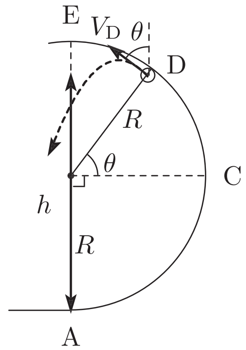
(オ) 床面を重力による位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{V_0}^2+0=\frac{1}{2}m{V_\mathrm{D}}^2+mg(R+R\sin\theta)\qquad\therefore\quad {V_0}^2={V_\mathrm{D}}^2+2gR(1+\sin\theta)$$

(エ) をふまえると，

$${V_0}^2=gR\sin\theta+2gR(1+\sin\theta)\qquad\therefore\quad \sin\theta=\frac{{V_0}^2-2gR}{3gR}$$

(カ) 水平方向の変位に注目すると，



$$V_D \sin\theta \cdot t_1 = R\cos\theta$$

(エ) をふまえると，

$$\sqrt{gR\sin\theta}\sin\theta \cdot t_1 = R\cos\theta \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sqrt{\frac{R}{g\sin\theta}}$$

(キ) $t = t_1$ における高さを h とすると，

$$h = (R + R\sin\theta) + V_D\cos\theta \cdot t_1 - \frac{1}{2}g{t_1}^2$$

(エ)，(カ) をふまえると，

$$\begin{aligned} h &= R(1+\sin\theta) + \sqrt{gR\sin\theta}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sqrt{\frac{R}{g\sin\theta}} - \frac{g}{2}\cdot\frac{R\cos^2\theta}{g\sin^3\theta} \\ &= R\left(1 + \sin\theta + \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} - \frac{1-\sin^2\theta}{2\sin^3\theta}\right) \\ &= R\left(1 + \frac{3}{2\sin\theta} - \frac{1}{2\sin^3\theta}\right) \end{aligned}$$

(ク) $h = 0$ となるためには，

$$1 + \frac{3}{2\sin\theta} - \frac{1}{2\sin^3\theta} = 0 \qquad \therefore \quad 2\sin^3\theta + 3\sin^2\theta - 1 = 0$$

左辺を因数分解すると，

$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1)^2 = 0 \qquad \therefore \quad \sin\theta = \frac{1}{2}\ ,\ -1$$

点 D においては $\sin\theta > 0$ なので，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ でなければならない．

(ケ) (オ)，(ク) より，

$$\frac{{V_0}^2 - 2gR}{3gR} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad V_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gR}$$

問題

■演習

【1】

《解答》

(あ) $v\Delta t$

(い) 全体積 V のうち，$Sv\Delta t$ に含まれる物質量なので，

$$n \times \frac{Sv\Delta t}{V} = \frac{nSv\Delta t}{V}$$

(う) $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

(え) 分子の運動量変化の大きさと等しいので，

$$|m \cdot (-v) - mv| = 2mv$$

(お) (い)～(え) をふまえると，力積の総和は，

$$2mv \times \left(\frac{nSv\Delta t}{V} \times \frac{1}{6} \times N_\mathrm{A} \right) = \frac{nN_\mathrm{A}Smv^2\Delta t}{3V}$$

(か) (お) より，壁が受ける力の大きさは，

$$F = \frac{nN_\mathrm{A}Smv^2}{3V} \qquad \therefore \quad P = \frac{nN_\mathrm{A}mv^2}{3V}$$

(き) 状態方程式に (か) を代入すると，

$$\frac{nN_\mathrm{A}mv^2}{3V} \cdot V = nRT \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{3RT}{N_\mathrm{A}m}}$$

(く) (き) に数値を代入すると，

$$v = \sqrt{\frac{3 \times 8 \times 300}{2 \times 10^{-3}}} \fallingdotseq 2 \times 10^3 \ \mathrm{m/s}$$

【2】

《解答》

(1) 力のつりあいより，

$$0 = p_0 S + mg - p_1 S \qquad \therefore \quad p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$$

(2) ボイルの法則より，

$$p_1 \cdot Sh = p_2 \cdot S(h - y) \qquad \therefore \quad p_2 = \frac{h}{h - y} p_1$$

(3) ピストンの運動方程式は，

$$ma = p_0 S + mg - p_2 S$$

(1)，(2) をふまえると，

$$\begin{aligned} ma &= p_0 S + mg - \frac{h}{h - y}(p_0 S + mg) \\ &= -\frac{y}{h - y}(p_0 S + mg) \end{aligned}$$

(4) 与えられた近似式を用いると，

$$ma \fallingdotseq -\frac{y}{h}(p_0 S + mg) \qquad \therefore \quad a = -\frac{p_0 S + mg}{hm} y$$

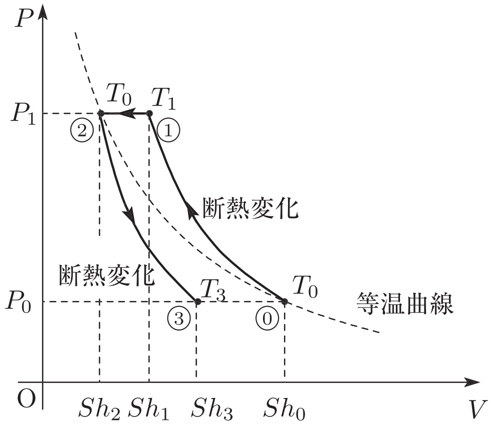
ピストンの運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{p_0 S + mg}{hm}} \qquad \therefore \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{hm}{p_0 S + mg}}$$

【3】

《解答》

気体の状態は，下図の ⓪ → ① → ② → ③ のように変化している．



(1) このときの気体の圧力を P_1 とすると，力のつりあいの式は，

$$0 = P_1S - Mg - P_0S \qquad \therefore \quad P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

また，状態 ⓪ と ① について，ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{P_0Sh_0}{T_0} = \frac{P_1Sh_1}{T_1} \qquad \therefore \quad T_1 = \frac{P_1h_1}{P_0h_0}T_0$$

これらより，

$$T_1 = \frac{(P_0S + Mg)h_1}{P_0Sh_0}T_0$$

(2) 気体が仕事をされたことにより，内部エネルギーが増加するので，$T_1 > T_0$ となる．

(3) 状態 ⓪ と ② について，ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{P_0Sh_0}{T_0} = \frac{P_1Sh_2}{T_0} \qquad \therefore \quad h_2 = \frac{P_0}{P_1}h_0$$

(1) の P_1 を代入すると，

$$h_2 = \frac{P_0S}{P_0S + Mg}h_0$$

(4) 気体の圧力が一定で温度が T_1 から T_0 に下がるので，$h_2 < h_1$ となる．

(5) 状態 ⓪ と ③ について，ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{P_0Sh_0}{T_0} = \frac{P_0Sh_3}{T_3} \qquad \therefore \quad h_3 = \frac{T_3}{T_0}h_0$$

【4】

《解答》

(1) 温度が ΔT 増加したとき，内部エネルギーの増加は，

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{3}{2}R(T+\Delta T) - \frac{3}{2}RT \\ &= \frac{3}{2}R\Delta T\end{aligned}$$

また，体積一定のときは気体のする仕事が 0 である．熱力学第 1 法則より，

$$\Delta U = \Delta Q - 0 \qquad \therefore \quad \Delta Q = \frac{3}{2}R\Delta T$$

(2) 圧力が p で一定で，温度が ΔT 変化したときの体積変化を ΔV とすると，変化前後の状態方程式は，

$$\begin{cases} pV = RT \\ p(V+\Delta V) = R(T+\Delta T) \end{cases} \qquad \therefore \quad p\Delta V = R\Delta T$$

よって，気体のする仕事は $\Delta W = R\Delta T$ となる．熱力学第 1 法則より，

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W \qquad \therefore \quad \Delta Q = \frac{5}{2}R\Delta T$$

(3) 断熱膨張では，気体の体積が増加して気体が仕事をする．このため，気体の内部エネルギーが減少して温度は下がる．

(4) 温度変化を ΔT とすると，変化前後の状態方程式は，

$$\begin{cases} pV = RT \\ (p+\Delta p)(V+\Delta V) = R(T+\Delta T) \end{cases} \qquad \therefore \quad (p+\Delta p)(V+\Delta V) - pV = R\Delta T$$

与えられた近似式を用いると，

$$p\Delta V + V\Delta p = R\Delta T \qquad \therefore \quad \Delta T = \frac{p\Delta V + V\Delta p}{R} \quad \cdots ①$$

ここで，ΔV が微小量なので，気体がする仕事は $\Delta W = p\Delta V$ とみなせる．熱力学第 1 法則より，

$$\Delta U = 0 - \Delta W \qquad \therefore \quad \frac{3}{2}R\Delta T = -p\Delta V \quad \cdots ②$$

① を ② に代入すると，

$$\frac{3}{2}(p\Delta V + V\Delta p) = -p\Delta V \qquad \therefore \quad \Delta p = -\frac{5p}{3V}\Delta V$$

5章　電場と電位

問題

■演習

【1】

《解答》

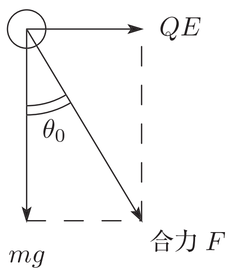
(1) 張力の大きさを T とすると，力のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = QE - T\sin\theta_0 \\ 0 = T\cos\theta_0 - mg \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} T\sin\theta_0 = QE \\ T\cos\theta_0 = mg \end{cases}$$

これらより，T を消去すると，

$$\frac{QE}{mg} = \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \qquad \therefore \quad E = \frac{mg\tan\theta_0}{Q}$$

(2) (a) 重力と電気力の合力は，大きさが $\sqrt{(QE)^2 + (mg)^2}$ で $\theta = \theta_0$ の方向に作用している．この方向で生じる加速度を a として，運動方程式を立てると，



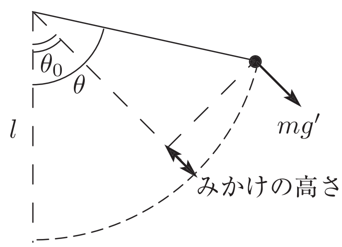
$$ma = \sqrt{(QE)^2 + (mg)^2} \qquad \therefore \quad a = \sqrt{\left(\frac{QE}{m}\right)^2 + g^2}$$

初速度は 0 なので，

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{QE}{m}\right)^2 + g^2} \cdot t$$

(b) 重力と電気力の合力が作用する方向に自由落下していくので，運動の軌跡は (イ) となる．

(3) (a) 重力と電気力の合力の大きさを F とすると，

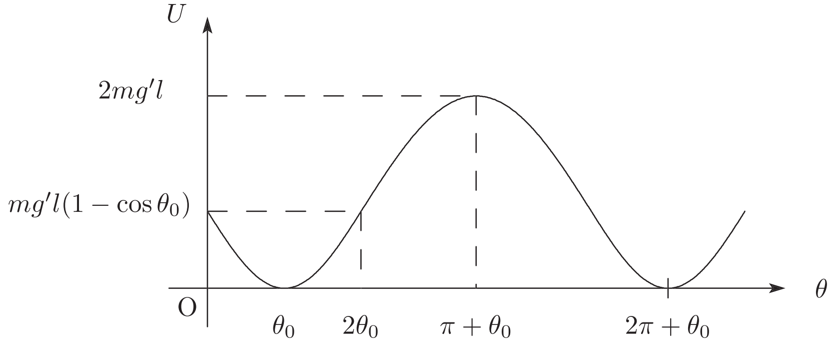


$$F\cos\theta_0 = mg \qquad \therefore \quad F = m \cdot \frac{g}{\cos\theta_0}$$

$\dfrac{g}{\cos\theta_0} = g'$ とおくと $F = mg'$ と表せるので，F をみかけの重力と考えることができる．対応するみかけの高さは $l - l\cos(\theta - \theta_0)$ なので，

$$\begin{aligned} U(\theta) &= mg'\{l - l\cos(\theta - \theta_0)\} \\ &= \frac{mgl\{1 - \cos(\theta - \theta_0)\}}{\cos\theta_0} \end{aligned}$$

(b) $U(\theta)$ のグラフは下図のようになる．$\theta = 0$ と $\theta_{\max}$ における位置エネルギーが等しいので，$\theta_{\max} = 2\theta_0$ と分かる．



【2】

《解答》

(1) 力学的エネルギーの保存より，

$$0 + QV_1 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0 \qquad \therefore \quad v_0 = \sqrt{\frac{2QV_1}{m}}$$

(2) 一様な電場なので，

$$V - (-V) = Ed \qquad \therefore \quad E = \frac{2V}{d}$$

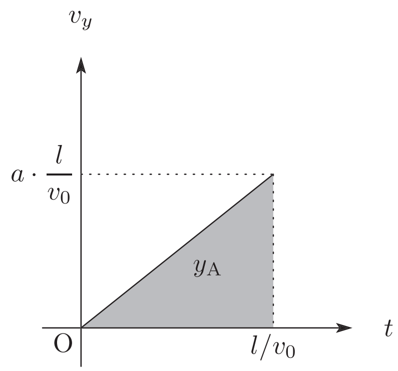
(3) $F = Q \cdot \dfrac{2V}{d}$

(4) y 方向の運動方程式は，

$$ma = Q \cdot \frac{2V}{d} \qquad \therefore \quad a = \frac{2QV}{md}$$

(5) x 方向には力を受けないので速度の x 成分は変化しない．(1) をふまえると，

$$\begin{cases} v_x = v_0 = \sqrt{\dfrac{2QV_1}{m}} \\ v_y = a \cdot \dfrac{l}{v_0} = \dfrac{Vl}{d}\sqrt{\dfrac{2Q}{mV_1}} \end{cases}$$



(6) $v_y - t$ グラフより，

$$y_A = \frac{1}{2}a\left(\frac{l}{v_0}\right)^2 = \frac{Vl^2}{2V_1 d}$$

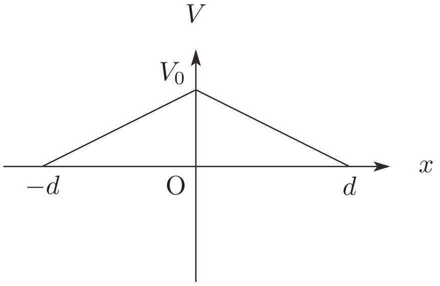
(7) 点 A$'$ を通過した後は y 方向でも力を受けないので，速度の y 成分も変化しない．(5)，(6) をふまえると，

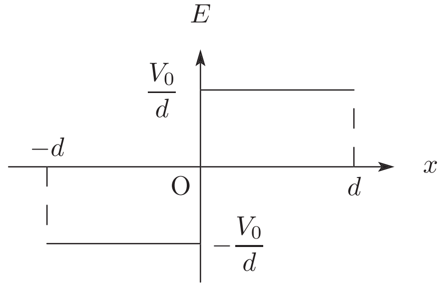
$$y_S = y_A + v_y \cdot \frac{L}{v_0} = \frac{Vl(l+2L)}{2V_1 d}$$

【3】

《解答》

(1)





(2) $+x$ 方向に，大きさ $q \cdot \dfrac{V_0}{d}$

(3) 電気力とつりあう外力を加えて運ぶので，

$$W = q \cdot \frac{V_0}{d} \times \frac{d}{2} = \frac{1}{2} qV_0$$

(4) AO 間，BO 間における加速度を a_1，a_2 とすると，運動方程式は，

$$\begin{cases} ma_1 = q \cdot \dfrac{V_0}{d} \\ ma_2 = q \cdot \left(-\dfrac{V_0}{d}\right) \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{qV_0}{md} \\ a_2 = -\dfrac{qV_0}{md} \end{cases}$$

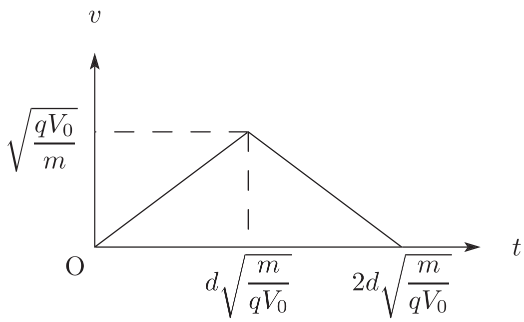
点 O を通過する時刻を t_0 とすると，

$$\frac{1}{2} a_1 {t_0}^2 = \frac{d}{2} \qquad \therefore \quad t_0 = d\sqrt{\frac{m}{qV_0}}$$

点 O を通過してから点 B に到達するまでの時間もこれと等しい．また初速度は 0 なので，点 O における速さは，

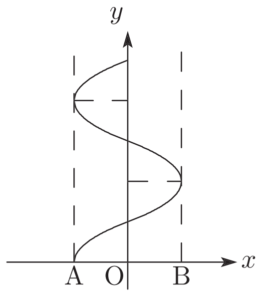
$$a_1 t_0 = \sqrt{\frac{qV_0}{m}}$$

以上より，$v-t$ グラフは右図のようになる．



(5) $T = 4t_0 = 4d\sqrt{\dfrac{m}{qV_0}}$

(6) y 方向には，力を受けないので等速度で運動をする．また，x 方向には，(4) で求めた加速度で往復運動をするので，軌跡は右図のようになる．



【4】

《解答》

(ア) $E \cdot 2S$

(イ) $\dfrac{q}{2\varepsilon_0 S}$

(ウ) $\dfrac{V}{d}$

(エ) $\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$

(オ) $\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S} + \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

(カ) $Q = \dfrac{\varepsilon_0 SV}{d}$

(キ) (エ), (カ) をふまえると,

$$\begin{aligned} F &= Q \cdot \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{\varepsilon_0 SV}{d}\right)^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2} \end{aligned}$$

(ク) 与えられた数値を (キ) に代入すると,

$$\begin{aligned} F &= \frac{(8.9 \times 10^{-12}) \times (4.0 \times 10^{-2}) \times (2.0 \times 10^3)^2}{2 \times (5.0 \times 10^{-3})^2} \\ &\fallingdotseq 2.8 \times 10^{-2}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

P2J

高２東大物理発展

～力学・熱力学・電場と電位～

Z-KAI

会員番号		氏　名	

不許複製