P2JR

冬期講習

解答

Z会東大進学教室

高２物理力学完成～円運動・万有引力～

1章　円運動（1）

問題

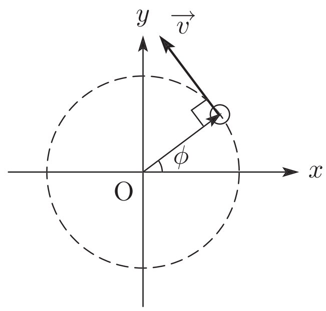
■演習

【1】

《解答》

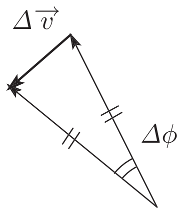
(1) $\varDelta s = 2 \times r \sin \dfrac{\varDelta\phi}{2}$

(2) $\varDelta s$ を $\varDelta t$ で割って，$\varDelta t$ を 0 に近付けることにより，



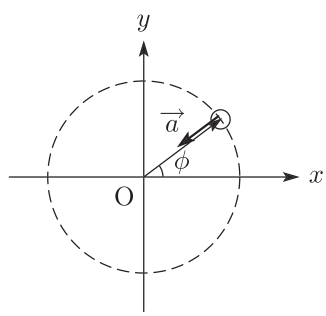
$$
\begin{aligned}
v &= \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\varDelta s}{\varDelta t} \\
&= \lim_{\varDelta t \to 0} 2r \frac{\sin \dfrac{\varDelta\phi}{2}}{\varDelta t} \\
&= \lim_{\varDelta t \to 0} 2r \cdot \frac{\sin \dfrac{\varDelta\phi}{2}}{\dfrac{\varDelta\phi}{2}} \cdot \frac{\dfrac{\varDelta\phi}{2}}{\varDelta t} \\
&= \lim_{\varDelta t \to 0} r \frac{\varDelta\phi}{\varDelta t} \cdot \frac{\sin \dfrac{\varDelta\phi}{2}}{\dfrac{\varDelta\phi}{2}} \\
&= r\omega \cdot 1
\end{aligned}
$$

(3) 始点を一致させて，時間 $\varDelta t$ だけ経過する前後における速度ベクトルを図示すると，右図のようになるので，



$$|\varDelta \vec{v}| = 2 \times v \sin \frac{\varDelta\phi}{2}$$

(4) $|\varDelta \vec{v}|$ を $\varDelta t$ で割って，$\varDelta t$ を 0 に近付けることにより，



$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{|\varDelta \vec{v}|}{\varDelta t} \\
&= \lim_{\varDelta t \to 0} 2v \frac{\sin \dfrac{\varDelta\phi}{2}}{\varDelta t} \\
&= \lim_{\varDelta t \to 0} 2v \cdot \frac{\sin \dfrac{\varDelta\phi}{2}}{\dfrac{\varDelta\phi}{2}} \cdot \frac{\dfrac{\varDelta\phi}{2}}{\varDelta t} \\
&= \lim_{\varDelta t \to 0} v \frac{\varDelta\phi}{\varDelta t} \cdot \frac{\sin \dfrac{\varDelta\phi}{2}}{\dfrac{\varDelta\phi}{2}} \\
&= v\omega \cdot 1 \\
&= r\omega^2
\end{aligned}
$$

【2】

《解答》

(1) $R = 3h\tan\dfrac{\pi}{4} + h = 4h$

(2) 向心方向の運動方程式は,

$$m \times 4h \cdot \omega^2 = T\sin\frac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad T = 4\sqrt{2}mh\omega^2$$

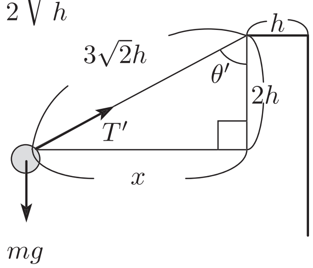
鉛直方向の力のつりあいより,

$$0 = N + T\cos\frac{\pi}{4} - mg \qquad \therefore \quad N = mg - 4mh\omega^2$$

(3) $\omega = \omega_0$ のとき, $N = 0$ となって離れるので,

$$0 = mg - 4mh{\omega_0}^2 \qquad \therefore \quad \omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

(4) 高さ h で円運動するとき, 右図のようになるので,



$$x = \sqrt{(3\sqrt{2}h)^2 - (2h)^2} = \sqrt{14}h$$

このとき, 糸の傾き角度を θ' とすると,

$$\begin{cases} \sin\theta' = \dfrac{\sqrt{14}h}{3\sqrt{2}h} = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \\ \cos\theta' = \dfrac{2h}{3\sqrt{2}h} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

また, 糸の張力の大きさを T' として, 鉛直方向の力のつりあいより,

$$0 = T' \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} - mg \qquad \therefore \quad T' = \frac{3}{\sqrt{2}}mg$$

向心方向の運動方程式は,

$$m \times (\sqrt{14} + 1)h \cdot \omega^2 = T' \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}$$

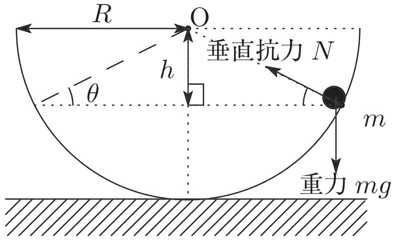
これらより, T' を消去すると,

$$(\sqrt{14} + 1)mh\omega^2 = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}mg \qquad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{7}g}{(2\sqrt{7} + \sqrt{2})h}}$$

【3】

《解答》

(1) 小球は右図のように重力と垂直抗力を受けている.



(2) 角度 θ を図のように設定すると,

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{h}{R} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{R^2-h^2}}{R} \end{cases}$$

鉛直方向の力のつりあいより,

$$0 = N\sin\theta - mg \qquad \therefore \quad N = \frac{R}{h}mg$$

半径は $\sqrt{R^2-h^2}$ なので, 向心方向の運動方程式は,

$$m \cdot \frac{{V_0}^2}{\sqrt{R^2-h^2}} = N\cos\theta$$

これらより,

$$m \cdot \frac{{V_0}^2}{\sqrt{R^2-h^2}} = \frac{R}{h}mg \cdot \frac{\sqrt{R^2-h^2}}{R} \qquad \therefore \quad V_0 = \sqrt{\frac{g(R^2-h^2)}{h}}$$

(3) (2) の V_0 をふまえると,

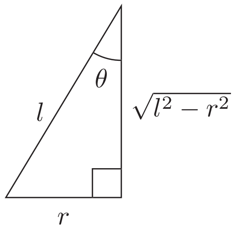
$$T = \frac{2\pi\sqrt{R^2-h^2}}{V_0} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

(4) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + mgh \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{{v_0}^2 - 2gh}$$

【4】

《解答》



(a) $F_{\mathrm{C}} = mr\omega^2$

(b) 右図で $\sin\theta = \dfrac{r}{l}$ なので，

$$F_{\mathrm{H}} = K(l-l_0)\sin\theta = K(l-l_0)\cdot\frac{r}{l}$$

(c) 右図で $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{l^2-r^2}}{l}$ をふまえると，

$$0 = K(l-l_0)\cdot\frac{\sqrt{l^2-r^2}}{l} - mg$$

(d) (a)，(b) より，向心方向の運動方程式は，

$$mr\omega^2 = K(l-l_0)\cdot\frac{r}{l} \qquad \therefore \quad l = \frac{Kl_0}{K-m\omega^2}$$

また，(c) を書き換えると，

$$\sqrt{l^2-r^2} = \frac{mgl}{K(l-l_0)} \qquad \therefore \quad r = \sqrt{l^2 - \left\{\frac{mgl}{K(l-l_0)}\right\}^2}$$

l を代入して整理すると，

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{Kl_0}{K-m\omega^2}\right)^2 - \left(\frac{mg}{K}\cdot\frac{Kl_0}{m\omega^2 l_0}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{Kl_0}{K-m\omega^2}\right)^2 - \frac{g^2}{\omega^4}} \end{aligned}$$

(e) $l > 0$ なので，

$$\frac{Kl_0}{K-m\omega^2} > 0 \qquad \therefore \quad \omega < \sqrt{\frac{K}{m}}$$

(f) $r^2 > 0$ より，

$$\left(\frac{Kl_0}{K-m\omega^2}\right)^2 - \frac{g^2}{\omega^4} > 0 \qquad \therefore \quad \omega > \sqrt{\frac{Kg}{mg+Kl_0}}$$

2章　円運動（2）

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 点 P の高さは $l - l\cos\theta$ なので, 位置エネルギーは,

$$U = mg \cdot l(1-\cos\theta)$$

(2) 力学的エネルギーの保存より,

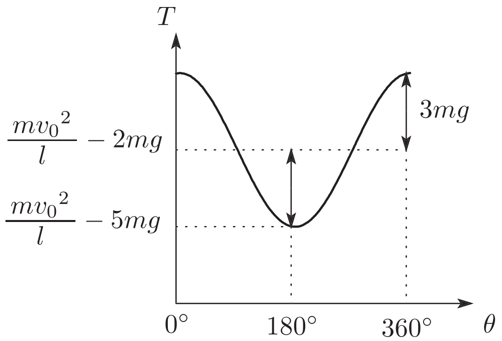
$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) \qquad \therefore \quad v = \sqrt{{v_0}^2 - 2gl(1-\cos\theta)}$$

(3) $m\dfrac{v^2}{l} = T - mg\cos\theta$

(4) (2), (3) より v を消去すると,

$$\begin{aligned} T &= mg\cos\theta + \frac{m}{l}\{{v_0}^2 - 2gl(1-\cos\theta)\} \\ &= \left(\frac{m{v_0}^2}{l} - 2mg\right) + 3mg\cos\theta \end{aligned}$$

これを図示すると下図のようになる.



(5) $\theta = 180°$ における T の最小値が負にならなければよいので,

$$\frac{m{v_0}^2}{l} - 5mg \geqq 0 \qquad \therefore \quad v_0 \geqq \sqrt{5gl}$$

【2】

《解答》

(イ) P 点における速さを v_1 とし，点 O を重力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + mga\cos\theta_1 \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{v^2 + 2ga(1-\cos\theta_1)}$$

(ロ) M が球面から受ける力を f とすると，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{{v_1}^2}{a} = mg\cos\theta_1 - f$$

これと (イ) より，

$$m \cdot \frac{v^2 + 2ga(1-\cos\theta_1)}{a} = mg\cos\theta_1 - f$$
$$\therefore \quad f = 3mg\cos\theta_1 - \left(\frac{mv^2}{a} + 2mg\right)$$

(ハ) (ロ) で $\theta_1 = \theta_2$ のとき，$f = 0$ となるので，

$$3mg\cos\theta_2 - \left(\frac{mv^2}{a} + 2mg\right) = 0 \qquad \therefore \quad \cos\theta_2 = \frac{v^2 + 2ag}{3ag}$$

(ニ) B 点において，接線方向の力のつり合いより，

$$0 = mg\sin 30^\circ - F \qquad \therefore \quad F = \frac{1}{2}mg$$

(ホ) B 点において，向心方向の力のつり合いより，

$$0 = mg\cos 30^\circ - N \qquad \therefore \quad N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

(ヘ) B 点では $F = \mu N$ となっているので，

$$\frac{1}{2}mg = \mu \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}mg \qquad \therefore \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ト) C 点において，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{V^2}{a} = mg\cos 60^\circ \qquad \therefore \quad V = \sqrt{\frac{1}{2}ga}$$

【3】

《解答》

(ア) 小球の速さを v とし，点 A を重力の位置エネルギーの基準として, 力学的エネルギーの保存より，

$$0+0=\frac{1}{2}mv^2+mg\cdot(-R\sin\theta) \qquad \therefore \quad v=\sqrt{2gR\sin\theta}$$

(イ) 小球について，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{R}=N-mg\sin\theta$$

これと (ア) より，

$$m\cdot\frac{2gR\sin\theta}{R}=N-mg\sin\theta \qquad \therefore \quad N=3mg\sin\theta$$

(ウ) 台について，鉛直方向の力のつりあいより，

$$0=N'-Mg-N\sin\theta \qquad \therefore \quad N'=Mg+N\sin\theta$$

(エ) 台について，水平方向の力のつりあいより，

$$0=f'-N\cos\phi \qquad \therefore \quad f'=N\cos\phi$$

(オ) $\theta=\phi$ において，台がすべり出さないための条件 $f'\leqq\mu N'$ より，

$$3mg\sin\phi\cdot\cos\phi\leqq\mu(Mg+3mg\sin\phi\cdot\sin\phi)$$

$$\therefore \quad \frac{M}{m}\geqq\frac{3\sin\phi(\cos\phi-\mu\sin\phi)}{\mu}$$

【4】

《解答》

(1) $\dfrac{1}{2}kx^2$

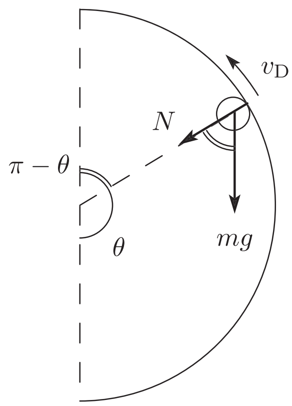
(2) 力学的エネルギーの保存より，

$$0+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2+0 \qquad \therefore \quad v_0=x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(3) 点 C を重力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，

$$0+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2+mg\cdot 2r \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\frac{kx^2}{m}-4gr}$$

(4) 点 D における速さを v_{D} とし，点 C を重力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，



$$0+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{D}}}^2+mg\{r+r\cos(\pi-\theta)\}$$
$$\therefore \quad v_{\mathrm{D}}=\sqrt{\frac{kx^2}{m}-2gr(1-\cos\theta)}$$

また，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{{v_{\mathrm{D}}}^2}{r}=N+mg\cos(\pi-\theta)$$

これらより v_{D} を消去すると，

$$\frac{m}{r}\left\{\frac{kx^2}{m}-2gr(1-\cos\theta)\right\}=N-mg\cos\theta$$
$$\therefore \quad N=\left(\frac{kx^2}{r}-2mg\right)+3mg\cos\theta$$

(5) $\theta=\pi$ における N の最小値が負にならなければよいので，

$$\frac{kx^2}{r}-5mg\geqq 0 \qquad \therefore \quad x\geqq\sqrt{\frac{5mgr}{k}}$$

3章　万有引力（1）

問題

■演習

【1】

《解答》

(ア) $f = \dfrac{GMm}{l^2}$

(イ) $a = \dfrac{V^2}{l}$

(ウ) $m\dfrac{V^2}{l} = \dfrac{GMm}{l^2}$

(エ) $V = \sqrt{\dfrac{GM}{l}}$

(オ) $T = \dfrac{2\pi l}{V} = 2\pi l\sqrt{\dfrac{l}{GM}}$

(カ) (オ) の式を 2 乗すると，T の 2 乗は l の 3 乗に比例している．

(キ) $m'g = \dfrac{GMm'}{R^2}$

(ク) (キ) より $MG = gR^2$ と表せるので，これを (オ) の式に代入すると，

$$T = 2\pi l\sqrt{\frac{l}{gR^2}} = \frac{2\pi l}{R}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(ケ) (ク) の式に $l = 60R$ を代入すると，

$$T = \frac{2\pi \cdot 60R}{R}\sqrt{\frac{60R}{g}} = 120\pi\sqrt{\frac{60R}{g}}$$

与えられた数値を代入すると，

$$T = 120 \times 3.1 \times \frac{7.7 \times (2.5 \times 10^3)}{3.1} = 2.31 \times 10^6[\mathrm{s}]$$

1[日]=24×3600[s] をふまえると，

$$T = \frac{2.31 \times 10^6}{24 \times 3600} \fallingdotseq 27\text{ 日}$$

【2】

《解答》

(ア) $F=\dfrac{GMm}{r^2}$

(イ) $\dfrac{2\pi}{T}$

(ウ) $r\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2=\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$

(エ) (ア), (ウ) をふまえると，運動方程式は，

$$m\cdot\frac{4\pi^2 r}{T^2}=\frac{GMm}{r^2}\qquad\therefore\quad T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

(オ) 速さは $r\cdot\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi r}{T}$ なので，運動エネルギーは，

$$K=\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2=\frac{2\pi^2 mr^2}{T^2}$$

(カ) (エ), (オ) より，

$$K=\frac{2\pi^2 mr^2}{\dfrac{4\pi^2}{GM}r^3}=\frac{GMm}{2r}$$

(キ) $U=-\dfrac{GMm}{r}$

(ク) (カ), (キ) より，

$$K+U=\frac{GMm}{2r}+\frac{-GMm}{r}=-\frac{GMm}{2r}$$

【3】

《解答》

(1) (ア) 接線方向

(a) $v\Delta t$

(b) $\Delta S = \dfrac{1}{2}R \cdot v\Delta t$

(c) $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}Rv$

(イ) 等速円運動

(2) (ウ) 太陽

(d) $\dfrac{v^2}{R}$

(e) $F = m\dfrac{v^2}{R}$

(f) $T = \dfrac{2\pi R}{v}$

(g) 問題文の③，④ 式より，v を消去すると，

$$F = \frac{m}{R}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

(h) 問題文の ⑤，⑥ 式より，T^2 を消去すると，

$$F = \frac{4\pi^2 mR}{R^3/k} = \frac{4\pi^2 km}{R^2}$$

(3) (エ) 二

(オ) 反比例

(カ) 比例

(キ) 引力

(ク) 万有引力

【4】

《解答》

(1) (a) $F = \dfrac{GMm}{R^2}$

(b) (a) の F が重力 mg なので，

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \qquad \therefore \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

(2) (c) $U_{\mathrm{R}} = -\dfrac{GMm}{R}$

(d) 力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GMm}{R} = 0 + \frac{-GMm}{2R} \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(e) 無限遠点で速さが 0 に収束する場合について，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{R}}}^2 + \frac{-GMm}{R} = 0 + 0 \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

ここで (b) より $GM = gR^2$ と表せるので，

$$v_{\mathrm{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot gR^2}{R}} = \sqrt{2gR}$$

与えられた数値を代入すると，

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{R}} &= \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \\ &= 112 \times 10^2 \\ &\fallingdotseq 1.1 \times 10^4 [\mathrm{m/s}] \end{aligned}$$

4章　万有引力（2）

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 円軌道の半径は $R+h$ なので，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{R+h}=\frac{GMm}{(R+h)^2}\qquad\therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

この速さで 1 周 $2\pi(R+h)$ を運動する時間が T なので，

$$T=\frac{2\pi(R+h)}{v}=2\pi(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}}$$

(2) 爆発直後の A の速さが v_{A} のとき，無限遠方で A の速さが 0 となることをふまえ，無限遠方を万有引力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot{v_{\mathrm{A}}}^2+\frac{-GM\cdot\frac{m}{2}}{R+h}=0+0\qquad\therefore\quad v_{\mathrm{A}}=\sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

(3) 爆発の前後における運動量の保存より，

$$mv=\frac{m}{2}v_{\mathrm{A}}+\frac{m}{2}v_{\mathrm{B}}\qquad\therefore\quad v_{\mathrm{B}}=2v-v_{\mathrm{A}}$$

これと (1)，(2) より，

$$v_{\mathrm{B}}=2\sqrt{\frac{GM}{R+h}}-\sqrt{\frac{2GM}{R+h}}=(2-\sqrt{2})\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

地表に達するときの B の速さを u_{B} とし，無限遠方を万有引力の位置エネルギーの基準として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot{v_{\mathrm{B}}}^2+\frac{-GM\cdot\frac{m}{2}}{R+h}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot{u_{\mathrm{B}}}^2+\frac{-GM\cdot\frac{m}{2}}{R}$$

これを解いて v_{B} を代入すると，

$$u_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{2GM\{(3-2\sqrt{2})R+h\}}{R(R+h)}}$$

【2】

《解答》

(ア) 人工衛星の質量を m とすると，向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{GMm}{R^2} \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(イ) 第 2 宇宙速度を v' とすると，初速 v' で打ち上げた場合に無限遠方で速さが 0 となる．この場合について，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv'^2+\frac{-GMm}{R}=0+0 \qquad \therefore \quad v'=\sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \cdots v \text{ の} \sqrt{2}\text{倍}$$

(ウ) $\frac{1}{2}m(av)^2+0=\frac{1}{2}ma^2v^2$

(エ) $\frac{1}{2}\cdot av\cdot bR=\frac{1}{2}abRv$

(オ) $\frac{1}{2}XV$

(カ) $\frac{1}{2}mV^2+\frac{-GMm}{X}$

(キ) (オ) で $X=R$，$V=V_0$ として，ケプラーの第 2 法則より，

$$\frac{1}{2}abRv=\frac{1}{2}RV_0 \qquad \therefore \quad V_0=abv$$

(ク) (カ) で $X=R$，$V=V_0$ として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mV_0{}^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}ma^2v^2$$

(ア)，(キ) をふまえると，

$$\frac{ma^2b^2}{2}\cdot\frac{GM}{R}-\frac{GMm}{R}=\frac{ma^2}{2}\cdot\frac{GM}{R} \qquad \therefore \quad b=\frac{\sqrt{a^2+2}}{a}$$

(ケ) 分裂して A の速さが v となる場合の B の速さを v_{B} として，B を打ち出す前後における運動量の保存より，

$$mV_0=\frac{m}{2}v+\frac{m}{2}v_{\mathrm{B}} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{B}}=2V_0-v$$

よって，A から見て B を打ち出した速さは，

$$(2V_0-v)-v=2(V_0-v)$$

【3】

《解答》

(ア) $m\dfrac{v^2}{r}$

(イ) 向心方向の運動方程式は,

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}\qquad\therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

(ウ) $T=\dfrac{2\pi r}{v}=2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}$

(エ) (ウ) を 2 乗すると,

$$T^2=4\pi^2r^2\frac{r}{GM}\qquad\therefore\quad\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

(オ) (イ) より，惑星の運動エネルギーは,

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{m}{2}\cdot\frac{GM}{r}$$

また，万有引力による位置エネルギーは $U=-\dfrac{GMm}{r}$ なので,

$$K:U=\frac{GMm}{2r}:\frac{-GMm}{r}=1:-2$$

(カ) $\overline{\mathrm{FA}}=a-a\varepsilon$ なので,

$$\mathit{\Delta}S=\frac{1}{2}(a-a\varepsilon)\cdot v_{\mathrm{A}}\mathit{\Delta}t\qquad\therefore\quad I_{\mathrm{A}}=\frac{\mathit{\Delta}S}{\mathit{\Delta}t}=\frac{1-\varepsilon}{2}av_{\mathrm{A}}$$

(キ) $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{a^2-(a\varepsilon)^2}$ なので,

$$\mathit{\Delta}S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-(a\varepsilon)^2}\cdot v_{\mathrm{B}}\mathit{\Delta}t\quad\therefore\quad I_{\mathrm{B}}=\frac{\mathit{\Delta}S}{\mathit{\Delta}t}=\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}av_{\mathrm{B}}$$

(ク) $I_{\mathrm{A}}=I_{\mathrm{B}}$ より,

$$\frac{1-\varepsilon}{2}av_{\mathrm{A}}=\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}av_{\mathrm{B}}\qquad\therefore\quad v_{\mathrm{A}}=\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\times v_{\mathrm{B}}$$

(ケ) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2+\frac{-GMm}{a-a\varepsilon}=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{B}}}^2+\frac{-GMm}{a}$$

これと (ク) より,

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}{v_{\mathrm{B}}}^2-\frac{GMm}{a(1-\varepsilon)}=\frac{m}{2}\cdot{v_{\mathrm{B}}}^2-\frac{GMm}{a}\qquad\therefore\quad v_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

(コ) (キ)，(ケ) をふまえると,

$$T=\frac{\pi a\sqrt{a^2-(a\varepsilon)^2}}{\dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}a\cdot\sqrt{\dfrac{GM}{a}}}=2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}$$

【4】

《解答》

(イ) $K=\dfrac{1}{2}mv^2$

(ロ) $U=-\dfrac{GMm}{r}$

(ハ) 向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}\qquad\therefore\quad r=\frac{GM}{v^2}$$

(ニ) (ロ)，(ハ) より，

$$U=-\frac{GMm}{GM/v^2}=-mv^2\qquad\therefore\quad \frac{K}{U}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{-mv^2}=-\frac{1}{2}$$

(ホ) (ニ) より $K=-\dfrac{1}{2}U$ と表せるので，

$$E=\left(-\frac{1}{2}U\right)+U=-\frac{GMm}{2r}$$

(ヘ) (ハ) より $v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$ と表せるので，

$$T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$$

(ト) (ホ) の r を $\overline{\mathrm{AX}}=\dfrac{R+r}{2}$ で置き換えることにより，

$$E=-\frac{GMm}{2\cdot\overline{\mathrm{AX}}}=-\frac{GMm}{R+r}$$

(チ) 遠地点 A における力学的エネルギーが (ト) の E なので，

$$\frac{1}{2}mv'^2+\frac{-GMm}{R}=-\frac{GMm}{R+r}\qquad\therefore\quad v'=\sqrt{\frac{2GMr}{R(R+r)}}$$

また，(ハ) と同様に半径 R の円運動について立式すると，

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{GMm}{R^2}\qquad\therefore\quad v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

これらより，

$$\frac{v}{v'}=\frac{\sqrt{\dfrac{GM}{R}}}{\sqrt{\dfrac{2GMr}{R(R+r)}}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}+1\right)}$$

ここで (ヘ) をふまえると，

$$\begin{cases}T=2\pi R\sqrt{\dfrac{R}{GM}}\\[2ex] t=2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}\end{cases}\qquad\therefore\quad \left(\frac{T}{t}\right)^2=\left(\frac{R}{r}\right)^3$$

以上より，$\dfrac{R}{r}$ を消去すると，

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{2}{3}} + 1\right\}}$$

(リ) (チ) をふまえると，

$$\frac{K}{K'} = \left(\frac{v}{v'}\right)^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{2}{3}} + 1\right\}$$

与えられた数値を代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{K}{K'} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{24 \times 60}{90}\right)^{\frac{2}{3}} + 1\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(4 \cdot 2^{\frac{2}{3}} + 1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left\{4 \times (1.26)^2 + 1\right\} \fallingdotseq 3.7\end{aligned}$$

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 箱と台車２について，力のつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = T_0 - S_0 & \cdots ① \\ 0 = R_0 - mg & \cdots ② \\ 0 = T_0 - M_2 g & \cdots ③ \end{cases}$$

(イ) ② より，$R_0 = mg$

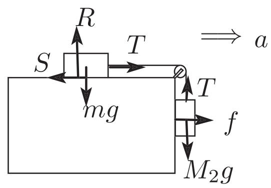
(ロ) ① − ③ より，$S_0 = M_2 g$

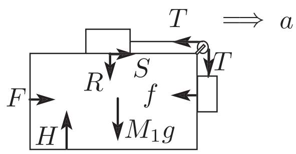
(ハ) 滑り出さないための条件は $S_0 \leqq \mu R_0$ なので，

$$M_2 g \leqq \mu mg \qquad \therefore \quad M_2 \leqq \mu m$$

(2) それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} ma = T - S & \cdots ④ \\ m \cdot 0 = R - mg & \cdots ⑤ \\ M_1 a = F + S - T - f & \cdots ⑥ \\ M_1 \cdot 0 = H - M_1 g - R - T & \cdots ⑦ \\ M_2 a = f & \cdots ⑧ \\ M_2 \cdot 0 = T - M_2 g & \cdots ⑨ \end{cases}$$





(ニ) ④ + ⑥ + ⑧ より，

$$(M_1 + M_2 + m)a = F \qquad \therefore \quad a = \frac{F}{M_1 + M_2 + m}$$

(ホ) ⑨ より，$T = M_2 g$

(へ) ④ より，

$$\begin{aligned} S &= T - ma \\ &= M_2 g - \frac{m}{M_1 + M_2 + m} F \end{aligned}$$

(ト) ⑧ より，$f = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2 + m} F$

(3) (チ) ⑥ より，$a = \dfrac{F + S - T - f}{M_1}$

(リ) ⑦ より，$H = M_1 g + T + R$

(4) (ヌ) (へ) で F を大きくすると $S<0$ となる．このとき，箱が左に滑らないための条件は $-S \leqq \mu R$ なので，

$$\frac{m}{M_1+M_2+m}F - M_2 g \leqq \mu m g \qquad \therefore \quad F \leqq \frac{(M_2+\mu m)(M_1+M_2+m)g}{m}$$

(5) (ル) $S=0$ なので，

$$0 = M_2 g - \frac{m}{M_1+M_2+m}F \qquad \therefore \quad F = \frac{M_2(M_1+M_2+m)g}{m}$$

【2】

《解答》

(1) 運動量の保存より，

$$m_{\rm B}v_0=(m_{\rm A}+m_{\rm B})v \qquad \therefore \quad v=\frac{m_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}v_0$$

(2) (1) をふまえると，

$$\frac{1}{2}m_{\rm B}{v_0}^2-\frac{1}{2}(m_{\rm A}+m_{\rm B})v^2=\frac{m_{\rm A}m_{\rm B}{v_0}^2}{2(m_{\rm A}+m_{\rm B})}$$

(3) 力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}(m_{\rm A}+m_{\rm B})v^2+\frac{1}{2}k\cdot 0^2=0+\frac{1}{2}kd^2 \qquad \therefore \quad d=\frac{m_{\rm B}v_0}{\sqrt{(m_{\rm A}+m_{\rm B})k}}$$

(4) ばねの縮みが x の位置における加速度を a，A と B の間で作用する抗力を N とすると，A および B の運動方程式は，

$$\begin{cases} m_{\rm A}a=-kx+N \\ m_{\rm B}a=-N \end{cases} \qquad \therefore \quad a=-\frac{k}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}x$$

A および B の運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega=\sqrt{\frac{k}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T=2\pi\sqrt{\frac{m_{\rm A}+m_{\rm B}}{k}}$$

求める時間 t は，振動の中心から右端までの所要時間なので，

$$t=\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_{\rm A}+m_{\rm B}}{k}}$$

(5) 力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}(m_{\rm A}+m_{\rm B})v^2+0=\frac{1}{2}(m_{\rm A}+m_{\rm B}){v'}^2+0 \qquad \therefore \quad v'=\frac{m_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}v_0$$

(6) ばねの縮みが x の位置における加速度を a' とすると，A の運動方程式は，

$$m_{\rm A}a'=-kx \qquad \therefore \quad a'=-\frac{k}{m_{\rm A}}x$$

A の運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega'=\sqrt{\frac{k}{m_{\rm A}}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T'=2\pi\sqrt{\frac{m_{\rm A}}{k}}$$

また，単振動の振幅を A として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m_{\rm A}{v'}^2+0=0+\frac{1}{2}kA^2 \qquad \therefore \quad A=\frac{m_{\rm B}v_0}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}\sqrt{\frac{m_{\rm A}}{k}}$$

【3】

《解答》

(1) 垂直抗力の大きさを N_0 とすると，力のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = Mg + N_0 - kd \\ 0 = mg - N_0 \qquad \therefore \quad N_0 = mg \end{cases}$$

これらより N_0 を消去すると，

$$0 = Mg + mg - kd \qquad \therefore \quad d = \frac{(M+m)g}{k}$$

(2) $\begin{cases} Ma = Mg + N - k(x - l_0) \quad \cdots ① \\ ma = mg - N \quad \cdots ② \end{cases}$

(3) ①+②より，

$$(M+m)a = (M+m)g + kl_0 - kx \quad \cdots ③$$

振動の中心では $a = 0$ なので，

$$0 = (M+m)g + kl_0 - kx_0 \qquad \therefore \quad x_0 = l_0 + \frac{(M+m)g}{k}$$

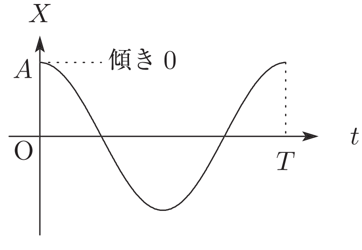
x_0 を用いて③を書き換えると，

$$(M+m)a = kx_0 - kx \qquad \therefore \quad a = -\frac{k}{M+m}(x - x_0)$$

運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \qquad \therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

(4) つりあいからのずれ $x - x_0$ を X とおくと，$X - t$ グラフは右図のようになるので，



$$x - x_0 = A\cos(\omega t)$$
$$\therefore \quad x = x_0 + A\cos(\omega t)$$

(3) をふまえると，

$$x = l_0 + \frac{(M+m)g}{k} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t\right)$$

(5) $① \times m - ② \times M$ より，

$$0 = (M+m)N - mk(x - l_0) \qquad \therefore \quad N = \frac{mk}{M+m}(x - l_0)$$

(4) をふまえると，

$$N = mg + \frac{mkA}{M+m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t\right)$$

小球が皿から浮き上がらないための条件は $N_{\min} \geqq 0$ なので，

$$mg + \frac{mkA}{M+m}\cdot(-1) \geqq 0 \qquad \therefore \quad A \leqq \frac{(M+m)g}{k}$$

【4】

《解答》

(1) 円軌道の最下点を重力による位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+0=\frac{1}{2}mv^2+mg(R-R\cos\theta) \qquad \therefore \quad v=\sqrt{{v_0}^2-2gR(1-\cos\theta)}$$

(2) 向心方向の運動方程式は，

$$m\frac{v^2}{R}=T-mg\cos\theta \qquad \therefore \quad T=\frac{mv^2}{R}+mg\cos\theta$$

これと (1) より，

$$T=\frac{m{v_0}^2}{R}-2mg+3mg\cos\theta$$

(3) P で $T_{\min}=0$ となる場合が，半円を描いて P に到達できる限界なので，

$$\frac{m{v_0}^2}{R}-2mg+3mg\cos\pi=0 \qquad \therefore \quad v_0=\sqrt{5gR}$$

(4) (2) より，Q における張力の大きさは，

$$T_{\mathrm{Q}}=\frac{m\cdot 5gR}{R}-2mg=3mg$$

この張力が $-x$ 方向に作用し，重力が $-y$ 方向に作用するので，

$$\begin{cases} x\ 成分\cdots -3mg \\ y\ 成分\cdots -mg \end{cases}$$

(5) $+y$ 方向

(6) (1)，(3) より，Q における速さは，

$$v_{\mathrm{Q}}=\sqrt{5gR-2gR\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{3gR}$$

これをふまえて，Q を重力による位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギーの保存より，

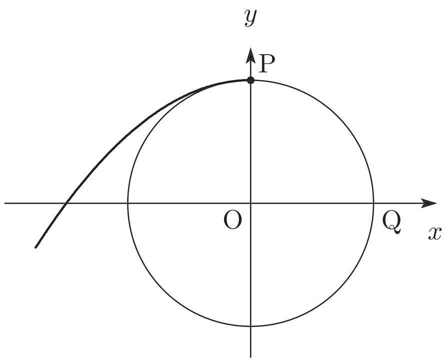
$$\frac{1}{2}m\cdot 3gR+0=0+mgy_{\max} \qquad \therefore \quad y_{\max}=\frac{3}{2}R$$

(7) (1)，(3) より，P における速さは，

$$v_{\mathrm{P}}=\sqrt{5gR-2gR(1-\cos\pi)}=\sqrt{gR}$$

(8) 糸から外れた時刻を $t=0$ とすると，時刻 t における位置は，

$$\begin{cases} x=-\sqrt{gR}\cdot t \\ y=R-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$



$y=0$ となる時刻を $t=t_0$ とすると，

$$R-\frac{1}{2}g{t_0}^2=0 \qquad \therefore \quad t_0=\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

このときの x 座標は，

$$x=-\sqrt{gR}\cdot\sqrt{\frac{2R}{g}}=-\sqrt{2}R$$

Z-KAI

会員番号		氏　名	