MJA

直前講習

# 解答

Ｚ会東大進学教室

# 直前東大理系数学発展演習

## 【1回目】

## 問題

【1】(1)

$$f_{n+2}(\theta)+f_n(\theta)=\cos(n+2)\theta+\cos n\theta$$
$$=2\cos\frac{(n+2)\theta+n\theta}{2}\cos\frac{(n+2)\theta-n\theta}{2}$$
$$=2\cos(n+1)\theta\cos\theta$$
$$=2f_1(\theta)f_{n+1}(\theta)$$

(証終)

(2) 数学的帰納法を用いて証明する.

(I) $n=1$ のとき, $f_1(\theta)=\cos\theta$ より, $f_1(\theta)$ は $\cos\theta$ の 1 次式である.

$n=2$ のとき

$$f_2(\theta)=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

より, $f_2(\theta)$ は $\cos\theta$ の 2 次式である.

(II) $n=k$, $k+1$ のとき題意が成り立つと仮定する. このとき, (1) より

$$f_{k+2}(\theta)=2f_1(\theta)f_{k+1}(\theta)-f_k(\theta)$$

であり, $f_1(\theta)f_{k+1}(\theta)$ は $\cos\theta$ の $k+2$ 次式, $f_k(\theta)$ は $\cos\theta$ の $k$ 次式となるから, $f_{k+2}(\theta)$ は $k+2$ 次式となる.

以上により, 1 以上の整数 $n$ に対して, $f_n(\theta)$ は $\cos\theta$ の $n$ 次式である. (証終)

(3) $x=\cos\theta$ とおくと

$$F_n(\cos\theta)=f_n(\theta)=\cos n\theta$$

であるから, $\theta$ について微分すれば

$$F_n{}'(\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)=-\sin n\theta\cdot n$$

ゆえに $\sin\theta\neq 0$ のとき

$$F_n{}'(\cos\theta)=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$$

よって, $\theta=\dfrac{k}{n}\pi$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ とすれば

$$\sin\theta\neq 0,\ F_n{}'\left(\cos\frac{k}{n}\pi\right)=0$$

ここで, $0<\dfrac{k}{n}\pi<\pi$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ より, $\cos\dfrac{k}{n}\pi$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の値はすべて異なる.

したがって, $x=\cos\dfrac{k}{n}\pi$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ は $F_n{}'(x)=0$ の $-1<x<1$ での相異なる実数解となり, 題意が示された. (証終)

---

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　　(2) 10 点　　(3) 10 点

(1) $\square_1$ 証明できて …………………………………………………… 5 点

(2) $\square_1$ 数学的帰納法 (I) ができて ……………………………… 5 点

$\square_2$ 数学的帰納法 (II) ができて ……………………………… 5 点

(3) $\square_1$ $F_n{}'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$ に ……………………………… 5 点

$\square_2$ 証明ができて ……………………………… 5 点

【2】(1) $m$ 個の赤球と $n$ 個の白球をそれぞれ 2 個のグループに分けて，［赤］［白］［赤］［白］の順に並べればよい．

$m$ 個の赤球を 2 個のグループに分ける分け方は，赤球を 1 列に並べてその列に区切りを 1 個入れる入れ方を考えて，$m-1$ 通りある．

$n$ 個の白球を 2 個のグループに分ける分け方も同様に考えて，$n-1$ 通り．

よって，題意をみたすような並べ方は

$\boldsymbol{(m-1)(n-1)}$ **(通り)　(答)**

(2) ［赤］$k+1$ 個，［白］$k$ 個のグループに分かれるのは

$$\underbrace{［赤］［白］［赤］［白］\cdots［赤］}_{［赤］:\ k+1\ 個,\ ［白］:\ k\ 個}$$

の順に並ぶときである．

$m$ 個の赤球を $k+1$ 個のグループに分ける分け方は，区切りを $k$ 個入れる入れ方を考えて

${}_{m-1}\mathrm{C}_k$(通り)

$n$ 個の白球を $k$ 個のグループに分ける分け方は，区切りを $k-1$ 個入れる入れ方を考えて

${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$(通り)

よって，題意をみたすような並べ方は

$\boldsymbol{{}_{m-1}\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}$ **(通り)　(答)**

(3) グループの総数が $2r+1$ 個となるのは，次の (i)(ii) の場合である．

(i) ［赤］$r+1$ 個，［白］$r$ 個で，［赤］［白］［赤］$\cdots$［赤］と並ぶ．

(ii) ［赤］$r$ 個，［白］$r+1$ 個で，［白］［赤］［白］$\cdots$［白］と並ぶ．

よって，それぞれの場合に関して考える．

(i) (2) と同様に考えて，$m$ 個の赤球を $r+1$ 個のグループに分ける分け方は ${}_{m-1}\mathrm{C}_r$ 通りで，その各々に対して $n$ 個の白球を $r$ 個のグループに分ける分け方は ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通り．

よって，(i) の場合の並べ方は

${}_{m-1}\mathrm{C}_r \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$(通り)

(ii) $m$ 個の赤球を $r$ 個のグループに分ける分け方は ${}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通りで，その各々に対して $n$ 個の白球を $r+1$ 個のグループに分ける分け方は ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ 通り．よって，(ii) の場合の並べ方は

${}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1} \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_r$(通り)

(i)，(ii) は互いに排反だから題意をみたすような並べ方は

$\boldsymbol{{}_{m-1}\mathrm{C}_r \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1} \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_r}$ **(通り)　(答)**

(4) グループの総数が $2r$ 個となるのは次の (i)，(ii) の場合である．

(i) ［赤］$r$ 個，［白］$r$ 個で，［赤］［白］［赤］$\cdots$［白］と並ぶ．

(ii) ［赤］$r$ 個，［白］$r$ 個で，［白］［赤］［白］$\cdots$［赤］と並ぶ.

よって，それぞれの場合に関して考える.

(i) $m$ 個の赤球を $r$ 個のグループに分ける分け方は ${}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通りで，その各々に対して $n$ 個の白球を $r$ 個のグループに分ける分け方は ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通り.

よって，(i) の場合の並べ方は

$${}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\text{（通り）}$$

(ii) (i) と同様にして，${}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$（通り）

(i)，(ii) は互いに排反だから題意をみたすような並べ方は

$$\boldsymbol{2\cdot{}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1}\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}\text{（通り）（答）}$$

---

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 5 点　(2) 7 点　(3) 7 点　(4) 6 点

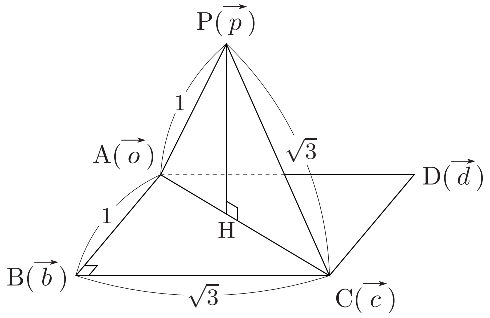
(1) □$_1$ 答に …… 5 点

(2) □$_1$ ${}_{m-1}\mathrm{C}_k$（通り）または ${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$（通り）に …… 3 点
□$_2$ 答に …… 4 点

(3) □$_1$ (i)，(ii) のどちらかの場合ができて …… 3 点
□$_2$ 答に …… 4 点

(4) □$_1$ (i)，(ii) のどちらかの場合ができて …… 3 点
□$_2$ 答に …… 3 点

【3】$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$ とする．




(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\vec{p}-\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{p}-\vec{d}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{d})$$
$$=\left|\vec{p}\right|^2-(\vec{b}+\vec{d})\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{d}$$
$$=\left|\vec{p}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{p}$$

ここで $\left|\vec{p}\right|=1$ であり，また $\triangle\mathrm{APC}$ で $\angle\mathrm{PAC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{AC}=2$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{p}=2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=1^2-1=0 \qquad \therefore\quad \angle\mathrm{BPD}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$ （答）

(2) (1) より，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ であるから

$$\triangle\mathrm{BPD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$$

ここで

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2=\left|\vec{p}-\vec{b}\right|^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{p}$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2=\left|\vec{p}+\vec{b}-\vec{c}\right|^2$$
$$=1+1+4+2\vec{b}\cdot\vec{p}-2\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{2}$$
$$=2+2\vec{b}\cdot\vec{p}$$

$$\therefore\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2=4\{1-(\vec{b}\cdot\vec{p})^2\}$$

従って

$$\triangle\mathrm{BPD}=\sqrt{1-(\vec{b}\cdot\vec{p})^2}$$

となり，$\left|\vec{b}\cdot\vec{p}\right|$ が最小のとき $\triangle\mathrm{BPD}$ の面積は最大となる．

P から AC に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\vec{b}\cdot\vec{p}=(\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}})\cdot\vec{b}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{\mathrm{HP}} \cdot \overrightarrow{b}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \overrightarrow{\mathrm{HP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HB}})$$
$$= \frac{1}{4} + \overrightarrow{\mathrm{HP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ のなす角を $\theta$ とすれば

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{p} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos\theta$$

であるから，$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{p} = 0$ となり，このとき $\left|\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{p}\right|$ は最小値 0 をとる．

このとき

$$\triangle \mathrm{BPD} = \sqrt{1-0} = 1$$

だから，求める最大値 max$\triangle$BPD は

$$\max\triangle \mathrm{BPD} = \mathbf{1} \quad （答）$$

また，面 PAC と面 $\pi$ とのなす角 $\alpha$ は，2 直線 BH，PH のなす角に等しい$\left(ただし，0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$．$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ のなす角 $\theta$ について，$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ であるから，$\theta > \dfrac{\pi}{2}$ である．

よって，$\alpha = \pi - \theta$ であるから，求める $\alpha$ の余弦は

$$\cos\alpha = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{1}{3}} \quad （答）$$

---

【配点の目安】

配点：25 点

（1）10 点　　（2）15 点

（1）□$_1$ $\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DP}} = \left|\overrightarrow{p}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{p}$ に……………………5 点

□$_2$ 答に……………………5 点

（2）□$_1$ $\triangle \mathrm{BPD} = \sqrt{1 - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{p})^2}$ に……………………5 点

□$_2$ $\triangle$BPD の最大値 1 に……………………5 点

□$_3$ 面 PAC と面 $\pi$ とのなす角の余弦に……………………5 点

【4】 $f(x)=0$ の整数解を $m$，$n$ とする．

まず，$f(m)=0$ より

$$m(m^3+am^2+bm+c)=-1$$

$m$，$m^3+am^2+bm+c$ はともに整数であるから，上式より

$$m=\pm 1$$

となる．$n$ についても同様である．よって，2 つの整数解は

$$(-1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (1,\ 1)$$

のいずれかである．

さらに，虚数解の 1 つを $\alpha=u+vi$ （$u$，$v$ は実数）とすると，もう 1 つの虚数解は $\overline{\alpha}=u-vi$ となるので

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1=(x-m)(x-n)(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$$

が成り立ち，両辺の定数項を比較すると

$$mn\alpha\overline{\alpha}=mn(u^2+v^2)=1 \qquad \therefore\quad mn>0$$

となるから，2 つの整数解から $(-1,\ 1)$ の場合は除かれる．

(ⅰ) 2 つの整数解が $(1,\ 1)$ のとき

$f(x)$ は $(x-1)^2$ を因数にもつから，$x^4$ の係数と定数項が 1 であることを考慮すると

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+px+1)$$

とおける．すなわち

$$\begin{aligned}x^4+ax^3+bx^2+cx+1&=(x-1)^2(x^2+px+1)\\&=x^4+(p-2)x^3+(-2p+2)x^2+(p-2)x+1\end{aligned}$$

よって

$$a=p-2,\ b=-2p+2,\ c=p-2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また，$x^2+px+1=0$ が虚数解をもつことより

$$p^2-4<0 \qquad \therefore\quad -2<p<2$$

$a$，$b$，$c$ が整数であることと①より，$p$ も整数でなければならないから

$$p=-1,\ 0,\ 1$$

これらを①に代入すると

$$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-1,\ 0,\ -1)$$

(ⅱ) 2 つの整数解が $(-1,\ -1)$ のとき

同様にして，$f(x)=(x+1)^2(x^2+qx+1)$ とおけるから

$$\begin{aligned}x^4+ax^3+bx^2+cx+1&=(x+1)^2(x^2+qx+1)\\&=x^4+(q+2)x^3+(2q+2)x^2+(q+2)x+1\end{aligned}$$

よって

$$a=q+2,\ b=2q+2,\ c=q+2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

また，$x^2+qx+1=0$ が虚数解をもつことより，上と同様にして $q=-1,\ 0,\ 1$ となるから，これらを②に代入して

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 4,\ 3)$$

以上より，求める $a,\ b,\ c$ は

$(a,\ b,\ c)=$ **$(\pm 1,\ 0,\ \pm 1)$，$(\pm 2,\ 2,\ \pm 2)$，$(\pm 3,\ 4,\ \pm 3)$　(複号同順)**　(答)

---

【配点の目安】

配点：25 点

□$_1$ 整数解が $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ のいずれかであることを示して……………5 点
□$_2$ (i)① に………………………………………………………………2 点
□$_3$ 「$p^2-4<0$」や「$p=-1,\ 0,\ 1$」などに…………………………………2 点
□$_4$ (ii)② に………………………………………………………………2 点
□$_5$ 「$q^2-4<0$」や「$q=-1,\ 0,\ 1$」などに…………………………………2 点
□$_6$ (答)$(a,\ b,\ c)$ 1 組につき 2 点……………………………………12 点

MJA

直前東大理系数学発展演習

【1回目】

Z-KAI

| 会員番号 | | 氏　名 | |
|---|---|---|---|