

Z会東大進学教室

直前東大理系数学発展演習

【3回目】



問題

【1】 P を表す複素数 z は

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおける. P' , P'' を表す複素数はそれぞれ

$$\sqrt{2}z, \sqrt{2}z(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

とおけるので, Q を表す複素数 w は

$$w = r + \sqrt{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)z$$

$\sqrt{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \beta$ とおくと

$$w = r + \beta z$$

これより

$$\frac{w}{z} = \frac{1}{z}(r + \beta z) = \frac{1}{r}\bar{z} + \beta \quad (\because |z|^2 = z \cdot \bar{z} = r^2)$$

$$\therefore \bar{z} = r\left(\frac{w}{z} - \beta\right)$$

$|z| = r$ だから

$$|\bar{z}| = r \quad \therefore \left|\frac{w}{z} - \beta\right| = 1$$

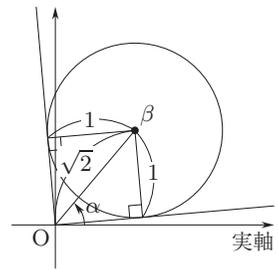
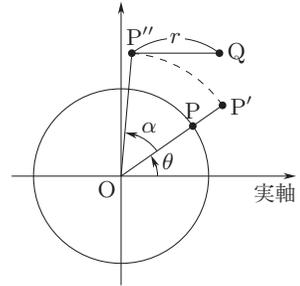
複素数 $\frac{w}{z}$ が表す点は, 点 β を中心, 半径 1 の円周上を動く (下図参照). ここで, $|\beta| = \sqrt{2}$ であり

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

そして, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3}{4}\pi$ だから, 右図より

$$\alpha - \frac{\pi}{4} \leq \arg \frac{w}{z} \leq \alpha + \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha - \frac{\pi}{4} \leq \angle POQ \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \quad (\text{答})$$



【配点の目安】

配点：25 点

- ₁ Q に対応する w を z , α , r で表して……………7 点
- ₂ $\left|\frac{w}{z} - \beta\right| = 1$ に相当する内容に……………8 点
- ₃ 答に……………10 点

【2】対称性より、点Pが線分AB上にあるときについて考えればよく、さらに $AP = x$ とおくと、 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ の場合について調べればよい。

(i) $0 \leq x \leq 1$ のとき

影の面積は、右図において

$$QC \times 1 + RC \times 1$$

ここで、 $PE = 1 - x$, $EH = 2$, $HG = 1$ より

$$GQ = \frac{1}{2}PE = \frac{1-x}{2}$$

となるので

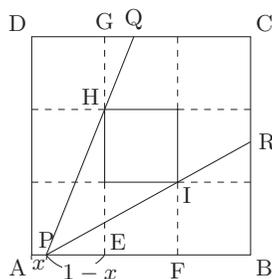
$$QC = 2 - GQ = \frac{x+3}{2}$$

また、 $\frac{BR}{PB} = \frac{FI}{PF}$ より

$$BR = \frac{FI}{PF} \cdot PB = \frac{3-x}{2-x}$$

したがって、影の面積 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+3}{2} + \left(3 - \frac{3-x}{2-x}\right) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x-2} + \frac{7}{2} \end{aligned}$$



(ii) $1 < x \leq \frac{3}{2}$ のとき

(i)と同様に右図において

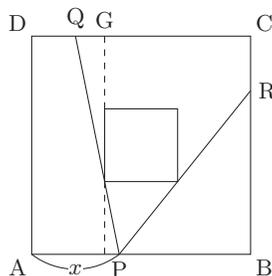
$$QG = 2(x-1)$$

となるから

$$QC = 2x$$

また、 $BR = \frac{3-x}{2-x}$ であるから、影の面積 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + \left(3 - \frac{3-x}{2-x}\right) \\ &= 2x + \frac{1}{x-2} + 2 \end{aligned}$$



したがって、 $2-x = t$ とおくことにより、影の面積 ($g(t)$ とおく) は

$$g(t) = \begin{cases} \frac{9}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{t} & (1 \leq t \leq 2) \\ 6 - 2t - \frac{1}{t} & \left(\frac{1}{2} \leq t < 1\right) \end{cases}$$

となる。よって

$$\frac{1}{2} < t < 1 \text{ のとき } g'(t) = -2 + \frac{1}{t^2}$$

$$1 < t < 2 \text{ のとき } g'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{t^2}$$

となるから、増減表は以下のようになる。

t	$\frac{1}{2}$...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$...	1	...	$\sqrt{2}$...	2
$g'(t)$		+	0	-		+	0	-	
$g(t)$	3	↗		↘	3	↗		↘	3

ここで

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6 - 2\sqrt{2}, \quad g(\sqrt{2}) = \frac{9}{2} - \sqrt{2}$$

であるから、

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - g(\sqrt{2}) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$$

より

頂点からの距離が $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $6 - 2\sqrt{2}$ をとり、
 頂点からの距離が $0, 1, \frac{3}{2}$ のとき最小値 3 をとる。 (答)

【配点の目安】

配点：25点

- ₁ $0 \leq x \leq 1$ のときの $f(x)$ に.....5点
- ₂ $1 < x \leq \frac{3}{2}$ のときの $f(x)$ に.....5点
- ₃ 増減表に.....5点
- ₄ 最大値に.....5点
- ₅ 最小値に.....5点

[3] (1) 整数 x に対して, l^x は x の単調増加関数である. $1 < k^n$ なので, x を 0 から 1 ずつ増加していけば, k^n を超えない最大の x がただ 1 つある. それを $m-1$ とすればよい. (証終)

(2) 与えられた条件から, $a_{k^{n+1}} = a_{k^n} + a_k$ である.

そして

$$a_{k^2} = 2a_k, a_{k^3} = 3a_k, \dots, a_{k^n} = na_k$$

と推測できる.

(i) $n=1$ のとき, $a_{k^1} = a_k = 1a_k$ だから成り立つ.

(ii) $n=N$ のとき, 成り立つとすると

$$a_{k^{N+1}} = a_{k^N} + a_k = Na_k + a_k = (N+1)a_k$$

で成り立つ.

以上より 数学的帰納法により

$$a_{k^n} = na_k$$

が成り立つことが示された.

(1) の m をとれば, a_k は k に関して単調増加なので

$$a_{l^{m-1}} \leq a_{k^n} < a_{l^m} \quad \therefore (m-1)a_l \leq na_k < ma_l$$

ここで, $a_l \leq 0$ とすると, $a_{kl} \leq a_k$ となり矛盾するから $a_l > 0$.

よって

$$m-1 \leq \frac{na_k}{a_l} < m$$

また, (1) で 1 より大きい底 e の対数をとると, $(m-1)\log l \leq n \log k < m \log l$ であるから

$$m-1 \leq \frac{n \log k}{\log l} < m$$

よって

$$(m-1) - m < \frac{na_k}{a_l} - \frac{n \log k}{\log l} < m - (m-1)$$

つまり

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

が成り立つ.

(証終)

(3) (2) の結果は任意の n について成り立つので, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ より

$$\frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} = 0 \quad \therefore \frac{a_k}{\log k} = \frac{a_l}{\log l}$$

が成り立つ. k によらず一定なこの値を C とすると, $a_k = C \log k$ である.

$a_2 = a$ より

$$C = \frac{a}{\log 2} \quad \therefore a_k = a \frac{\log k}{\log 2} = a \log_2 k \quad (\text{答})$$

【配点の目安】

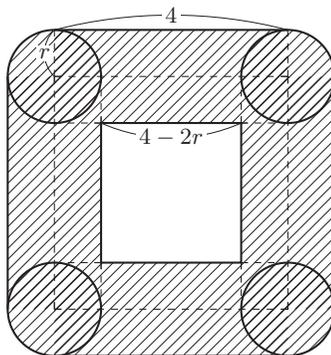
配点：25点

(1) 5点 (2) 12点 (3) 8点

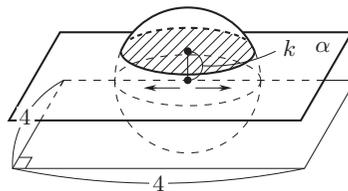
- (1) ₁ 証明できて……………5点
- (2) ₁ $a_{k^n} = na_k$ を示して……………4点
- ₂ $m-1 \leq \frac{na_k}{a_l} < m, m-1 \leq \frac{n \log k}{\log l} < m$ のどちらかを示して……………4点
- ₃ 証明を完成させて……………4点
- (3) ₁ $\frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} = 0$ を示して……………4点
- ₂ 答に……………4点

【4】(1) 円の通過する部分は下図の斜線部分になるので、求める面積 $S(r)$ は

$$\begin{aligned} S(r) &= \frac{1}{4}\pi r^2 \times 4 + \{4^2 - (4-2r)^2\} + 4r \times 4 \\ &= 32r - (4-\pi)r^2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(2) 辺の長さが 4 の正方形を含む平面からの距離が k の平面を α とする. α による半径 1 の球の切り口の円の半径を r とすると, この球が通過する部分の α による切り口の面積は (1) の $S(r)$ に等しい.



よって, $r = \sqrt{1-k^2}$ より

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^1 S(\sqrt{1-k^2}) dk \\ &= 2 \left\{ 32 \int_0^1 \sqrt{1-k^2} dk - (4-\pi) \int_0^1 (1-k^2) dk \right\} \end{aligned}$$

ここで, $\int_0^1 \sqrt{1-k^2} dk$ は半径 1 の円の $\frac{1}{4}$ の面積に等しいから

$$\int_0^1 \sqrt{1-k^2} dk = \frac{\pi}{4}$$

さらに

$$\int_0^1 (1-k^2) dk = \left[k - \frac{k^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

よって

$$V = 2 \left\{ 32 \cdot \frac{\pi}{4} - (4-\pi) \cdot \frac{2}{3} \right\} = \frac{4}{3}(13\pi - 4) \quad (\text{答})$$

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点 (2) 15 点

- (1) ₁ $\frac{1}{4}\pi r^2 \times 4 + \{4^2 - (4 - 2r)^2\} + 4r \times 4$ に 5 点
₂ 答に 5 点
- (2) ₁ $V = 2 \int_0^1 S(\sqrt{1 - k^2}) dk$ に 5 点
₂ 答に 10 点



会員番号	
------	--

氏名	
----	--