PJ

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前東大物理発展演習

【2回目】

問題

【1】

《解答》

(1) ひもでつるされたおもりは，慣性力により電車の加速度と逆向きに動く．これに対して，風船は車の加速度と同じ向きに動いたから．

(2) 部分 A の進行方向に垂直な断面積を $S\left(=\dfrac{\Delta V}{\Delta x}\right)$ とすると，部分 A の運動方程式は，

$$\rho_\mathrm{a} S \Delta x \cdot a = P_1 S - P_2 S \qquad \therefore \quad \Delta P = a\rho_\mathrm{a}\Delta x$$

(3) 水平方向は図 2 で右向きを正，鉛直方向は上向きを正とすると，車内で見たときの力のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = \rho_\mathrm{a} V a - T\sin\theta - \rho_\mathrm{h} V a \\ 0 = \rho_\mathrm{a} V g - T\cos\theta - \rho_\mathrm{h} V g \end{cases}$$

(4) (3) より，

$$\begin{cases} T\sin\theta = (\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h}) V a & \cdots ① \\ T\cos\theta = (\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{h}) V g & \cdots ② \end{cases}$$

$\rho_\mathrm{h} < \rho_\mathrm{a}$ なので，①の右辺は正であり，$\theta > 0$ と分かる．また，$\dfrac{①}{②}$ より，

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{g} \qquad \therefore \quad \tan\theta = \frac{a}{g}$$

(5) 物体が動く向きは浮力の水平成分と慣性力の大小関係で決まり，ρ_a より高密度の物体では慣性力の方が，低密度の物体では浮力の水平成分の方が大きいので，動き方が逆になる．

配点の目安

32 点

(1) 6 点

(2) 4 点

部分 A の受ける合力がわかって 2 点，運動方程式から結論を導いて 2 点

(3) 8 点

水平方向の力のつり合いの式に 4 点，鉛直方向の力のつり合いの式に 4 点

(4) 8 点

$\theta > 0$ であることを示して 4 点，$\tan\theta$ に 4 点

(5) 6 点

【2】

《解答》

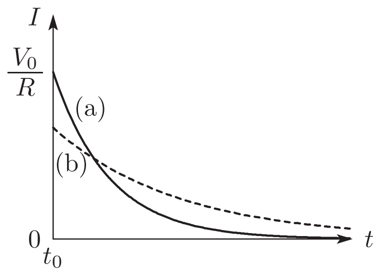
I (1) コンデンサー A の電荷が Q のとき，回路の方程式は，

$$V_0 = RI + \frac{Q}{C_{\rm A}} \qquad \therefore \quad I = \frac{V_0}{R} - \frac{1}{RC_{\rm A}}\cdot Q \quad \cdots (*)$$

充電が進んで Q が 0 から増加していくと I は $\frac{V_0}{R}$ から減少していく．また，$(*)$ を t で微分して，$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ であることをふまえると，

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC_{\rm A}}\cdot I$$

I が減少していくと I–t グラフの傾きの大きさも減少していき，I は 0 に収束する．よって，I–t グラフは下図 (a) となる．



(2) (1) で R を $R'(>R)$ で置き換えると，$t=t_0$ での I は小さくなるとともに傾き $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ の大きさは小さくなるので，I–t グラフは上図 (b) となる．

(3) 電気量の保存より，

$$Q_{\rm A} + Q_{\rm B} = C_{\rm A}V_0 + 0$$

回路の方程式は，

$$0 = \frac{Q_{\rm A}}{C_{\rm A}} - R\cdot 0 - \frac{Q_{\rm B}}{C_{\rm B}}$$

これらより，

$$Q_{\rm A} = \frac{{C_{\rm A}}^2V_0}{C_{\rm A}+C_{\rm B}}\ , \qquad Q_{\rm B} = \frac{C_{\rm A}C_{\rm B}V_0}{C_{\rm A}+C_{\rm B}}$$

(4) 電気量が移動する前後の全静電エネルギーをそれぞれ E_0，E_1 とすると，

$$E_0 = \frac{1}{2}C_{\rm A}{V_0}^2$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{{Q_{\rm A}}^2}{2C_{\rm A}} + \frac{{Q_{\rm B}}^2}{2C_{\rm B}} \\ &= \frac{1}{2C_{\rm A}}\cdot\frac{{C_{\rm A}}^4{V_0}^2}{(C_{\rm A}+C_{\rm B})^2} + \frac{1}{2C_{\rm B}}\cdot\frac{{C_{\rm A}}^2{C_{\rm B}}^2{V_0}^2}{(C_{\rm A}+C_{\rm B})^2} \\ &= \frac{C_{\rm A}}{C_{\rm A}+C_{\rm B}}\cdot\frac{1}{2}C_{\rm A}{V_0}^2 \end{aligned}$$

よって，ジュール熱として失われたエネルギーは，

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}C_\mathrm{A}{V_0}^2 - \frac{C_\mathrm{A}}{C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B}}\cdot\frac{1}{2}C_\mathrm{A}{V_0}^2 \\ &= \frac{C_\mathrm{A}C_\mathrm{B}{V_0}^2}{2(C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B})}\end{aligned}$$

II(1)　記号：(イ)

理由：時刻 t_0 の直後における回路の方程式は，

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -V_0 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{L} > 0$$

また，I は連続的に変化するので，時刻 t_0 での電流はスイッチ S_2 を閉じる前と等しく $I = 0$ であるから.

(2) 時刻 t_1 における回路の方程式は，

$$-L\cdot 0 = V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A} \qquad \therefore \quad V_\mathrm{A} = V_\mathrm{B}$$

電気量の保存より，

$$C_\mathrm{A}V_\mathrm{A} + C_\mathrm{B}V_\mathrm{B} = C_\mathrm{A}V_0 + 0$$

これらより，

$$V_\mathrm{A} = \frac{C_\mathrm{A}}{C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B}}V_0\ , \qquad V_\mathrm{B} = \frac{C_\mathrm{A}}{C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B}}V_0$$

(3) 時刻 t_1 において，コンデンサー A に蓄えられている静電エネルギーを U_A とすると，

$$U_\mathrm{A} = \frac{1}{2}C_\mathrm{A}{V_\mathrm{A}}^2 = \frac{C_\mathrm{A}}{2}\left(\frac{C_\mathrm{A}}{C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B}}V_0\right)^2$$

$$U_\mathrm{B} = \frac{1}{2}C_\mathrm{B}{V_\mathrm{B}}^2 = \frac{C_\mathrm{B}}{2}\left(\frac{C_\mathrm{A}}{C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B}}V_0\right)^2$$

回路のエネルギー保存より，

$$U_\mathrm{L} + U_\mathrm{A} + U_\mathrm{B} = \frac{1}{2}C_\mathrm{A}{V_0}^2 \qquad \therefore \quad U_\mathrm{L} = \frac{1}{2}C_\mathrm{A}{V_0}^2 - (U_\mathrm{A} + U_\mathrm{B})$$

これらより，

$$\begin{aligned}U_\mathrm{L} &= \frac{1}{2}C_\mathrm{A}{V_0}^2 - \frac{C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B}}{2}\cdot\frac{{C_\mathrm{A}}^2{V_0}^2}{(C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B})^2} \\ &= \frac{C_\mathrm{A}C_\mathrm{B}{V_0}^2}{2(C_\mathrm{A}+C_\mathrm{B})}\end{aligned}$$

(4) コンデンサー B の電気量が Q_F となったとき，コンデンサー A の電荷を q_F とすると，電気量の保存より，

$$q_\mathrm{F} + Q_\mathrm{F} = C_\mathrm{A}V_0 \qquad \therefore \quad q_\mathrm{F} = C_\mathrm{A}V_0 - Q_\mathrm{F}$$

回路のエネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}L\cdot 0^2 + \frac{{q_\mathrm{F}}^2}{2C_\mathrm{A}} + \frac{{Q_\mathrm{F}}^2}{2C_\mathrm{B}} = \frac{1}{2}C_\mathrm{A}{V_0}^2$$

これらより，q_{F} を消去すると，

$$\frac{(C_{\mathrm{A}}V_0 - Q_{\mathrm{F}})^2}{2C_{\mathrm{A}}} + \frac{{Q_{\mathrm{F}}}^2}{2C_{\mathrm{B}}} = \frac{1}{2}C_{\mathrm{A}}{V_0}^2 \qquad \therefore \quad Q_{\mathrm{F}} = \frac{2C_{\mathrm{A}}C_{\mathrm{B}}V_0}{C_{\mathrm{A}}+C_{\mathrm{B}}}$$

(5) コンデンサー A の静電エネルギーをすべてコンデンサー B に移せたとすると，

$$\frac{{Q_{\mathrm{F}}}^2}{2C_{\mathrm{B}}} = \frac{1}{2}C_{\mathrm{A}}{V_0}^2 \qquad \therefore \quad {Q_{\mathrm{F}}}^2 = C_{\mathrm{A}}C_{\mathrm{B}}{V_0}^2$$

これと II(4) より，

$$\left(\frac{2C_{\mathrm{A}}C_{\mathrm{B}}V_0}{C_{\mathrm{A}}+C_{\mathrm{B}}}\right)^2 = C_{\mathrm{A}}C_{\mathrm{B}}{V_0}^2 \qquad \therefore \quad C_{\mathrm{A}} = C_{\mathrm{B}}$$

配点の目安

36 点

I (1) 3 点

グラフの概形に 2 点，時刻 t_0 での電流の大きさに 1 点

(2) 3 点

各時刻でのグラフの傾きの大きさが (1) より小さいグラフを描いて 2 点，

時刻 t_0 での電流の大きさが (1) より小さくて 1 点

(3) 6 点

Q_{A} に 3 点，Q_{B} に 3 点

(4) 3 点

S_2 を閉じる前の静電エネルギーに 1 点，閉じた後の静電エネルギーに 1 点，答えに 1 点

II (1) 3 点

記号に 1 点，理由に 2 点

(2) 6 点

V_{A} に 3 点，V_{B} に 3 点

(3) 6 点

U_{B} に 2 点，

U_{A} に 2 点，U_{L} に 2 点

(4) 3 点

(5) 3 点

【3】

《解答》

(1) 状態 A での状態方程式より，気体の物質量 n は $n=\dfrac{p_0V_0}{RT_0}$ (R は気体定数) と表せる．これをふまえて，状態 B，C での状態方程式より，

$$\begin{cases} T_{\mathrm{B}}=\dfrac{2p_0\cdot 2V_0}{nR}=4T_0 \\ T_{\mathrm{C}}=\dfrac{p_0\cdot 4V_0}{nR}=4T_0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} W_{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}(p_0+2p_0)(2V_0-V_0)=\dfrac{3}{2}p_0V_0 \\ \varDelta U_{\mathrm{AB}}=\dfrac{3}{2}\cdot 2p_0\cdot 2V_0-\dfrac{3}{2}p_0V_0=\dfrac{9}{2}p_0V_0 \\ Q_{\mathrm{AB}}=\varDelta U_{\mathrm{AB}}+W_{\mathrm{AB}}=6p_0V_0 \end{cases}$$

(3) B → C の途中 (p，V) までの状態変化で気体が吸収した熱量 Q は，

$$\begin{aligned} Q&=\left(\frac{3}{2}pV-\frac{3}{2}\cdot 2p_0\cdot 2V_0\right)+\frac{1}{2}(2p_0+p)(V-2V_0) \\ &=2pV-pV_0+p_0V-8p_0V_0 \end{aligned}$$

また，B → C の状態変化における p と V の関係式は，

$$\frac{p-2p_0}{V-2V_0}=-\frac{p_0}{2V_0} \qquad \therefore \quad p=-\frac{p_0}{2V_0}V+3p_0$$

これらより，V の関数として Q を表すと，

$$Q=-\frac{p_0}{V_0}\left(V-\frac{15}{4}V_0\right)^2+\frac{49}{16}p_0V_0$$

$V_{\mathrm{X}}=\dfrac{15}{4}V_0$ までが吸熱過程で，この間の吸収熱量は $Q_{\mathrm{BX}}=\dfrac{49}{16}p_0V_0$ と分かる．

(4) $W=\dfrac{1}{2}\cdot p_0\cdot 3V_0=\dfrac{3}{2}p_0V_0$

(5) (2)〜(4) をふまえると，

$$e=\frac{W}{Q_{\mathrm{AB}}+Q_{\mathrm{BX}}}=\frac{24}{145}$$

配点の目安

32 点

(1) 4 点

B の絶対温度に 2 点，C の絶対温度に 2 点

(2) 12 点

W_{AB} に 4 点，$\varDelta U_{\mathrm{AB}}$ に 4 点，Q_{AB} に 4 点

(3) 8 点

直線 BC の方程式に 2 点，吸熱量を V の関数で表して 2 点，V_{X} に 2 点，Q_{BX} に 2 点

(4) 4 点

(5) 4 点

$e = \dfrac{W}{Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{BX}}}$ に 2 点，答えに 2 点

PJ

直前東大物理発展演習

【2回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	