PJ

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前東大物理発展演習

【3回目】

問題

【1】

《解答》

(1) $\dfrac{1}{2}m{V_\mathrm{A}}^2+\dfrac{1}{2}m{V_\mathrm{B}}^2+\dfrac{1}{2}k{L_0}^2$

(2) A の速度が V の瞬間の，B の速度を $V_\mathrm{B}{}'$，ばねの伸びを L として，運動量の保存とエネルギーの保存より，

$$\begin{cases} mV+mV_\mathrm{B}{}'=mV_\mathrm{A}+mV_\mathrm{B} \\ \dfrac{1}{2}mV^2+\dfrac{1}{2}mV_\mathrm{B}{}'^2+\dfrac{1}{2}kL^2=\dfrac{1}{2}m{V_\mathrm{A}}^2+\dfrac{1}{2}m{V_\mathrm{B}}^2+\dfrac{1}{2}k{L_0}^2 \end{cases}$$

これらより $V_\mathrm{B}{}'$ を消去すると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kL^2&=\left(\frac{1}{2}m{V_\mathrm{A}}^2+\frac{1}{2}m{V_\mathrm{B}}^2+\frac{1}{2}k{L_0}^2\right)-\left\{\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}m(V_\mathrm{A}+V_\mathrm{B}-V)^2\right\} \\ &=\frac{1}{2}k{L_0}^2-m(V-V_\mathrm{A})(V-V_\mathrm{B}) \end{aligned}$$

(3) (2) の弾性力による位置エネルギーは $V=\dfrac{V_\mathrm{A}+V_\mathrm{B}}{2}$ のときに最大となるので，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k{L_\mathrm{max}}^2&=\frac{1}{2}k{L_0}^2-m\cdot\frac{V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A}}{2}\cdot\frac{V_\mathrm{A}-V_\mathrm{B}}{2} \\ \therefore\quad L_\mathrm{max}&=\sqrt{{L_0}^2+\frac{m(V_\mathrm{A}-V_\mathrm{B})^2}{2k}} \end{aligned}$$

(4) (2) の弾性力による位置エネルギーが 0 となるとき，V は最大および最小となるので，

$$\frac{1}{2}k{L_0}^2-m(V-V_\mathrm{A})(V-V_\mathrm{B})=0$$

$$\therefore\quad \begin{cases} V_\mathrm{max}=\dfrac{V_\mathrm{A}+V_\mathrm{B}}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{V_\mathrm{A}-V_\mathrm{B}}{2}\right)^2+\dfrac{k{L_0}^2}{2m}} \\ V_\mathrm{min}=\dfrac{V_\mathrm{A}+V_\mathrm{B}}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{V_\mathrm{A}-V_\mathrm{B}}{2}\right)^2+\dfrac{k{L_0}^2}{2m}} \end{cases}$$

(5) $V_\mathrm{min}>0$ より，

$$\frac{V_\mathrm{A}+V_\mathrm{B}}{2}>\sqrt{\left(\frac{V_\mathrm{A}-V_\mathrm{B}}{2}\right)^2+\frac{k{L_0}^2}{2m}}\qquad\therefore\quad mV_\mathrm{A}V_\mathrm{B}>\frac{1}{2}k{L_0}^2$$

(6) A，B 全体の重心から見ると，A と B が静止した瞬間に宇宙船が右側から A に衝突して運動エネルギーを与えたことになる．このため，宇宙船が A を捕捉した後の伸びの最大値は L_max より大きくなる．

(7) 捕捉後に作用する弾性力が 0 となることが必要なので，ばねが自然長の瞬間に限定される．さらに，宇宙船に捕捉されることで A の速度は減少するので，A の速度が最大で B の速度が最小の瞬間に捕捉しなければならない．

(8) (4) で求めた $V_{\max}$，$V_{\min}$ はそれぞれ，B の速度 $V_{\mathrm{B}}{}'$ の最大値，最小値でもある．また，$V = V_{\max}$ の瞬間，$V_{\mathrm{B}}{}' = V_{\min}$ である．

(7) より，静止していた宇宙船が速度 $V_{\max}$ の A を捕捉した後の S (と A) の速度が B の速度 $V_{\min}$ と一致するとき，S と A からなる系について，運動量の保存より，

$$(M+m)V_{\min} = mV_{\max} \qquad \therefore \quad M = \frac{2\sqrt{(V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{B}})^2+\dfrac{2k{L_0}^2}{m}}}{V_{\mathrm{A}}+V_{\mathrm{B}}-\sqrt{(V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{B}})^2+\dfrac{2k{L_0}^2}{m}}}m$$

配点の目安

34 点

(1) 3 点

(2) 5 点

運動量保存に 2 点，力学的エネルギー保存に 2 点，答えに 1 点

(3) 5 点

$V = \dfrac{V_{\mathrm{A}}+V_{\mathrm{B}}}{2}$ のときに最大となることがわかって 3 点，答えに 2 点

(4) 5 点

$L = 0$ のときに最大値をとることがわかって 3 点，答えに 2 点

(5) 5 点

$V_{\min} > 0$ を考えて 3 点，答えに 2 点

(6) 3 点

(7) 3 点

(8) 5 点

【2】

《解答》

(1) X から Y

(2) (a) 回路の方程式は,

$$vB\ell = \frac{Q}{C} \qquad \therefore \quad Q = CvB\ell$$

(b) (a) より,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = CB\ell\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \therefore \quad I' = CB\ell a$$

(3) 回路の方程式は,

$$vB\ell + \left(-L\frac{\Delta I}{\Delta t}\right) = 0 \cdot I \qquad \therefore \quad B\ell\frac{\Delta x}{\Delta t} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Δt を乗じると,

$$B\ell\Delta x = L\Delta I \qquad \therefore \quad \frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{B\ell}{L}$$

初期条件を加味すると,

$$\frac{I-0}{x-0} = \frac{B\ell}{L} \qquad \therefore \quad I = \frac{B\ell}{L}x$$

(4) $Ma = Mg - (I' + I)B\ell$

(5) (2)〜(4) より,

$$Ma = Mg - \left(CB\ell a + \frac{B\ell}{L}x\right)B\ell \qquad \therefore \quad a = -\frac{B^2\ell^2}{L(M + CB^2\ell^2)}\left(x - \frac{MgL}{B^2\ell^2}\right)$$

運動は単振動と分かり,

$$\omega = \frac{B\ell}{\sqrt{L(M + CB^2\ell^2)}}\ , \qquad x_0 = \frac{MgL}{B^2\ell^2}$$

(6) 初期条件を満たす解は,

$$x(t) = x_0 - x_0\cos(\omega t) \qquad \therefore \quad 0 \leqq x(t) \leqq 2x_0$$

これと (3) より,

$$\begin{cases} I_{\max} = \dfrac{B\ell}{L} \cdot 2x_0 = \dfrac{2Mg}{B\ell} \\ I_{\min} = \dfrac{B\ell}{L} \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

配点の目安

32 点

(1) 2 点

(2) (a) 3 点

(b) 3 点

(3) 6 点

回路の方程式に 3 点，答えに 3 点

(4) 4 点

「$Ma = Mg + (I' + I)B\ell$」は，3 点

(5) 6 点

ω に 3 点，x_0 に 3 点

(6) 8 点

x のとり得る範囲に 4 点，I の最小値に 2 点，最大値に 2 点

【3】

《解答》

(1) $y = \dfrac{w}{2}\tan\theta + L\tan\theta'$

(2) 超音波の波長を D とすると，

$$V = fD \qquad \therefore \quad D = \frac{V}{f}$$

超音波によって回折した光波が強め合う条件は，

$$D\sin\theta = \lambda \times \text{整数}\, m$$

ここで注目するのは $m=1$ の回折光なので，

$$\frac{V}{f}\sin\theta = \lambda \times 1 \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{V}{f}\sin\theta$$

(3) $n\sin\theta = 1\cdot\sin\theta'$

(4) 与えられた近似式と (1) より，

$$y \fallingdotseq \frac{w}{2}\sin\theta + L\sin\theta'$$

これと (3) より，

$$y = \frac{w}{2}\sin\theta + L\cdot n\sin\theta \qquad \therefore \quad \sin\theta = \frac{2y}{w+2Ln} \quad \cdots ①$$

また，λ' を用いて (2) を書き換えると，

$$\frac{\lambda'}{n} = \frac{V}{f}\sin\theta \qquad \therefore \quad V = \frac{f\lambda'}{n\sin\theta} \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$V = \frac{w+2Ln}{2y}\cdot\frac{f\lambda'}{n}$$

(5) 波長 λ_0 の光波の周期を T_0 とすると，

$$\lambda_0 = cT_0 \qquad \therefore \quad T_0 = \frac{\lambda_0}{c}$$

P' に届く光は P に届く光よりも時間 T_0 だけ遅れて O から出されたことに注意して，光が P と P' に届く時刻の差を求めることにより，

$$\begin{aligned} T &= \left(T_0 + \frac{\overline{\mathrm{OP}'}}{c}\right) - \frac{\overline{\mathrm{OP}}}{c} \\ &= \frac{\lambda_0}{c} + \frac{\overline{\mathrm{OP}'} - \overline{\mathrm{OP}}}{c} \\ &= \frac{\lambda_0 + d}{c} \end{aligned}$$

(6) P' から Q に届く光は P から Q に届く光よりも時間 T だけ遅れて反射されたことに注意して，光が Q に届く時刻の差を求めると，

$$
\begin{aligned}
t_2 - t_1 &= \left(T + \frac{\overline{\mathrm{P'Q}}}{c} \right) - \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{c} \\
&= T + \frac{\overline{\mathrm{P'Q}} - \overline{\mathrm{PQ}}}{c} \\
&\fallingdotseq T + \frac{VT\cos\beta}{c} \\
&= \frac{c + V\cos\beta}{c} T
\end{aligned}
$$

(7) (5) より，

$$
T \fallingdotseq \frac{\lambda_0 + VT\cos\alpha}{c} \qquad \therefore \quad T = \frac{\lambda_0}{c - V\cos\alpha}
$$

これと (6) より，

$$
t_2 - t_1 = \frac{c + V\cos\beta}{c} \cdot \frac{\lambda_0}{c - V\cos\alpha}
$$

これが波長 λ_1 の光波の周期なので，

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= c(t_2 - t_1) \\
&= \frac{c + V\cos\beta}{c - V\cos\alpha} \lambda_0
\end{aligned}
$$

配点の目安

34 点

(1) 4 点

(2) 4 点

超音波の波長に 2 点，答えに 2 点

(3) 3 点

(4) 6 点

(1) と (3) から $\sin\theta$ を w，L，n，y で表して 2 点，

(2) から V を f，λ'，n，$\sin\theta$ で表して 2 点，

答えに 2 点

(5) 6 点

光波の周期に 2 点，$T = [\text{光波の周期}] + \dfrac{d}{c}$ に 2 点，答えに 2 点

(6) 5 点

$t_2 - t_1 = T + \dfrac{\overline{\mathrm{P'Q}} - \overline{\mathrm{PQ}}}{c}$ に 3 点，答えに 2 点

(7) 6 点

PJ

直前東大物理発展演習

【3回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	