MJA

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前東大理系数学発展演習

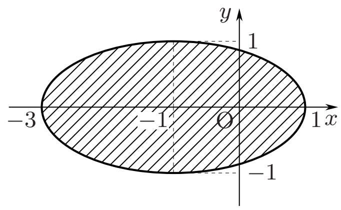
【2回目】

問題

【1】(1) $a=2$, $b=1$ のとき，領域 D を表す不等式は

$$\frac{(x+1)^2}{2^2}+y^2 \leqq 1$$

となる．よって，D は中心が $(-1,\ 0)$，長軸の長さが $2\times 2=4$，短軸の長さが $2\times 1=2$ の楕円の周および内部を表す．したがって，図示すると下図の斜線部分(境界は含む)となる．



(2) 領域 D の周上の点がすべて E に含まれればよい．

周上の点 $(x,\ y)$ に対して

$$x=1-a+a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$$

とおけるので，すべての実数 θ について，この点が $E: x^2+y^2 \leqq 1$ をみたせばよい．

代入して

$$(1-a+a\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2 \leqq 1$$

$$\therefore\quad (a^2-b^2)\cos^2\theta+2a(1-a)\cos\theta+a^2-2a+b^2 \leqq 0$$

となるから，$t=\cos\theta$ とおき

$$f(t)=(a^2-b^2)t^2+2a(1-a)t+a^2-2a+b^2$$

とすれば，求める条件は $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲でつねに $f(t) \leqq 0$ となる条件となる．

(i) $a^2-b^2 \geqq 0$ つまり $(0<)\ b \leqq a$ のとき

$s=f(t)$ のグラフは下に凸または直線となるから，求める条件は

$$f(-1) \leqq 0 \text{ かつ } f(1) \leqq 0$$

である．ここで

$$f(1)=(a^2-b^2)+2a(1-a)+a^2-2a+b^2=0$$

$$f(-1)=(a^2-b^2)-2a(1-a)+a^2-2a+b^2=-4a(1-a) \leqq 0$$

より，$a>0$ に注意すると

$$0<a \leqq 1$$

(ii) $a^2-b^2<0$ つまり $b>a\ (>0)$ のとき

$f(1)=0$ だから $f(t)$ は $-1 \leqq t \leqq 1$ において単調増加でなければならない．したがって，軸の位置は $t \geqq 1$ である．

$s=f(t)$ の対称軸を考えて

$$-\frac{a(1-a)}{a^2-b^2} \geqq 1$$

$$\iff -a(1-a) \leqq a^2-b^2 \quad (\because a^2-b^2<0)$$

$$\iff b^2 \leqq a$$

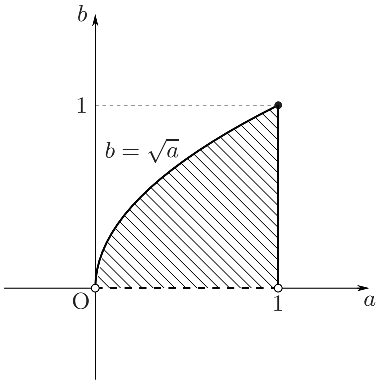
より，$b>0$ に注意すると

$$0<b \leqq \sqrt{a}$$

よって，(i)，(ii) から

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a \leqq 1} & \boldsymbol{(0<b \leqq a)} \\ \boldsymbol{0<b \leqq \sqrt{a}} & \boldsymbol{(0<a<b)} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

で，これを図示すると，下図の斜線部分（境界は a 軸上以外は含み，a 軸上の点は含まない）である．



■ 別解

次のように，y を消去して考えることもできる．

領域 D の周上の点がすべて E に含まれればよいので，$\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}\{x-(1-a)\}^2$$

これを $x^2+y^2 \leqq 1$ に代入して

$$x^2+\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}\{x-(1-a)\}^2\right] \leqq 1$$

$$\therefore \quad a^2(x^2-1)-b^2(x-1)(x-1+2a) \leqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，D において x の取り得る値の範囲は

$$-a \leqq x-(1-a) \leqq a \qquad \therefore \quad 1-2a \leqq x \leqq 1$$

となるから，この範囲で①が成り立つ条件を求めればよい．

$1-2a \leqq x \leqq 1$ より，$x-1 \leqq 0$ であるから，①は

$$a^2(x+1)-b^2(x-1+2a) \geqq 0$$

となる．この左辺を $g(x)$ とおけば，$g(x)$ は 1 次関数であるから，$g(1-2a) \geqq 0$ かつ $g(1) \geqq 0$ であればよい．

$$g(1-2a) = a^2(2-2a) = 2a^2(1-a) \geqq 0 \qquad \therefore \quad a \leqq 1$$
$$g(1) = 2a^2 - 2ab^2 = 2a(a-b^2) \geqq 0 \qquad \therefore \quad a \geqq b^2 \ (\because a > 0)$$

これと a，b が正であることから

$$0 < a \leqq 1,\ b > 0,\ a \geqq b^2$$

であり，これを図示すると先の図を得る．

【配点の目安】

配点：25 点

（1）5 点　　（2）20 点

（1）□$_1$ 正しく図示できて……………………5 点

（2）□$_1$ $0 < a \leqq 1$ $(0 < b \leqq a)$ に……………………5 点

□$_2$ $0 < b \leqq \sqrt{a}$ $(0 < a < b)$ に……………………5 点

□$_3$ 図示に……………………10 点

$\boxed{\text{別解}}$

（2）■$_1$ $1-2a \leqq x \leqq 1$ で①が成り立つ条件を求めればよいことがわかって…5 点

■$_2$ $g(1-2a) \geqq 0$ かつ $g(1) \geqq 0$ であればよいことがわかって…………5 点

■$_3$ 図示に……………………10 点

【2】集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n\}$ を E_n と表す．まず，$n=3$ として，

$$E_3=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}$$

について，実験してみる．E_3 を分割して

$$A_3=\{1,\ 4,\ 6,\ 7\},\ B_3=\{2,\ 3,\ 5,\ 8\}$$

とすると

$$\begin{aligned}
&f(1)+f(4)+f(6)+f(7)\\
=&a\left(1^2+4^2+6^2+7^2\right)+b(1+4+6+7)+4c\\
=&102a+18b+4c\\
&f(2)+f(3)+f(5)+f(8)\\
=&a\left(2^2+3^2+5^2+8^2\right)+b(2+3+5+8)+4c\\
=&102a+18b+4c
\end{aligned}$$

が成り立つ．

この実験から，題意の成立には，それぞれの集合の要素の総和，および 2 乗の総和が等しければ十分であることが解る．

そこで，集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\}$ に対して，$\displaystyle\sum_{x\in A}$ で，集合 A のすべての要素についての和を表すとして

- 関数値の和 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_k)$ を $\displaystyle\sum_{x\in A}f(x)$ で，
- 2 乗の和 $\displaystyle\sum_{x\in A}x^2={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2$ を $Q(A)$ で，
- 1 次の和 $\displaystyle\sum_{x\in A}x=a_1+a_2+\cdots+a_k$ を $L(A)$ で

表すことにすると，与えられた関数 $f(x)$ について，集合 A の要素の個数を n とすれば

$$\sum_{x\in A}f(x)=aQ(A)+bL(A)+cn$$

であるから，2 つの集合 A と B について，要素の個数をともに n とすれば，

$$[Q(A)=Q(B)\wedge L(A)=L(B)]\Longrightarrow\sum_{x\in A}f(x)=\sum_{x\in B}f(x)$$

が成り立つ（$\wedge$ は「かつ」を表す）．

そこで，要素の個数が 2^n である集合 E_n を，それぞれ $\dfrac{2^n}{2}=2^{n-1}$ 個の要素をもつ 2 つの集合 A_n と B_n とに分割して，

$$Q(A_n)=Q(B_n),\ L(A_n)=L(B_n)$$

とできることを，n に関する数学的帰納法により示す．ただし，$n\geqq 3$ とする．

(Ⅰ) $n=3$ のときは，上の実験の通り，

$$A_3=\{1,\ 4,\ 6,\ 7\},\ B_3=\{2,\ 3,\ 5,\ 8\}$$

とすれば，

$$L(A_3)=L(B_3),\ Q(A_3)=Q(B_3)$$

より成立.

(II) $k \geqq 3$ なる正整数 k について，$n=k$ のとき成立を仮定する.

集合 $E_k = \left\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2^k\right\}$ について，E_k を同じ要素を含まず，かつ要素の個数が等しい 2 つの集合 A_k と B_k に分割して，

$$L(A_k) = L(B_k),\ Q(A_k) = Q(B_k)$$

とすることができる.

このとき，集合 A_k と B_k の要素の個数は，いずれも $\dfrac{2^k}{2} = 2^{k-1}$ である．この値を l と置き，

$$A_k = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_l\},\ A_k = \{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_l\}$$

とする.

$n = k+1$ のとき，

$$A_{k+1} = A_k \cup \{2l + a_1,\ 2l + a_2,\ \cdots,\ 2l + a_l\},$$
$$B_{k+1} = B_k \cup \{2l + b_1,\ 2l + b_2,\ \cdots,\ 2l + b_l\}$$

として，集合 A_{k+1}，B_{k+1} を定めれば，この 2 つの集合は同じ要素を含まず，また，1 次の和 L，2 次の和 Q が等しいことが次のように示される：

$$L(A_{k+1}) = L(A_k) + l \cdot 2l + L(A_k) = 2L(A_k) + 2l^2$$
$$L(B_{k+1}) = L(B_k) + l \cdot 2l + L(B_k) = 2L(B_k) + 2l^2$$
$$\therefore\quad L(A_{k+1}) = L(B_{k+1})\ (\because \text{仮定より})$$
$$\begin{aligned} Q(A_{k+1}) &= Q(A_k) + l \cdot (2l)^2 + 2 \cdot 2l \cdot L(A_k) + Q(A_k) \\ &= 2Q(A_k) + 4l^3 + 4lL(A_k) \\ Q(B_{k+1}) &= Q(B_k) + l \cdot (2l)^2 + 2 \cdot 2l \cdot L(B_k) + Q(B_k) \\ &= 2Q(B_k) + 4l^3 + 4lL(B_k) \end{aligned}$$
$$\therefore\quad Q(A_{k+1}) = Q(B_{k+1})\ (\because \text{仮定より})$$

従って

$$\sum_{x \in A_{k+1}} f(x) = \sum_{x \in B_{k+1}} f(x)$$

が成り立つ.

以上 (I)，(II) より，題意が成立することが示された. （証終）

【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ 「$Q(A)=Q(B)$ かつ $L(A)=L(B) \Rightarrow \sum_{x\in A} f(x)=\sum_{x\in B} f(x)$」と同等の内容を述べて ……………… 10 点

$\square_2$ 数学的帰納法 (I) の部分に ……………… 5 点

$\square_3$ 数学的帰納法 (II) の部分に ……………… 10 点

【3】(1) 放物線を回転してできる曲面上の点 $(x,\ y,\ z)$ と，z 軸上の点 $(0,\ 0,\ z)$ との距離は $\sqrt{x^2+y^2}$ であるから，曲面上の点 $(x,\ y,\ z)$ のみたす関係式，すなわち曲面の方程式は

$$z=(\sqrt{x^2+y^2})^2=x^2+y^2$$

この曲面と平面 $z=y$ で囲まれた立体の表面および内部の点は

$$D:x^2+y^2 \leqq z \leqq y$$

をみたす．このとき

$$y^2 \leqq x^2+y^2 \leqq z \leqq y$$

により

$$0 \leqq y \leqq 1$$

である．

よって，平面 $y=t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ で D を切ると，切り口は $y=t$ 上の領域

$$x^2+t^2 \leqq z \leqq t$$

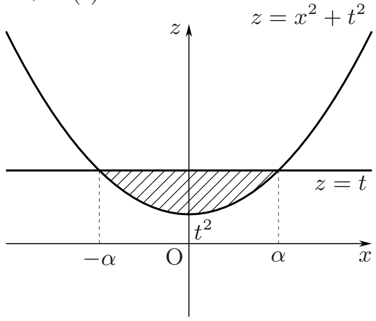
となる．ここで，$x^2+t^2 \leqq t$ より，$\alpha=\sqrt{t-t^2}$ として

$$-\alpha \leqq x \leqq \alpha$$

である．

したがって，切り口は右図のようになるので，$S(t)$ は

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_{-\alpha}^{\alpha}\{t-(x^2+t^2)\}\,dx\\&=-\int_{-\alpha}^{\alpha}(x+\alpha)(x-\alpha)\,dx\\&=\frac{1}{6}\{\alpha-(-\alpha)\}^3=\frac{4}{3}\alpha^3\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$



(2) (1) より，$t=\sin^2\theta$ とおくと D の体積は

$$\begin{aligned}\int_0^1 S(t)\,dt&=\frac{4}{3}\int_0^1(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}\,dt\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^3\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 2\theta}{8}\,d\theta\\&=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 2\theta\,d\theta\\&=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)^2\,d\theta\\&=\frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos 4\theta+\cos^2 4\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 4\theta + \frac{1+\cos 8\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{2}\theta - 2\cdot\frac{\sin 4\theta}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 8\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\frac{3}{4}\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{32}} \quad \text{(答)}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）13 点　　（2）12 点

（1）□$_1$ $D: x^2 + y^2 \leqq z \leqq y$ に …… 3 点

□$_2$ $S(t) = \displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{t - (x^2 + t^2)\right\} dx$ に …… 5 点

□$_3$ 答に …… 5 点

（2）□$_1$ 置き換えなどの方針に …… 2 点

□$_2$ θ の積分の式が正しくできて …… 5 点

□$_3$ 答に …… 5 点

【4】(1) $a_i\overrightarrow{f_i}=(x_i,\ y_i)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n}=\sum_{i=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}}=\sum_{i=0}^{n-1}(x_i,\ y_i)$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{n-1}x_i,\ \sum_{i=0}^{n-1}y_i\right)$$

となる．ここで，$\mathrm{A}_0=\mathrm{A}_n$ で G が凸多角形となるとき

$$\sum_{i=0}^{n-1}x_i=\sum_{i=0}^{n-1}y_i=0$$

である．

ところで

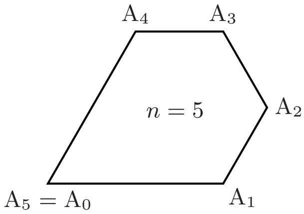
$$y_0+y_1+y_2+y_3=a_0\cdot 0+a_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+a_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+a_3\cdot 0>0$$

であるから，$\sum_{i=0}^{n-1}y_i=0$ が成り立つのは $n\geqq 5$ のときである．

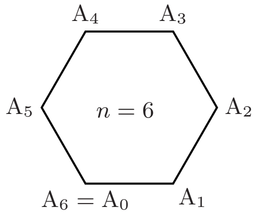
$n=5,\ 6,\ 7$ のとき，例えば

$\mathrm{G}(2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2),\ \mathrm{G}(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1),\ \mathrm{G}(1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$

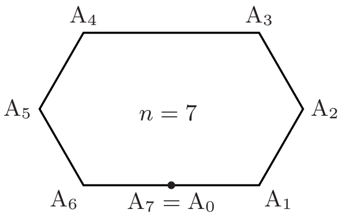
とすれば，下図のようになるので，凸多角形が存在する．



$G=(2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2)$



$G=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$



$G=(1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$

$n\geqq 8$ で，$\mathrm{A}_0=\mathrm{A}_n$ とすると

$$\overrightarrow{f_1}\,/\!/\,(-\overrightarrow{f_4})\,/\!/\,\overrightarrow{f_7}$$

であるから，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5$，$\mathrm{A}_7\mathrm{A}_8$ は平行な辺となり，多角形は凸でない．

したがって，凸多角形となるのは $n=5,\ 6,\ 7$ の場合に限る．　（証終）

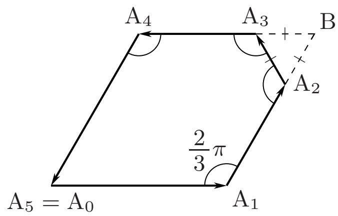
(2) X_j $(1 \leqq j \leqq 5)$ について，右図で

$$\mathrm{A_0A_1 = BA_4},\ \mathrm{A_1B = A_4A_0}$$

により，五角形の条件は

$$X_1 = X_3 + X_4,\ X_2 + X_3 = X_5$$

である．



$\mathrm{X_3} = 1$ のとき

$$X_1 = 1 + X_4,\ X_2 + 1 = X_5$$

であるから，X_1，X_4 の組合せは 5 通り，X_2，X_5 の組合せは 5 通りとなり，X_1，X_2，X_4，X_5 の組合せは 25 通りとなる．

同様にして，$X_3 = 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，X_1，X_2，X_4，X_5 の組合せはそれぞれ，4^2 通り，3^2 通り，2^2 通り，1 通りとなる．

さらに，$X_3 = 6$ のとき，$X_1 = X_3 + X_4$，$X_2 + X_3 = X_5$ をみたさないので，五角形になる確率は

$$\frac{25+16+9+4+1}{6^5} = \boldsymbol{\frac{55}{6^5}}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 15 点　　(2) 10 点

(1) $\square_1$ $n \geqq 5$ の必要性を示して……………………………………5 点

$\square_2$ $n = 5,\ 6,\ 7$ のときの具体例を示して……………………………5 点

$\square_3$ $n \geqq 8$ のとき凸多角形とならないことを示して…………………5 点

(2) $\square_1$ $X_1 = X_3 + X_4,\ X_2 + X_3 = X_5$ に……………………………5 点

$\square_2$ 答に……………………………………………………………5 点

MJA

直前東大理系数学発展演習

【2回目】

Z-KAI

会員番号		氏　名	