PJ

直前講習

解答

Ｚ会東大進学教室

直前東大物理発展演習

【1回目】

問題

【1】

《解答》

(1) 鉛直方向の力のつり合いと重心のまわりの力のモーメントのつり合いより，

$$\begin{cases} 0 = N_{\mathrm{A}} + N_{\mathrm{B}} - mg \\ 0 = N_{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}} - N_{\mathrm{B}} L_{\mathrm{B}} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} N_{\mathrm{A}} = \dfrac{L_{\mathrm{B}}}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}} mg \\ N_{\mathrm{B}} = \dfrac{L_{\mathrm{A}}}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}} mg \end{cases}$$

(2) 自転車から見ると，左向きに ma の慣性力が作用することをふまえて，力のつり合いと力のモーメントのつり合いより，

$$\begin{cases} 0 = f_{\mathrm{B}} - ma \\ 0 = N_{\mathrm{A}} + N_{\mathrm{B}} - mg \\ 0 = f_{\mathrm{B}} H + N_{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}} - N_{\mathrm{B}} L_{\mathrm{B}} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} N_{\mathrm{A}} = \dfrac{m}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}} (g L_{\mathrm{B}} - aH) \\ N_{\mathrm{B}} = \dfrac{m}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}} (g L_{\mathrm{A}} + aH) \end{cases}$$

前輪が浮き上がらないでいる限界のとき $N_{\mathrm{A}} = 0$ なので，

$$\frac{m}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}} (g L_{\mathrm{B}} - a_1 H) = 0 \qquad \therefore \quad a_1 = \frac{L_{\mathrm{B}}}{H} g$$

(3) 後輪が滑らないでいる限界のとき $f_{\mathrm{B}} = \mu N_{\mathrm{B}}$ なので，

$$m a_2 = \mu \cdot \frac{m}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}} (g L_{\mathrm{A}} + a_2 H) \qquad \therefore \quad a_2 = \frac{\mu L_{\mathrm{A}}}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}} - \mu H} g$$

(4) (2) で a を $-a$ で置き換えることにより，

$$\begin{cases} N_{\mathrm{A}} = \dfrac{m}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}} (g L_{\mathrm{B}} + aH) \\ N_{\mathrm{B}} = \dfrac{m}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}} (g L_{\mathrm{A}} - aH) \end{cases}$$

後輪が浮き上がらないでいる限界のとき，$N_{\mathrm{B}} = 0$ なので，

$$\frac{m}{L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}} (g L_{\mathrm{A}} - aH) = 0 \qquad \therefore \quad a = \frac{L_{\mathrm{A}}}{H} g$$

両輪が滑らないでいる限界のとき，運動方程式は，

$$\begin{cases} m \cdot (-a) = -\mu N_{\mathrm{A}} - \mu N_{\mathrm{B}} \\ m \cdot 0 = N_{\mathrm{A}} + N_{\mathrm{B}} - mg \end{cases} \qquad \therefore \quad a = \mu g$$

これらの加速度のうち，小さい方が a_3 となるので，

$$\begin{cases} \mu < \dfrac{L_{\mathrm{A}}}{H} \text{ の場合} & \cdots \quad a_3 = \mu g \\ \mu \geqq \dfrac{L_{\mathrm{A}}}{H} \text{ の場合} & \cdots \quad a_3 = \dfrac{L_{\mathrm{A}}}{H} g \end{cases}$$

(5) $36\,\mathrm{km/h} = 10\,\mathrm{m/s}$ である．比熱の定義より，

$$\frac{1}{2} \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot (10\,\mathrm{m/s})^2 = 0.20\,\mathrm{kg} \cdot (0.50 \times 10^3\,\mathrm{J/kg \cdot K}) \cdot \mathit{\Delta} T$$
$$\therefore \quad \mathit{\Delta} T = 25\,\mathrm{K}$$

配点の目安

34 点

(1) 6 点

N_A に 3 点，N_B に 3 点

(2) 13 点

N_A に 4 点，N_B に 4 点，a_1 に 5 点

(3) 3 点

$f_\mathrm{B} = \mu N_\mathrm{B}$ がわかって 1 点，答えに 2 点

(4) 10 点

後輪が浮き上がらない限界のとき $a = \dfrac{L_\mathrm{A}}{H} g$ であることがわかって 2 点，

両輪が滑らない限界のとき $a = \mu g$ であることがわかって 2 点，

$\mu < \dfrac{L_\mathrm{A}}{H}$ のときの a_3 に 3 点，$\mu \geqq \dfrac{L_\mathrm{A}}{H}$ のときの a_3 に 3 点

(5) 2 点

【2】

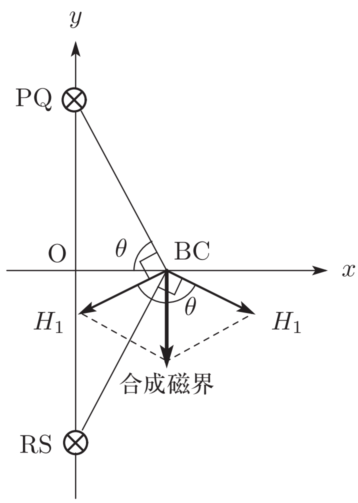
《解答》

(1) 辺 BC 上の点から導線 PQ, RS までの距離は $\sqrt{a^2+x^2}$ なので，導線 PQ，RS に流れる電流それぞれが辺 BC 上に作る磁界の大きさ H_1 は，

$$H_1 = \frac{I}{2\pi\sqrt{a^2+x^2}}$$

また，右図の角 θ について，

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \end{cases}$$



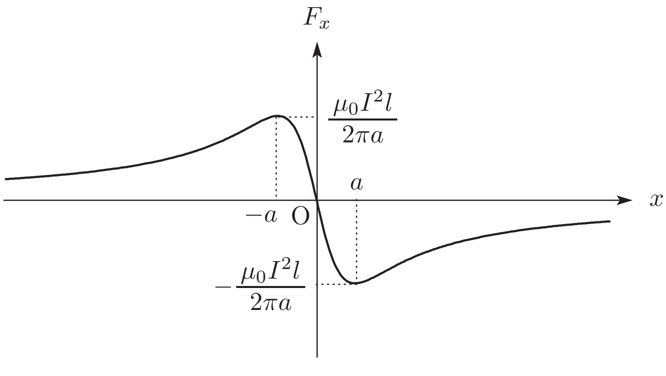
よって，辺 BC 上の合成磁界 (H_x，H_y，H_z) は，

$$\begin{cases} H_x = H_1\sin\theta - H_1\sin\theta = 0 \\ H_y = -H_1\cos\theta\times 2 = -\dfrac{Ix}{\pi(a^2+x^2)} \\ H_z = 0 \end{cases}$$

(2) 辺 BC に流れる電流の向きは B→C の向きなので，(1) の合成磁界から受ける力 (F_x，F_y，F_z) は，

$$\begin{cases} F_x = -I\cdot\dfrac{\mu_0 Ix}{\pi(a^2+x^2)}\cdot l = -\dfrac{\mu_0 I^2 lx}{\pi(a^2+x^2)} \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

F_x と x の関係を表すグラフは下図のようになる．



(3) 辺 DA 上の合成磁界 $(H_x,\ H_y,\ H_z)$ は，(1) の x を $x+l$ で置き換えて得られ，

$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = -\dfrac{I(x+l)}{\pi\{a^2+(x+l)^2\}} \\ H_z = 0 \end{cases}$$

辺 DA に流れる電流の向きは D→A の向きなので，上記の合成磁界から受ける力 $(F_x,\ F_y,\ F_z)$ は，

$$\begin{cases} F_x = +I \cdot \dfrac{\mu_0 I(x+l)}{\pi\{a^2+(x+l)^2\}} \cdot l = \dfrac{\mu_0 I^2 l(x+l)}{\pi\{a^2+(x+l)^2\}} \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

(4) (2)，(3) より，コイルが受ける合力の x 成分 F_x は，

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\mu_0 I^2 l x}{\pi(a^2+x^2)} + \frac{\mu_0 I^2 l(x+l)}{\pi\{a^2+(x+l)^2\}} \\ &= \frac{\mu_0 I^2 l^2}{\pi(a^2+x^2)\{a^2+(x+l)^2\}} \cdot (-x^2 - lx + a^2) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

コイルが受ける合力が 0 になる位置では，

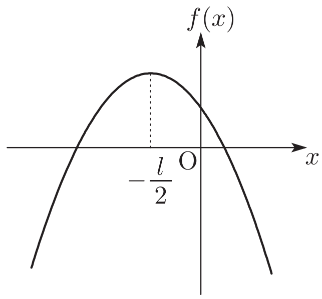
$$-x^2 - lx + a^2 = 0 \qquad \therefore \quad x = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}$$

これは辺 BC の位置なので，辺 AB の中点 E の位置は，

$$\left\{-\frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}\right\} + \frac{l}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}$$

(5) $(*)$ の合力 F_x の符号は $f(x) = -x^2 - lx + a^2$ の符号と一致しているので，$f(x)$ の符号を調べればよい．

まず右側のつり合い位置の付近では，つり合い位置からのずれの符号と $f(x)$ の符号が反対なので，つり合い位置に戻す向きの力が作用していて，安定なつり合いである．



これに対して左側のつり合い位置の付近では，つり合い位置からのずれの符号と $f(x)$ の符号が同じなので，つり合い位置から離れる向きの力が作用していて，不安定なつり合いである．

配点の目安

33 点

(1) 6 点

PQ，RS に流れる電流それぞれが BC の位置に作る磁界の大きさに 3 点，

合成磁界の x 成分に 1 点，y 成分に 1 点，z 成分に 1 点

(2) 9 点

力の x 成分に 2 点，y 成分に 2 点，z 成分に 2 点，グラフに 3 点

(3) 6 点

力の x 成分に 2 点，y 成分に 2 点，z 成分に 2 点

(4) 6 点

合力の x 成分の式に 2 点，合力が 0 のときの B の x 座標に 2 点，E の x 座標に 2 点

(5) 6 点

$x=-\dfrac{l}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2+a^2}$ のときのつり合いについて述べて 3 点，

$x=-\dfrac{l}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2+a^2}$ のときのつり合いについて述べて 3 点

【3】

《解答》

Ⅰ(1) ドップラー効果により，

$$\begin{cases} \text{P から届く音} \quad \cdots \quad f_1 = \dfrac{c-v}{c}f \\ \text{Q から届く音} \quad \cdots \quad f_2 = \dfrac{c+v}{c}f \end{cases}$$

(2) f_1 と f_2 を重ね合わせたときの，うなりの周期が T なので，

$$\frac{1}{T} = \left|\frac{c+v}{c}f - \frac{c-v}{c}f\right| \qquad \therefore \quad T = \frac{c}{2vf}$$

Ⅱ(1) 記号：(か)

理由：風速 u のとき，空気とともに右向きに速さ u で移動する観測者から見ると，音源 P は左向きに速さ u で移動しているので．

(2) 波長を λ_1，振動数を $f_1{}'$ とする．P から点 O に届く音では，風速も含めたみかけの音速が $c+u$ なので，

$$\begin{cases} c+u = f\lambda_1 \\ c+u = f_1{}'\lambda_1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{c+u}{f} \\ f_1{}' = f \end{cases}$$

(3) Q から点 O に届く音の波長を λ_2，振動数を $f_2{}'$ とする．Q から点 O に届く音では，風速も含めた見かけの音速が $c-u$ なので，

$$\begin{cases} c-u = f\lambda_2 \\ c-u = f_2{}'\lambda_2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{c-u}{f} \\ f_2{}' = f \end{cases}$$

P，Q から点 O に届く 2 つの音波の位相差は，

$$\begin{aligned} 2\pi\left(\frac{L}{\lambda_2} - \frac{L}{\lambda_1}\right) &= \frac{2\pi fL}{c}\left(\frac{1}{1-\dfrac{u}{c}} - \frac{1}{1+\dfrac{u}{c}}\right) \\ &\fallingdotseq \frac{2\pi fL}{c}\left\{\left(1-\frac{-u}{c}\right) - \left(1-\frac{u}{c}\right)\right\} \\ &= \frac{4\pi fLu}{c^2} \end{aligned}$$

この位相差が π の偶数倍となるとき，音の強さが極大となるので，

$$\frac{4\pi fLu}{c^2} = \pi\cdot 2n \qquad \therefore \quad n = \frac{2fLu}{c^2}$$

(4) 次の極大となるまでに，(3) の n は 1 だけ増加するので，

$$\frac{2fL}{c^2}\Delta u = 1 \qquad \therefore \quad \Delta u = \frac{c^2}{2fL}$$

(5) (4)，I(2) より，

$$\begin{cases} 2vfT = c \\ 2fL\mathit{\Delta} u = c^2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} c = \dfrac{L\mathit{\Delta} u}{vT} = 3.5 \times 10^2\,\mathrm{m/s} \\[2ex] f = \dfrac{L\mathit{\Delta} u}{2v^2T^2} = 1.8 \times 10^2\,\mathrm{Hz} \end{cases}$$

配点の目安

33 点

I (1) 3 点

答え (f_1) に 3 点

(2) 4 点

$\dfrac{1}{T} = |f_1 - f_2|$ がわかって 2 点，答えに 2 点

II(1) 3 点

記号に 1 点，理由に 2 点

(2) 6 点

波長に 3 点，振動数に 3 点

(3) 8 点

λ_2 に 2 点，$f_2{}'$ に 2 点，答えに 4 点

(4) 3 点

II(3) で $u \to u + \mathit{\Delta} u$ としたとき $n \to n+1$ であることがわかって 2 点，答えに 1 点

(5) 6 点

c に 3 点，f に 3 点

PJ

直前東大物理発展演習

【1回目】

Z-KAI

会員番号	

氏　名	

不許複製