MFB

直前講習

解答

Z会東大進学教室

直前一橋大数学総合演習

【2回目】

問題

【1】2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ について，

「$f(x)$ が $g(x)$ で割り切れる」,「$g(x)$ が $f(x)$ を割り切る」

ことを $g(x) \mid f(x)$ で表す.

$f(x)+2$ が $(x-1)^2$ で割り切れるから，$(x-1)^2 \mid f(x)+2$ であり，かつ $f(x)$ が 3 次式であることから

$$f(x)+2=(x-1)^2(ax+b)$$

とおける．ただし a，b は実数で，$a \fallingdotseq 0$.

したがって，$f(x)=(x-1)^2(ax+b)-2$ であるから

$$f(x)+\frac{50}{27}=(x-1)^2(ax+b)-2+\frac{50}{27}=(x-1)^2(ax+b)-\frac{4}{27}$$

これを $g(x)$ と表すと，$g(x)$ が $(3x-1)^2$ で割り切れることから，

(i) $g\left(\frac{1}{3}\right)=0$ であり，従って

$$g\left(\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}a+b\right)-\frac{4}{27}=0$$

$$\Longleftrightarrow 4(a+3b)-4=0 \qquad \therefore \quad a+3b=1 \quad \cdots\cdots ①$$

(ii) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ について $g'\left(\frac{1}{3}\right)=0$ が成り立つ．$g(x)$ を微分して

$$g'(x)=2(x-1)(ax+b)+(x-1)^2\cdot a$$

であるから

$$g'\left(\frac{1}{3}\right)=2\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}a+b\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot a=0$$

$$\Longleftrightarrow -4(a+3b)+4a=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より $a=1$，$b=0$ であるから，求める $f(x)$ は

$$f(x)=(x-1)^2\cdot x-2=\boldsymbol{x^3-2x^2+x-2} \quad \text{（答）}$$

■ 参考

上の解法では，次の定理を用いた：

多項式 $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるとき，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$$

が成り立つ.

証明しておこう．導関数を求めるために，次の 2 つの公式を用いる.

- 積の微分　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- 1 次式の累乗　$\{(ax+b)^n\}'=na(ax+b)^{n-1}$

  特に $a=1$ ならば，　$\{(x-\alpha)^n\}'=n(x-\alpha)^{n-1}$

証明：$(x-\alpha)^2 \mid f(x)$ ならば，ある多項式 $g(x)$ が存在して

$$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\#)$$

と表されるから，$f(\alpha)=0$ は明らか.

$(\#)$ を微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{(x-\alpha)^2 g(x)\}' \\ &= \{(x-\alpha)^2\}' g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x) \\ &= 2(x-\alpha)g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x) \end{aligned}$$

であるから

$$f'(\alpha) = 0$$

となる. （証終）

従って，$n \geqq 2$ のとき，n 次方程式 $f(x)=0$ が $x=\alpha$ を 2 重解にもてば，

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$$

が成り立つ.

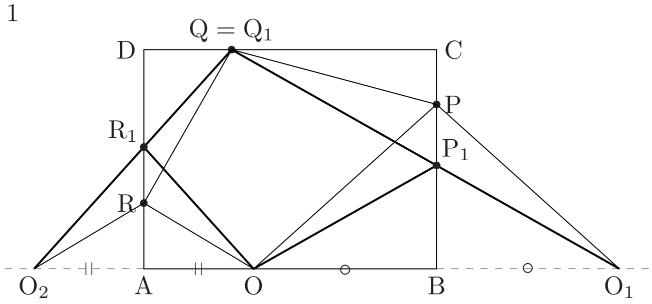
【配点の目安】

配点：25 点

$\square_1$ $f(x)+2=(x-1)^2(ax+b)$ とおいて ……………………………… 5 点
$\square_2$ a，b の関係式（各 5 点 ×2）………………………………… 10 点
$\square_3$ 答に ……………………………………………………………… 10 点

【2】まず，点 Q を辺 CD 上で任意に固定し，それを $\mathrm{Q_1}$ とする．頂点 A，B に関する点 O の対称点を $\mathrm{O_2}$，$\mathrm{O_1}$ とする．図 1 を参照せよ．

図 1



このとき，$\mathrm{OP = O_1P}$，$\mathrm{OR = O_2R}$ が成り立つから，

$$\mathrm{OP + PQ_1 = O_1P + PQ_1},\ \mathrm{OR + RQ_1 = O_2R + RQ_1}$$

3 角形 $\mathrm{Q_1PO_1}$ で三角不等式によって

$$\mathrm{O_1P + PQ_1 \geqq O_1Q_1}$$

が成り立つから，

$$\mathrm{OP + PQ_1 \geqq O_1Q_1}$$

となり，3 点 $\mathrm{Q_1}$，P，$\mathrm{O_1}$ が共線 (つまり 1 直線上に並ぶ) のとき，$\mathrm{OP + PQ_1}$ は最小になる．このときの点 P を $\mathrm{P_1}$ とする．

$\mathrm{OR + RQ_1}$ についても，まったく同様にして，3 点 $\mathrm{Q_1}$，R，$\mathrm{O_2}$ が共線のとき最小になる．このときの点 R を $\mathrm{R_1}$ とする．

以上より，点 Q を $\mathrm{Q_1}$ に固定するとき，L は最小となり，この値は点 Q の位置にのみ依存するから，それを L_{Q} とすれば

$$L_{\mathrm{Q}} = \mathrm{QO_1 + QO_2}$$

である．

そこで次に，Q の固定を解いて，線分 DC 上で動かし，この $L_{\mathrm{Q}} = \mathrm{QO_1 + QO_2}$ を最小にすることを考える．図 2 を参照されたい．

直線 DC に関する点 $\mathrm{O_1}$ の対称点を $\mathrm{O_3}$ とする．このとき，3 角形 $\mathrm{QO_2O_3}$ において再び三角不等式によって

$$\mathrm{O_2Q + QO_3 \geqq O_2O_3}$$

であるから，$L_{\mathrm{Q}} = \mathrm{O_2Q + O_3Q}$ が最小になるのは，3 点 $\mathrm{O_2}$，Q，$\mathrm{O_3}$ が共線のときである．従って，この場合の点 Q を $\mathrm{Q_0}$ とすれば，$\mathrm{Q_0}$ は線分 $\mathrm{O_2O_3}$ と辺 CD の交点である．

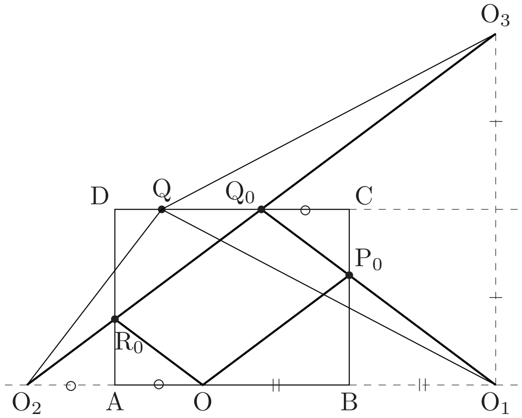
このとき，点 P，R の位置は，線分 $\mathrm{Q_0O_1}$ と辺 BC の交点，線分 $\mathrm{Q_0O_2}$ と辺 DA の交点，としてそれぞれ定まる．それを $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{R_0}$ とすれば，求める L の最小値 L_0 は

$$L_0 = \min L_{\mathrm{Q}} = \mathrm{OP_0 + P_0Q_0 + Q_0R_0 + R_0O}$$

となる．

以上より，4 角形 OPQR の周 L が最小になるような P，Q，R の位置を定める手順は次のようになる：

図 2



- **点 O の頂点 A についての対称点を $\mathbf{O_2}$，B についての対称点を $\mathbf{O_1}$ とし，$\mathbf{O_1}$ の直線 DC についての対称点を $\mathbf{O_3}$ とする．**
- **2 点 $\mathbf{O_2}$ と $\mathbf{O_3}$ を直線で結び，辺 DC との交点を $\mathbf{Q = Q_0}$ とする．**
- **線分 $\mathbf{Q_0O_2}$ と辺 DA との交点を $\mathbf{R = R_0}$ とし，また線分 $\mathbf{Q_0O_1}$ と辺 CB との交点を $\mathbf{P = P_0}$ とする．**
- **以上により定まった 3 点 $\mathbf{P_0}$，$\mathbf{Q_0}$，$\mathbf{R_0}$ と，与えられた点 O とを結んでできる 4 角形が，求める 4 角形になる．**（答）

$\min L = L_0 = \mathrm{O_2O_3}$ であり，$\mathrm{O_2O_1} = 2a$，$\mathrm{O_3O_1} = 2b$ であるから，L の最小値は

$$\min L = \boldsymbol{2\sqrt{a^2+b^2}}$$ （答）

【配点の目安】

配点：25 点

□1 P，Q，R の位置を決める根拠に……………………………………7 点

□2 P，Q，R の位置を正しく述べて……………………………………8 点

□3 L の最小値に………………………………………………………10 点

【3】(1) n 回の試行の結果,

- 「赤球が奇数個取り出される」という事象を O_n (odd：奇数)
- 「赤球が偶数個取り出される」という事象を E_n (even：偶数)

と表す.

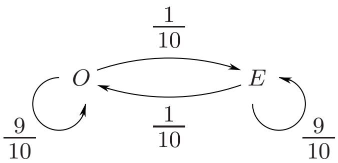
「$(n+1)$ 回の試行によって赤球が奇数個である」という事象 O_{n+1} は

(i) n 回の試行で赤球が奇数回取り出され，$(n+1)$ 回目に白球が取り出される場合と,

(ii) n 回の試行で赤球が偶数回取り出され，$(n+1)$ 回目に赤球が取り出される場合

の 2 つの場合があり，これらは排反である.

ある段階で,「赤球が奇数個である」という状態を O で,「赤球が偶数個である」という状態を E で表せば，図のような状態遷移ダイアグラムを得る.



(i) の起こる確率は

$$P(O_n)\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{10}p_n$$

であり，(ii) の起こる確率は

$$P(E_n)\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}(1-p_n)$$

であるから，$(n+1)$ 回の試行で赤球が奇数回取り出される確率 $p_{n+1}=P(O_{n+1})$ は

$$p_{n+1}=\frac{9}{10}p_n+\frac{1}{10}(1-p_n)=\boldsymbol{\frac{4}{5}p_n+\frac{1}{10}} \quad \textbf{(答)}$$

(2) 1 回目の試行で赤が取り出される確率は $\frac{1}{10}$ であるから，(1) の結果と合わせて次の漸化式を得たことになる：

$$p_1=\frac{1}{10},\ p_{n+1}=\frac{4}{5}p_n+\frac{1}{10}$$

この漸化式を解く.

$$\alpha=\frac{4}{5}\alpha+\frac{1}{10}\Longleftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}$$

であるから，漸化式の両辺からこれを引いて

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{4}{5}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

従って $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列となる.

初項は $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{5}$ であるから，

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

となり，求める確率 p_n は

$$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}} \quad \text{（答）}$$

【配点の目安】

配点：25 点

（1）15 点　　　（2）10 点

（1）$\square_1$ 考え方の説明に ……………………………… 5 点

$\square_2$ 答に ……………………………… 10 点

（2）$\square_1$ $p_1 = \frac{1}{10}$ に ……………………………… 5 点

$\square_2$ 答に ……………………………… 5 点

【4】(1) p は素数, a は正の整数で, $n=p^a$ であるから, n の正の約数は

$$p^k \ (0 \leqq k \leqq a)$$

と表せる. よって, n の正の約数の和は, 初項 1, 公比 p, 項数 $a+1$ の等比数列の和として

$$\sigma(n)=\sum_{k=0}^{a} p^k = \boldsymbol{\frac{p^{a+1}-1}{p-1}} \quad \text{(答)}$$

(2) p, q は相異なる素数, a, b は正の整数で, $n=p^a$, $m=q^b$ であるから, nm の正の約数は

$$p^k q^l \ (0 \leqq k \leqq a,\ 0 \leqq l \leqq b)$$

と表せる. よって, nm の正の約数の和は

$$\begin{aligned}\sigma(nm) &= \sum_{k=0}^{a}\sum_{l=0}^{b} p^k q^l \\ &= \sum_{k=0}^{a}\left(p^k \cdot \frac{q^{b+1}-1}{q-1}\right) \\ &= \frac{q^{b+1}-1}{q-1}\sum_{k=0}^{a} p^k \\ &= \frac{q^{b+1}-1}{q-1} \cdot \frac{p^{a+1}-1}{p-1} \\ &= \sigma(n)\sigma(m)\end{aligned}$$

(証終)

(3) $2^a-1=p$ とおくと, $n=2^{a-1}p$ であり, p と 2 は相異なる素数であるから, (2) の結果より

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(2^{a-1}p)=\sigma(2^{a-1})\sigma(p) \\ &= (2^a-1)(p+1)=(2^a-1)\cdot 2^a \\ &= 2\cdot 2^{a-1}(2^a-1) \\ &= 2n\end{aligned}$$

(証終)

【配点の目安】

配点：25 点

(1) 10 点　　(2) 10 点　　(3) 5 点

(1) $\square_1$ $\sigma(n)=1+p+p^2+\cdots+p^a$ であることがわかっていれば…………5 点

$\square_2$ 答に……………………………………………………………5 点

(2) $\square_1$ nm の正の約数の形 $p^k q^l$ と k, l の範囲を示して…………………5 点

$\square_2$ $\sigma(nm)=\sigma(n)\sigma(m)$ を示す計算に……………………………5 点

(3) $\square_1$ 正しく証明できて……………………………………………5 点

MFB

直前一橋大数学総合演習

【2回目】

Z-KAI

会員番号	

氏　名	