

Z会東大進学教室

直前一橋大数学総合演習

【3回目】



問題

【1】(1) 任意の正整数 p について $6 \mid f(p, q)$ が成立するから、特に $p = 1$ のときも成立し、 $6 \mid f(1, q)$ である。ここで

$$f(1, q) = 1 \cdot 2 \cdot (1 + q) = 2(1 + q)$$

であり、これが6の倍数であるから、 $3 \mid 1 + q$ が必要である。従って、 k を整数として $q + 1 = 3k \iff q = 3k - 1$ となる。以上より

$$\text{任意の正整数 } p \text{ について } 6 \mid f(p, q) \implies q = 3k - 1$$

が成り立つから、必要条件は

$$q \text{ が } q = 3k - 1 \text{ と表されること (ここで } k \text{ は整数)} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。

次に、 $\textcircled{1}$ が十分条件でもあることを示す。ある整数 k について $q = 3k - 1$ と表されるならば、

$$\begin{aligned} f(p, q) &= p(p+1)(p+3k-1) \\ &= p(p+1)\{(p-1)+3k\} \\ &= p(p+1)(p-1) + 3k \cdot p(p+1) \end{aligned}$$

と変形される。ここで

$(p-1)p(p+1)$ は隣接3整数の積だから、 $3! = 6$ の倍数であり、また

$p(p+1)$ は偶数だから、 $3k \cdot p(p+1)$ も $2 \cdot 3 = 6$ の倍数となり、 $f(p, q)$ は6の倍数である。

よって $q = 3k - 1$ と表されること ($\textcircled{1}$) は、任意の正整数 p について $6 \mid f(p, q)$ が成り立つための十分条件でもあるから、

$$\text{任意の正整数 } p \text{ について } 6 \mid f(p, q) \iff q = 3k - 1 \text{ (ただし } k \text{ は整数)}$$

求める q の個数は

$$0 < q = 3k - 1 < 100$$

をみたす k の個数に等しく、

$$\frac{1}{3} < k < \frac{101}{3} \iff 1 \leq k \leq 33$$

であるから、33個 (答)

(2) $f(p, q) = p(p+1)(p+q)$ について、

$$2 \mid f(p, q), 7 \mid f(p, q)$$

であるから、 $f(p, q)$ は14の倍数となり、ある整数 l について

$$f(p, q) = 2 \cdot 7 \cdot l$$

$l \geq 2$ のとき、 $f(p, q)$ は7より大きく $f(p, q)$ より小さい約数をもつことになり、題意に反する。よって、 $l = 1$ で

$$f(p, q) = p(p+1)(p+q) = 2 \cdot 7$$

$p(p+1)$ は偶数であるから

$$p(p+1) = 2, p+q = 7 \quad \therefore \quad p = 1, q = 6 \quad (\text{答})$$

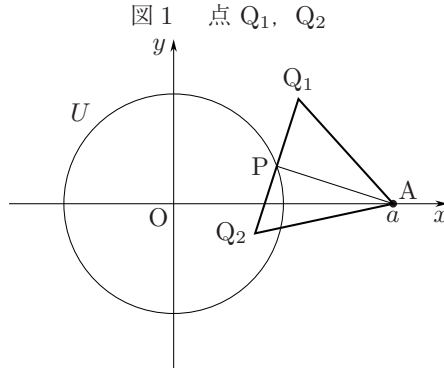
【配点の目安】

配点：25 点

(1) 15 点 (2) 10 点

- (1) ₁ $q = 3k - 1$ が必要条件であることを述べて 5 点
₂ $q = 3k - 1$ が十分条件であることを示して 5 点
₃ 答に 5 点
- (2) ₁ $f(p, q) = 14$ となる理由に 5 点
₂ 答に 5 点

- 【2】(1) P は単位円 U 上の点であるから, $P(\cos \theta, \sin \theta)$ とおける. 点 $A(a, 0)$ で, $a > 1$ であるから, A は U の外部にある. 図 1 参照.



$\overrightarrow{PA} = (a - \cos \theta, -\sin \theta)$ で $a - \cos \theta > 0$ であるから, \overrightarrow{PA} と垂直なベクトル
 $\vec{v}_1 = (\sin \theta, a - \cos \theta), \vec{v}_2 = (-\sin \theta, -(a - \cos \theta))$

のうちで

- y 成分が正である \vec{v}_1 は $\overrightarrow{PQ_1}$ と同じ向き,
- y 成分が負である \vec{v}_2 は $\overrightarrow{PQ_2}$ と同じ向き

のベクトルである.

$|\overrightarrow{PQ_1}| = \frac{1}{\sqrt{3}} |\overrightarrow{PA}|$ であるから, $\overrightarrow{PQ_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin \theta, a - \cos \theta)$ となり, したがっ

て点 Q_1 の位置ベクトル $\overrightarrow{OQ_1}$ は

$$\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ_1} = (\cos \theta, \sin \theta) + \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin \theta, a - \cos \theta)$$

点 $Q_1(X_1, Y_1)$ とすれば,

$$(X_1, Y_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta, \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta + a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta) \\ Y_1 - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta) \end{cases}$$

x 成分は \cos に, y 成分は \sin に合成して

$$X_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right), Y_1 - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$$

であるから, 平方して加えれば

$$X_1^2 + \left(Y_1 - \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{3}$$

を得る. 点 P は単位円 U を自由に動けるから, θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ 全体を動く. よって, 除外点は存在しない.

以上より, 求める Q_1 の軌跡 L_1 は, 中心 $K_1 \left(0, \frac{a}{\sqrt{3}} \right)$, 半径 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の円にな

り、方程式は

$$L_1: x^2 + \left(y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3} \quad (\text{答})$$

(2) (1)と同様にして、点 Q_2 の軌跡 L_2 を求める. $Q_2(X_2, Y_2)$ として、 $\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ_2}$ であるから、

$$\begin{aligned} (X_2, Y_2) &= (\cos \theta, \sin \theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin \theta, -(a - \cos \theta)) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos \theta - \sin \theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ Y_2 + \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow X_2^2 + \left(Y_2 + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

したがって、点 Q_2 の軌跡 L_2 は、中心 $K_2\left(0, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ 、半径 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の円になる.

図 2 参照.

図 2 2 円 L_1, L_2

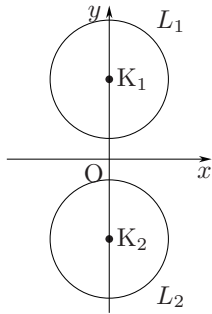
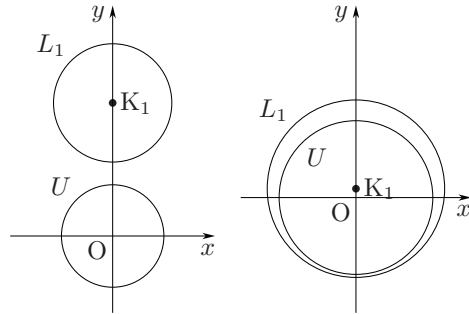


図 3 2 円 L_1, U



2 円 L_1, L_2 の中心間の距離 $d = K_1K_2$ と半径の和 $r_1 + r_2$ は

$$K_1K_2 = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad r_1 + r_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

であるから、題意の成立は

$$L_1 \cap L_2 = \phi \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}} > \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a > 2 \quad (\text{答})$$

(3) 円 L_1 の半径は $\frac{2}{\sqrt{3}}$ であり、また円 U の半径は 1 であるから、

$$L_1 \cap U = \phi \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } U \text{ と } L_1 \text{ が離れている.} \\ \text{(ii) } U \text{ が } L_1 \text{ の内部に含まれる.} \end{cases}$$

のいずれかが成り立つ. 図 3 参照.

(i) U と L_1 が離れているとき、半径の和は中心間の距離よりも小さいから

$$1 + \frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a > \sqrt{3} + 2$$

これは条件 $a > 1$ をみたとす.

(ii) U が L_1 の内部に含まれるとき, 半径の差が中心間の距離よりも大きいから

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 > \frac{a}{\sqrt{3}} \iff a < 2 - \sqrt{3}$$

これは $a > 1$ に反するから不適.

以上より, 求める a の範囲は $a > \sqrt{3} + 2$ (答)

【配点の目安】

配点: 25 点

(1) 7 点 (2) 10 点 (3) 8 点

- (1) ₁ Q_1 の座標をパラメータ表示して 2 点
₂ 答に 5 点
- (2) ₁ Q_2 の座標をパラメータ表示して 2 点
₂ L_2 の方程式に 3 点
₃ 答に 5 点
- (3) ₁ U が L_1 の内部に含まれない理由に 3 点
₂ 答に 5 点

[3] 点 P の x 座標を t とし, P における法線 l が点 Q で C と接するものとする. Q の x 座標を s とすると, l は Q での接線なので

$$y = (3s^2 - a)(x - s) + s^3 - as = (3s^2 - a)x - 2s^3$$

と表される. これが点 P での法線となる. 点 P を通るということは, 方程式

$$x^3 - ax = (3s^2 - a)x - 2s^3 \iff x^3 - 3s^2x + 2s^3 = 0$$

の 3 つの解が s, s, t ということなので, 解と係数の関係から

$$2s + t = 0 \iff t = -2s \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また, P での接線と直交するので

$$(3s^2 - a)(3t^2 - a) = -1$$

①より

$$(3s^2 - a)(12s^2 - a) = -1 \iff 36s^4 - 15as^2 + a^2 + 1 = 0$$

$$X = s^2 \text{ とおくと, } 36X^2 - 15aX + a^2 + 1 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

負の s の値に対し, 正の t の値がただ一つ定まる. 負の s の値がただ一つ定まるためには, 正の $X = s^2$ の値がただ一つ定まればよい. つまり, ②が正の解をただ一つもてばよい.

2 次方程式 ② の 2 解の積は $\frac{a^2+1}{36}$ で, つねに正なので, ②が実数解をもてば, ともに正か, ともに負である. したがって, ②が正の解をただ一つもつのは, 正の重解をもつときにかぎる.

これには, ②の判別式 D が 0 で, 解の和 $\frac{15a}{36}$ が正となることが, 必要十分条件である.

よって

$$D = 225a^2 - 144(a^2 + 1) = 81a^2 - 144 = 0, \frac{15a}{36} > 0 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

このとき

$$\textcircled{2} \iff 36X^2 - 20X + \frac{25}{9} = 0 \iff X = s^2 = \frac{5}{18}$$

$s < 0$, ①より

$$s = -\frac{\sqrt{10}}{6}, t = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

以上より, l と C で囲まれる図形の面積を S とすると, l が C と Q で接し P を通ることから

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_s^t (x-s)^2(x-t) dx \right| \\ &= \left| \int_s^t (x-s)^2(x-s+s-t) dx \right| \\ &= \left| \int_s^t (x-s)^3 dx + (s-t) \int_s^t (x-s)^2 dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left[\frac{(x-s)^4}{4} + (s-t) \frac{(x-s)^3}{3} \right]_s^t \right| \\
&= \left| \frac{(t-s)^4}{4} + (s-t) \frac{(t-s)^3}{3} \right| = \frac{(t-s)^4}{12} \\
&= \frac{1}{12} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6} \right)^4 = \frac{25}{48} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

■ 注意

解答では、最後、数 III の合成関数の積分を使っている。しかし

$$\int (x-a)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \quad (C: \text{積分定数})$$

は文系の人でも使えるようにしておきたい。もちろん

$$(x-s)^2(x-t) = x^3 - (t+2s)x^2 + (2st+s^2)x - ts^2$$

と展開して計算しても同じ結果を得られる。

【配点の目安】

配点：25 点

- ₁ 直線 l の式に 3 点
- ₂ $t = -2s$ に 3 点
- ₃ $(3s^2 - a)(3t^2 - a) = -1$ に 3 点
- ₄ $a = \frac{4}{3}$ に 3 点
- ₅ $s = -\frac{\sqrt{10}}{6}$, $t = \frac{\sqrt{10}}{3}$ に 3 点
- ₆ 答に 10 点

【4】(1) l_1, l_2 上の任意の点の座標は, s, t を実数として, それぞれ

$$(s, -1-s, 0), (1+t, 1+t, -2t)$$

とおけるから

$$(s, -1-s, 0) = (0, -1, 0) + s(1, -1, 0), (1+t, 1+t, -2t) = (1, 1, 0) + t(1, 1, -2)$$

より, l_1, l_2 の方向ベクトル $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$ はそれぞれ

$$\vec{\ell}_1 = (1, -1, 0), \vec{\ell}_2 = (1, 1, -2)$$

である。E($s, -1-s, 0$), F($1+t, 1+t, -2t$) とおくと

$$\vec{EF} = (1+t-s, 2+t+s, -2t)$$

ここで, $\triangle AFB, \triangle CED$ は二等辺三角形であるから

$$AB \perp EF \text{ かつ } CD \perp EF \quad \therefore \vec{\ell}_1 \cdot \vec{EF} = 0, \vec{\ell}_2 \cdot \vec{EF} = 0$$

より

$$\begin{cases} \vec{\ell}_1 \cdot \vec{EF} = 1 \cdot (1+t-s) + (-1) \cdot (2+t+s) + 0 \cdot (-2t) = -1-2s = 0 \\ \vec{\ell}_2 \cdot \vec{EF} = 1 \cdot (1+t-s) + 1 \cdot (2+t+s) + (-2) \cdot (-2t) = 3+6t = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} s = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

よって

$$\mathbf{E} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right), \mathbf{F} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad EF^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

AB = 2a とすると

$$BE = a, BF = \sqrt{3}a$$

より

$$BE^2 + EF^2 = BF^2 \quad \therefore a^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}a)^2$$

$$\therefore a^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because a > 0)$$

よって

$$AB = \sqrt{6} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\vec{BA} \parallel \vec{\ell}_1 = (1, -1, 0)$$

であり, (Aの x 座標) > (Bの x 座標) であるから, \vec{BA} と $\vec{\ell}_1$ は同じ向きである。

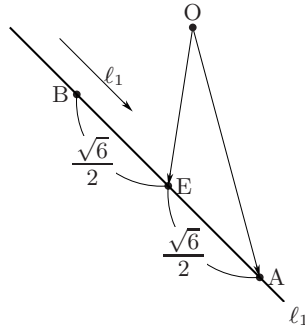
よって

$$\vec{OA} = \vec{OE} + \vec{EA} = \vec{OE} + AE \cdot \frac{\vec{\ell}_1}{|\vec{\ell}_1|}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1, 0) \\
&= \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 0\right)
\end{aligned}$$

よって, A の座標は

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 0\right) \quad (\text{答})$$



【配点の目安】

配点：25 点

- (1) 15 点 (2) 5 点 (3) 5 点

- (1) □₁ E, F の座標を文字式で表して……………5 点
□₂ E, F の座標に (各 5 点) ……………10 点
- (2) □₁ 答に……………5 点
- (3) □₁ 答に……………5 点



| | |
|------|--|
| 会員番号 | |
|------|--|

| | |
|----|--|
| 氏名 | |
|----|--|