2MJSS/2MJS/2MJ

春期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

中２選抜東大・医学部数学

中２数学

中２東大数学

1 章　文字式の展開

問題

【1】ア　単項式　イ　係数　ウ　多項式　エ　項

オ　$\boldsymbol{3a^2}$　カ　$\boldsymbol{-4a}$　キ　$\boldsymbol{-2}$　ク　定数項

ケ　次数　コ　大きい　サ　降べきの順

【2】(1)
$$(3x-6y)+(-5x+2y)$$
$$=3x-6y-5x+2y$$
$$=\boldsymbol{-2x-4y}$$

(2)
$$(7a-3b)-(3a-6b)$$
$$=7a-3b-3a+6b$$
$$=\boldsymbol{4a+3b}$$

(3)
$$(11a+9b)-(12a+17b)$$
$$=11a+9b-12a-17b$$
$$=\boldsymbol{-a-8b}$$

(4)
$$(-15x+3)-(7x-11)$$
$$=-15x+3-7x+11$$
$$=\boldsymbol{-22x+14}$$

(5)
$$17+2(x-19)$$
$$=17+2x-38$$
$$=\boldsymbol{2x-21}$$

(6)
$$7y-13+5(2-y)$$
$$=7y-13+10-5y$$
$$=\boldsymbol{2y-3}$$

(7)
$$5x+3(x-2y)$$
$$=5x+3x-6y$$
$$=\boldsymbol{8x-6y}$$

(8)
$$3a-2(a+b)$$
$$=3a-2a-2b$$
$$=\boldsymbol{a-2b}$$

(9)
$$2(x+2y)-(5x+3y)$$
$$=2x+4y-5x-3y$$
$$=\boldsymbol{-3x+y}$$

(10)
$$-(x-3y)-2(3x-8y)$$
$$=-x+3y-6x+16y$$
$$=\boldsymbol{-7x+19y}$$

(11)
$$3(5a-2b)+2(4b-9a)$$
$$=15a-6b+8b-18a$$
$$=\boldsymbol{-3a+2b}$$

(12)
$$3(2x-3y)-2(-x-4y)$$
$$=6x-9y+2x+8y$$
$$=\boldsymbol{8x-y}$$

(13)
$$5x-\{4-3(x-2)\}$$
$$=5x-(4-3x+6)$$
$$=5x+3x-10$$
$$=\boldsymbol{8x-10}$$

(14)
$$3a-\{2(a-2b)-4\}-5$$
$$=3a-(2a-4b-4)-5$$
$$=3a-2a+4b+4-5$$
$$=\boldsymbol{a+4b-1}$$

(15)
$$11a-[a-2\{3-4(a+5)+3a\}-34]-7$$
$$=11a-\{a-2(3-4a-20+3a)-34\}-7$$
$$=11a-\{a-2(-a-17)-34\}-7$$
$$=11a-(a+2a+34-34)-7$$
$$=11a-3a-7$$
$$=\mathbf{8}\boldsymbol{a}-\mathbf{7}$$

(16)
$$17-2\,[3x+12-3\{13x-2(5+7x)\}-21]+4x$$
$$=4x+17-2\{3x-9-3(13x-10-14x)\}$$
$$=4x+17-2\{3x-9-3(-x-10)\}$$
$$=4x+17-2(3x-9+3x+30)$$
$$=4x+17-2(6x+21)$$
$$=4x+17-12x-42$$
$$=\boldsymbol{-8x-25}$$

【3】(1)
$$\frac{a}{2}-\frac{a}{7}$$
$$=\frac{7a}{14}-\frac{2a}{14}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{14}a}$$

(2)
$$\frac{x}{5}-\frac{x+1}{3}$$
$$=\frac{3x-5(x+1)}{15}$$
$$=\frac{3x-5x-5}{15}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-2x-5}{15}}$$
$$\left(=-\boldsymbol{\frac{2x+5}{15}}\right)$$

(3)
$$\frac{5x+y}{2}+\frac{2x-4y}{3}$$
$$=\frac{3(5x+y)+2(2x-4y)}{6}$$
$$=\frac{15x+3y+4x-8y}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{19x-5y}{6}}$$

(4)
$$\frac{2a+4b}{3}-\frac{5a-b}{6}$$
$$=\frac{2(2a+4b)-(5a-b)}{6}$$
$$=\frac{4a+8b-5a+b}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-a+9b}{6}}$$

(5)
$$\begin{aligned}&\frac{3x-y}{4}-\frac{2x+y}{5}\\&=\frac{5(3x-y)-4(2x+y)}{20}\\&=\frac{15x-5y-8x-4y}{20}\\&=\boldsymbol{\frac{7x-9y}{20}}\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}&\frac{7x-3y}{4}-\frac{5x+y}{6}\\&=\frac{(7x-3y)\times 3}{4\times 3}-\frac{(5x+y)\times 2}{6\times 2}\\&=\frac{3(7x-3y)-2(5x+y)}{12}\\&=\frac{21x-9y-10x-2y}{12}\\&=\boldsymbol{\frac{11x-11y}{12}}\end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned}&\frac{6x-8y}{15}-\frac{3x-9y}{20}\\&=\frac{4(6x-8y)-3(3x-9y)}{60}\\&=\frac{24x-32y-9x+27y}{60}\\&=\frac{15x-5y}{60}\\&=\boldsymbol{\frac{3x-y}{12}}\end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned}&\frac{7x+1}{15}-\frac{2x-1}{12}\\&=\frac{4(7x+1)-5(2x-1)}{60}\\&=\frac{28x+4-10x+5}{60}\\&=\frac{18x+9}{60}\\&=\boldsymbol{\frac{6x+3}{20}}\end{aligned}$$

(9)
$$\begin{aligned}&\frac{3(3x-y)}{10}-\frac{x+2y}{4}\\&=\frac{2\times 3(3x-y)-5(x+2y)}{20}\\&=\frac{18x-6y-5x-10y}{20}\\&=\boldsymbol{\frac{13x-16y}{20}}\end{aligned}$$

(10)
$$\begin{aligned}&\frac{x-3y}{4}-\frac{x-y}{2}-\frac{x+2y}{3}\\&=\frac{3(x-3y)-6(x-y)-4(x+2y)}{12}\\&=\frac{3x-9y-6x+6y-4x-8y}{12}\\&=\boldsymbol{\frac{-7x-11y}{12}}\end{aligned}$$

【4】(1) $3a\times 5b=\boldsymbol{15ab}$

(2) $(2x)^3=\boldsymbol{8x^3}$

(3) $5x^2y\times(-3xy)=\boldsymbol{-15x^3y^2}$

(4) $\left(-\frac{3}{2}x\right)^2\times 4xy^2=\frac{9}{4}x^2\times 4xy^2=\boldsymbol{9x^3y^2}$

(5) $6x^2\times(-xy)^2\div 3xy=\boldsymbol{2x^3y}$

(6) $a^2b\div 3a^3b^2\times(-ab)^2=a^2b\times\frac{1}{3a^3b^2}\times a^2b^2=\boldsymbol{\frac{ab}{3}}$

(7) $(-2ab)^3\div\frac{3a^2}{2b}\times 6a^3=-8a^3b^3\times\frac{2b}{3a^2}\times 6a^3=\boldsymbol{-32a^4b^4}$

(8) $\frac{5}{18}x^2y^3\div\left(-\frac{2y^2}{x}\right)^2\times(-4x)^2=\frac{5}{18}x^2y^3\times\frac{x^2}{4y^4}\times 16x^2=\boldsymbol{\frac{10x^6}{9y}}$

【5】(1)

$$\frac{5a-b}{3}-\frac{a+3b}{4}=\frac{4(5a-b)-3(a+3b)}{12}$$
$$=\frac{20a-4b-3a-9b}{12}$$
$$=\frac{17a-13b}{12}$$
$$=\frac{-34-65}{12}$$
$$=-\frac{99}{12}$$
$$=-\boldsymbol{\frac{33}{4}}$$

(2)

$$12-10b-\{3(b+3c)-7(2b-a)\}+9c$$
$$=12-10b+9c-(3b+9c-14b+7a)$$
$$=12-10b+9c-(7a-11b+9c)$$
$$=12-10b+9c-7a+11b-9c$$
$$=-7a+b+12$$
$$=14+5+12$$
$$=\mathbf{31}$$

(3)

$$3a^2b\div\frac{3}{4}b^2c$$
$$=\frac{3a^2b\times 4}{3b^2c}$$
$$=\frac{4a^2}{bc}$$
$$=\frac{4\times(-2)^2\times 2}{5\times(-3)}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{32}{15}}$$

(4)

$$4a^3b\times(3bc)^2\div 15(ac)^2$$
$$=\frac{4a^3b\times 9b^2c^2}{15a^2c^2}$$
$$=\frac{4ab^3\times 3}{5}$$
$$=\frac{4\times(-2)\times 5^3\times 3}{5}$$
$$=\mathbf{-600}$$

(5)

$$3a(2b+c)-b(a+2b)$$
$$=6ab+3ac-ab-2b^2$$
$$=5ab+3ac-2b^2$$
$$=5\times(-2)\times 5+3\times(-2)\times\left(-\frac{3}{2}\right)-2\times 5^2$$
$$=\mathbf{-91}$$

(6)

$$(ac)^2 \div \frac{2c}{b} \div \frac{ab}{4} - 2\{bc^2 - 3c(bc - a)\}$$
$$= \frac{a^2c^2 \times b \times 4}{2c \times ab} - 2(bc^2 - 3bc^2 + 3ac)$$
$$= 2ac - 2(-2bc^2 + 3ac)$$
$$= 2ac + 4bc^2 - 6ac$$
$$= 4bc^2 - 4ac$$
$$= 4 \times 5 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times (-2) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$= 45 - 12$$
$$= \mathbf{33}$$

【6】(1) $x = -2y$ より，

$$z = \frac{4 \times (-2y) \times y}{4y^2 + 2y^2} = \frac{-8y^2}{6y^2} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

(2) $a : b = 3 : 5$ より，

$$3b = 5a \qquad \therefore\ b = \frac{5}{3}a$$

これを $\dfrac{3a^2 + b^2}{2ab}$ に代入すると，

$$\frac{3a^2 + b^2}{2ab} = \frac{3a^2 + \frac{25}{9}a^2}{2a \times \frac{5}{3}a}$$
$$= \frac{\frac{52}{9}\cancel{a^2}}{\frac{10}{3}\cancel{a^2}}$$
$$= \frac{52}{9} \times \frac{3}{10}$$
$$= \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{15}}$$

【7】(1) $2x = -y + 10$

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}y + 5}$$

(2) $2y = -x + 12$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 6}$$

(3) $\frac{1}{3}Sh = V$

$$\boldsymbol{h = \frac{3V}{S}}$$

(4) $2a + b + 3c = 3x$

$$2a = 3x - b - 3c$$

$$\boldsymbol{a = \frac{3x - b - 3c}{2}}$$

(5) $2\pi(r + h) = \ell$

$$r + h = \frac{\ell}{2\pi}$$

$$\boldsymbol{h = \frac{\ell}{2\pi} - r}$$

(6) $\frac{1}{2}(a + b)h = S$

$$a + b = \frac{2S}{h}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{2S}{h} - b}$$

【8】(1)

$$ab-2a-3=0$$
$$ab=2a+3$$
$$\boldsymbol{b=\frac{2a+3}{a}}$$
$$\boldsymbol{\left(=2+\frac{3}{a}\right)}$$

(2)

$$ab-2a-3=0$$
$$(b-2)a=3$$
$$\boldsymbol{a=\frac{3}{b-2}}$$

(3)

$$nr=1+mr$$
$$nr-mr=1$$
$$(n-m)r=1$$
$$\boldsymbol{r=\frac{1}{n-m}}$$

(4)

$$x^2+3xy-y=2x^2+3y$$
$$3xy-4y=x^2$$
$$(3x-4)y=x^2$$
$$\boldsymbol{y=\frac{x^2}{3x-4}}$$

(5)

$$y=\frac{a}{x}$$
$$xy=a$$
$$\boldsymbol{x=\frac{a}{y}}$$

(6)

$$b=\frac{3}{-a+2}$$
$$(-a+2)b=3$$
$$-a+2=\frac{3}{b}$$
$$-a=\frac{3}{b}-2$$
$$\boldsymbol{a=-\frac{3}{b}+2}$$

(7)

$$y(x+2)=3+3(x+2)$$
$$x(y-3)=9-2y$$
$$\boldsymbol{x=\frac{9-2y}{y-3}}$$

(8)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$
$$bc+ac=ab$$
$$a(b-c)=bc$$
$$\boldsymbol{a=\frac{bc}{b-c}}$$

【9】(1)

$$(a+2)(b+6)$$
$$=\boldsymbol{ab+6a+2b+12}$$

(2)

$$(x-3)(y+2)$$
$$=\boldsymbol{xy+2x-3y-6}$$

(3)

$$(a+b)(c+d)$$
$$=\boldsymbol{ac+ad+bc+bd}$$

(4)

$$(a-b)(c-d)$$
$$=\boldsymbol{ac-ad-bc+bd}$$

(5)

$$(2p+1)(q-6)$$
$$=\boldsymbol{2pq-12p+q-6}$$

(6)

$$(2x-y)(3x+4y)$$
$$=6x^2+8xy-3xy-4y^2$$
$$=\boldsymbol{6x^2+5xy-4y^2}$$

【10】(1) $(a+2)(a+3) = \boldsymbol{a^2+5a+6}$

(2) $(x-3)(x+2) = \boldsymbol{x^2-x-6}$

(3) $(y-2)(y-4) = \boldsymbol{y^2-6y+8}$

(4) $(a+2)^2 = \boldsymbol{a^2+4a+4}$

(5) $(b-4)^2 = \boldsymbol{b^2-8b+16}$

(6) $(2x+1)^2 = \boldsymbol{4x^2+4x+1}$

(7) $(3x-2y)^2 = \boldsymbol{9x^2-12xy+4y^2}$

【11】(1)

$$\begin{aligned} &(3a-1)(a+3)+(2a-3)(3a+2)\\ =&(3a^2+8a-3)+(6a^2-5a-6)\\ =&\boldsymbol{9a^2+3a-9} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &(3x-2y)(x-4y)-(x+2y)(x+y)\\ =&(3x^2-14xy+8y^2)-(x^2+3xy+2y^2)\\ =&\boldsymbol{2x^2-17xy+6y^2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} &(y-2)^2-(y-5)(y+1)\\ =&(y^2-4y+4)-(y^2-4y-5)\\ =&\boldsymbol{9} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} &(b+3)(b-1)-(b-3)^2\\ =&(b^2+2b-3)-(b^2-6b+9)\\ =&\boldsymbol{8b-12} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} &(a-2b)(2a-b)-(a+b)(a-2b)\\ =&(2a^2-5ab+2b^2)-(a^2-ab-2b^2)\\ =&\boldsymbol{a^2-4ab+4b^2} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} &(a+1)(a^2-a+1)-(a-1)(a^2+a+1)\\ =&(a^3-a^2+a+a^2-a+1)-(a^3+a^2+a-a^2-a-1)\\ =&(a^3+1)-(a^3-1)\\ =&\boldsymbol{2} \end{aligned}$$

【12】(1) $(a+b)^2 = \boldsymbol{a^2+2ab+b^2}$

$(a-b)^2 = \boldsymbol{a^2-2ab+b^2}$

$(a+b)(a-b) = a^2-ab+ab-b^2 = \boldsymbol{a^2-b^2}$

(2)
$$\begin{aligned} 103^2 &= (100+3)^2 \\ &= 100^2+2\times100\times3+3^2 \\ &= 10000+600+9 \\ &= \mathbf{10609} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 99^2 &= (100-1)^2 \\ &= 100^2-2\times100\times1+1^2 \\ &= 10000-200+1 \\ &= \mathbf{9801} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} 103\times97 &= (100+3)(100-3) \\ &= 100^2-3^2 \\ &= 10000-9 \\ &= \mathbf{9991} \end{aligned}$$

(5) $38924\times38926 = (38925-1)(38925+1)$ ……①

$38925^2 = 38925\times38925$ ……②

とかける．

ここで，$A=38925$ とすると，

① $=(A-1)(A+1)=A^2-1$

② $=A^2$

となる．

① < ② より，$\mathbf{38925^2}$ の方が大きい．

(6) $123456=a$ とおくと与式は

$$\begin{aligned} &a^2-(a+2)(a-3)+(a-1)\times a-(a-2)(a+2) \\ =&a^2-(a^2-a-6)+(a^2-a)-(a^2-4) \\ =&a^2-a^2+a+6+a^2-a-a^2+4 \\ =&\mathbf{10} \end{aligned}$$

問題

【1】(1) $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=3} \\ \boldsymbol{z=-4} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=-1} \\ \boldsymbol{z=4} \end{cases}$ (3) $\begin{cases} \boldsymbol{x=6} \\ \boldsymbol{y=9} \\ \boldsymbol{z=5} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \boldsymbol{a=-2} \\ \boldsymbol{b=7} \\ \boldsymbol{c=3} \end{cases}$ (5) $\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{y=-3} \\ \boldsymbol{z=2} \end{cases}$

【2】(1) 連立方程式

$$\begin{cases} a+2b=3c & \cdots\cdots ① \\ 7a-6b=11c & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①×3より，　$3a+6b=9c$　…③

③＋②より，　$10a=20c$

$a=2c$

これを①に代入して整理すると，

$b=\dfrac{1}{2}c$

よって，$a:b:c=2c:\dfrac{1}{2}c:c=\boldsymbol{4:1:2}$

(2) $\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{y+z}{3}=\dfrac{2x-z}{4}=k$ とおくと，

$$\begin{cases} x-y=2k & \cdots\cdots ① \\ y+z=3k & \cdots\cdots ② \\ 2x-z=4k & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①＋②＋③より，　$3x=9k$ よって，$x=3k$

これを，①,③ に代入してそれぞれを整理すると，

$y=k$，$z=2k$

これらを求める式に代入すると，$k\neq 0$ より，

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3k^2+2k^2+6k^2}{9k^2+k^2+4k^2}=\frac{11k^2}{14k^2}=\boldsymbol{\frac{11}{14}}$$

【3】(1)

$$\begin{aligned} 2(x+1)-(3x-1)&<2(3x-2) \\ 2x+2-3x+1&<6x-4 \\ -x+3&<6x-4 \\ -7x&<-7 \\ \boldsymbol{x}&\boldsymbol{>1} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{5}+2&\geqq\frac{2x+4}{3} \\ 3x-6+30&\geqq 10x+20 \\ -7x&\geqq -4 \\ \boldsymbol{x}&\boldsymbol{\leqq\frac{4}{7}} \end{aligned}$$

(3) $0.25(x-3) > 0.5(1.7x+0.6)+3$

$$25(x-3) > 5(17x+6)+300$$
$$5(x-3) > 17x+6+60$$
$$5x-15 > 17x+66$$
$$-12x > 81$$
$$\boldsymbol{x < -\frac{27}{4}}$$

(4) $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{3x-1}{4} \leqq \dfrac{5x+1}{2}$

$$4x-8-9x+3 \leqq 30x+6$$
$$-5x-5 \leqq 30x+6$$
$$-35x \leqq 11$$
$$\boldsymbol{x \geqq -\frac{11}{35}}$$

【4】

(1) $\begin{cases} 4(x-2) \leqq 5(2x-3) & \cdots ① \\ x-1 > 3(x-3) & \cdots ② \end{cases}$

① より

$$4x-8 \leqq 10x-15$$
$$4x-10x \leqq -15+8$$
$$-6x \leqq -7$$
$$x \geqq \frac{7}{6} \quad \cdots ③$$

② より

$$x-1 > 3x-9$$
$$x-3x > -9+1$$
$$-2x > -8$$
$$x < 4 \quad \cdots ④$$

③，④ より

$$\boldsymbol{\frac{7}{6} \leqq x < 4}$$

(2) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{3} \leqq 4x+3 & \cdots ① \\ 5(3x-4) < 3(7x-4) & \cdots ② \end{cases}$

① より

$$2x-5 \leqq 12x+9$$
$$-14 \leqq 10x$$
$$-\frac{7}{5} \leqq x \quad \cdots ③$$

② より

$$15x-20 < 21x-12$$
$$-8 < 6x$$
$$-\frac{4}{3} < x \quad \cdots ④$$

③，④ より

$$\boldsymbol{x > -\frac{4}{3}}$$

(3) $\begin{cases} \dfrac{5x+7}{6} \leqq 0.7x+0.3 & \cdots ① \\ 0.1(2.7x+3.6) \leqq 0.3(x+0.5)+0.4 & \cdots ② \end{cases}$

① より

$$50x+70 \leqq 42x+18$$
$$8x \leqq -52$$
$$x \leqq -\frac{13}{2} \quad \cdots ③$$

② より

$$27x+36 \leqq 30x+15+40$$
$$-19 \leqq 3x$$
$$-\frac{19}{3} \leqq x \quad \cdots ④$$

③，④ より

解なし

(4) $\begin{cases} \dfrac{x-4}{4} \leqq \dfrac{7x+2}{3} \cdots ① \\ \dfrac{7x+2}{3} \leqq \dfrac{3x-2}{5} \cdots ② \end{cases}$

① より

$$3x - 12 \leqq 28x + 8$$
$$-20 \leqq 25x$$
$$-\frac{4}{5} \leqq x \quad \cdots ③$$

② より

$$35x + 10 \leqq 9x - 6$$
$$26x \leqq -16$$
$$x \leqq -\frac{8}{13} \quad \cdots ④$$

③，④ より

$$\boldsymbol{-\frac{4}{5} \leqq x \leqq -\frac{8}{13}}$$

【5】(1) バナナ 1 個の値段を x 円，リンゴ 1 個を y 円，ミカン 1 個を z 円とすると，

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \cdots\cdots ① \\ 3x + 4y + 8z = 970 \cdots\cdots ② \\ 6x + 3y + 5z = 940 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

① × 6 より，$6x + 6y + 6z = 1260 \ \cdots\cdots ④$

② × 2 より，$6x + 8y + 16z = 1940 \ \cdots\cdots ⑤$

④ − ③ より，

$$3y + z = 320 \ \cdots\cdots ⑥$$

⑤ − ③ より，

$$5y + 11z = 1000 \ \cdots\cdots ⑦$$

ここで，⑥ と ⑦ を連立して，

⑥ より，$z = -3y + 320 \ \cdots\cdots ⑧$

⑧ を ⑦ に代入すると，

$$5y + 11(-3y + 320) = 1000$$
$$5y - 33y + 3520 = 1000$$
$$-28y = -2520$$
$$y = 90$$

これを，⑥ に代入して，

$$270 + z = 320$$
$$z = 50$$

以上を ① に代入すると，

$$x + 90 + 50 = 210$$
$$x = 70$$

(答)　バナナ **70** 円，リンゴ **90** 円，ミカン **50** 円

(2) 商品 A の重さを x g，商品 B を y g，商品 C 個を z g とすると，

$$\begin{cases} x+y+z=200 \cdots\cdots ① \\ x+2y=16z \cdots\cdots ② \\ 2y=3x+8z \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

① より，$x=200-y-z$

これを ②，③ に代入して整理すると，

② より，$y-17z=-200$ $\cdots\cdots$④

③ より，$y-z=120$ $\cdots\cdots$⑤

④ − ⑤ より，

$$\begin{aligned} -16z &= -320 \\ z &= 20 \end{aligned}$$

これを ⑤ に代入すると，

$$\begin{aligned} y-20 &= 120 \\ y &= 140 \end{aligned}$$

以上を ① に代入すると，

$$\begin{aligned} x+140+20 &= 200 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

(答)　A の重さ **40g**，B の重さ **140g**，C の重さ **20g**

【6】(1) A 町から B 町まで行くときの登り坂の部分の道のりを $x$km，下り坂の部分の道のりを $y$km とおく．

行きと帰りのかかった時間についての式を立てると

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=2 \cdots ① \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=2-\dfrac{16}{60} \cdots ② \end{cases}$$

①，② より

$$\begin{cases} 5x+3y=30 \cdots ③ \\ 3x+5y=26 \cdots ④ \end{cases}$$

③ × 5 − ④ × 3 より

$$\begin{array}{rrrrrr} & 25x & + & 15y & = & 150 \\ -) & 9x & + & 15y & = & 78 \\ \hline & 16x & & & = & 72 \\ & x & & & = & \dfrac{9}{2} \end{array}$$

③ より

$$\begin{aligned} 3y &= 30-5\times\frac{9}{2} \\ &= 5\times\frac{3}{2} \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore y=\frac{5}{2}$$

よって，A から B までの道のりは

$$x+y=\frac{9}{2}+\frac{5}{2}=7(\mathrm{km})$$

これは問題に適する．

(答)　**7(km)**

(2) 反対方向に歩いたとき $\cdots$ 2 人は $\dfrac{600}{5}=120(\mathrm{m/min})$ の速さで近づいている

同じ方向に歩いたとき $\cdots$ 2 人は $\dfrac{600}{30}=20(\mathrm{m/min})$ の速さで差が縮まっている

よって，A，B の歩く速さをそれぞれ xm/min，ym/min とすると

$$\begin{cases} x+y=120 & \cdots ① \\ x-y=20 & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ．

① + ② より，$2x=140$　　$\therefore x=70$

① − ② より，$2y=100$　　$\therefore y=50$

これらは問題に適する．

(答)　A　**70(m/min)**，B　**50(m/min)**

＜別解＞

A，B の歩く速さをそれぞれ xm/min，ym/min とすると

$$\begin{cases} \dfrac{600}{x+y}=5 & \cdots ① \\ \dfrac{600}{x-y}=30 & \cdots ② \end{cases}$$

① の両辺に $(x+y)$ をかけて整理すると

$$x+y=120 \quad \cdots ③$$

② の両辺に $(x-y)$ をかけて整理すると

$$x-y=20 \quad \cdots ④$$

③ + ④ より

$$2x=140 \qquad \therefore x=70$$

③ − ④ より

$$2y=100 \qquad \therefore y=50$$

これらは問題に適する．

(答)　A　**70(m/min)**，B　**50(m/min)**

【7】(1)　１％の食塩水を x g，10％の食塩水を y g混ぜるとする．

このとき，

食塩水の重さに着目して，

$$x+y+250=650 \quad \cdots\cdots ①$$

食塩の重さに着目して，

$$\frac{1}{100}x+\frac{10}{100}y=650\times\frac{2}{100} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②の連立方程式を解くと，$x=300$，$y=100$

よって，１％の食塩水 **300g**，10％の食塩水 **100g**

(2)　食塩水Ｂの濃度を x ％，混ぜる予定だった食塩水Ａの重さを ag，食塩水Ｂの重さを bg とする．このとき，

$$a+b=400 \quad \cdots\cdots ①$$

できる予定だった食塩水中の食塩の重さに着目して，

$$\frac{3}{100}a+\frac{x}{100}b=400\times\frac{4.5}{100} \quad \cdots\cdots ②$$

実際にできた食塩水中の食塩の重さに着目して，

$$\frac{3}{100}b+\frac{x}{100}a=400\times\frac{7.5}{100} \quad \cdots\cdots ③$$

② × 100 + ③ × 100 より，

$$3(a+b)+x(a+b)=4800$$

①を代入して，$x=9$

$x=9$ を②，③に代入して連立方程式として解くと，

$$a=300,\ b=100$$

よって，混ぜればよかった食塩水Ａは **300g**

＜別解＞　食塩水Ｂの濃度を x ％，混ぜる予定だった食塩水Ａの重さを ag，食塩水Ｂの重さを $(400-a)$g とする．

できる予定だった食塩水中の食塩の重さに着目して，

$$\frac{3}{100}a+\frac{x}{100}(400-a)=400\times\frac{4.5}{100} \quad \cdots\cdots ①$$

実際にできた食塩水中の食塩の重さに着目して，

$$\frac{3}{100}(400-a)+\frac{x}{100}a=400\times\frac{7.5}{100} \quad \cdots\cdots ②$$

① + ② より，

$$\frac{3}{100}\times400+\frac{x}{100}\times400=400\times\frac{4.5+7.5}{100}$$

これを解いて，$x=9$

$x=9$ を①に代入して，$a=300$

よって，混ぜればよかった食塩水Ａは **300g**

(3) 昨年度の男子を x 人，女子を y 人とする．

昨年度の生徒数は，$792 \div \left(1 - \dfrac{1}{100}\right) = 800$ より，

$$x + y = 800 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

今年度の生徒数は，

$$\left(1 + \frac{8}{100}\right)x + \left(1 - \frac{8}{100}\right)y = 792 \qquad \cdots ②$$

①，②を連立方程式として解いて，

$$\begin{cases} x = 350 \\ y = 450 \end{cases}$$

よって，今年度の人数は，

$$\begin{cases} \text{男子} \cdots \left(1 + \dfrac{8}{100}\right)x = 378 \text{ 人} \\ \text{女子} \cdots \left(1 - \dfrac{8}{100}\right)y = 414 \text{ 人} \end{cases}$$

よって，男子：**378 人**，女子：**414 人**

(4) AとBをそれぞれ定価で売ったときの利益は，

$$2500 \times \frac{a}{10} + 2000 \times \frac{b}{10} = 650$$

整理して，$5a + 4b = 13 \quad \cdots\cdots ①$

A，Bそれぞれの売値は，

$$\text{A}；2500 \times \left(1 + \frac{a}{10}\right) \times \left(1 - \frac{8}{100}\right) = 230a + 2300$$

$$\text{B}；2000 \times \left(1 + \frac{b}{10}\right) \times \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 180b + 1800$$

よって，AとBを売値で売ったときの利益は，

$$(230a + 2300) + (180b + 1800) - (2500 + 2000) = 190$$

整理して，$23a + 18b = 59 \quad \cdots\cdots ②$

①，②を連立方程式として解いて，$\boldsymbol{a = 1}$，$\boldsymbol{b = 2}$

【8】エスカレーターの速さを xm/s，A さんの歩く速さを ym/s とすると，B さんの歩く速さは $2y$m/s となる．

B さんがエスカレーターの終点に着くまでの時間に進んだ距離は，それぞれが進む速さの比になる．

A，B 2 人の進む速さは，それぞれ $(x+y)$m/s，$(x+2y)$m/s なので

$$x+y=\frac{5}{9}(x+2y) \ \cdots①$$

の関係が成り立つ．

一方，残りの $\frac{4}{9}$ を A さんは 10 秒で進んでいるので

$$(x+y)\times 10=45\times\frac{4}{9} \ \cdots②$$

が成り立つ．

① より

$$9x+9y=5x+10y$$

$$\therefore y=4x \ \cdots③$$

② より

$$10(x+y)=20$$

$$\therefore x+y=2 \ \cdots④$$

③ を ④ に代入して

$$x+4x=2$$

$$x=\frac{2}{5}$$

このとき ③ より，$y=\frac{8}{5}$

これらは問題に適する．

(答)　エスカレーターの速さ　**毎秒 $\boldsymbol{\frac{2}{5}(=0.4)}$m**

【9】りんごを x 個，みかんを y 個，なしを z 個選ぶとする．

条件より

$$\begin{cases} 250x+50y+200z=2000 \ \cdots① \\ 210x+30y+150z+180=1800 \ \cdots② \\ x>0,\ y>0,\ z>0 \ \cdots③ \end{cases}$$

① より，$5x+y+4z=40 \ \cdots④$

② より，$7x+y+5z=54 \ \cdots⑤$

⑤ − ④ より

$$2x+z=14$$

$$z=14-2x \ \cdots⑥$$

④ に代入して

$$5x+y+56-8x=40$$

$$y=3x-16 \ \cdots⑦$$

③ と ⑥, ⑦ より

$z = 14 - 2x > 0 \qquad \therefore x < 7$

$y = 3x - 16 > 0 \therefore \dfrac{16}{3} < x$

$\therefore \dfrac{16}{3} < x < 7$

x が自然数なので，条件をみたす x は $x = 6$ のみ.

このとき ⑦，⑥ より，$y = 2$，$z = 2$

これらは条件をみたす.

(答)　りんご **6** 個，みかん **2** 個，なし **2** 個

【10】大人が x 人，学生が y 人入場し，パンフレットが z 冊売れたとすると，以下の式が成り立つ.

$$\begin{cases} x + y = 90 \ \cdots ① \\ 1200x + 300y + 150z = 90000 \ \cdots ② \\ 65 \leqq z \leqq 70 \ \cdots ③ \end{cases}$$

② より

$8x + 2y + z = 600 \ \cdots ④$

④ − ① × 2 より

$6x + z = 420$

$\therefore z = 420 - 6x$

これを ③ に代入すると

$$\begin{array}{ccccc} 65 & \leqq & 420 - 6x & \leqq & 70 \\ -355 & \leqq & -6x & \leqq & -350 \\ \dfrac{350}{6} & \leqq & x & \leqq & \dfrac{355}{6} \\ 58\dfrac{1}{3} & \leqq & x & \leqq & 59\dfrac{1}{6} \end{array}$$

x は自然数より，$x = 59$

① より，$y = 90 - 59 = 31$

④ より，$z = 600 - 8 \times 59 - 2 \times 31 = 66$

これは ③ をみたす.

よって，以上の値は問題に適する.

(答)　大人 **59** 人，学生 **31** 人，パンフレット **66** 冊

【11】(1) ① より

$$7x - a < 10x + 20a + 2$$
$$-21a - 2 < 3x$$
$$\therefore \frac{-21a - 2}{3} < x \quad \cdots ③$$

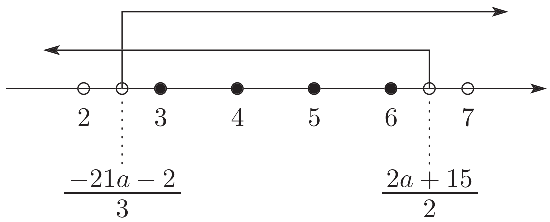
② より

$$20x + 10a - 15 < 18x + 12a$$
$$2x < 2a + 15$$
$$x < \frac{2a + 15}{2} \quad \cdots ④$$

よって，$\dfrac{2a+15}{2} \leqq \dfrac{-21a-2}{3}$ のときに解をもたない．

$$\therefore 6a + 45 \leqq -42a - 4$$
$$48a \leqq -49$$
$$\boldsymbol{a \leqq -\frac{49}{48}}$$

(2)



上の図より，2 が解に入ら

ず 3 が入るには

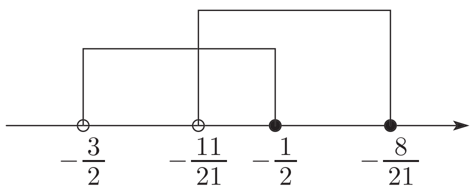
$$2 \leqq \frac{-21a-2}{3} < 3$$
$$6 \leqq -21a - 2 < 9$$
$$8 \leqq -21a < 11$$
$$-\frac{11}{21} < a \leqq -\frac{8}{21} \quad \cdots ⑤$$

さらに，6 が入って 7 が入らないためには

$$6 < \frac{2a+15}{2} \leqq 7$$
$$12 < 2a + 15 \leqq 14$$
$$-3 < 2a \leqq -1$$
$$-\frac{3}{2} < a \leqq -\frac{1}{2} \quad \cdots ⑥$$

⑤，⑥ より，

$$-\frac{11}{21} < a \leqq -\frac{1}{2}$$



$$\left(-\frac{11}{21} = -\frac{22}{42} < -\frac{21}{42} = -\frac{1}{2}\right)$$

【12】(1)　2 つの方程式の解が入れかわっているから，③，④の x，y を入れかえて，

$$\begin{cases} 3y-2x=8 & \cdots\cdots⑤ \\ 2ay+3x=b+11 & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

②，⑤の連立方程式を解くと，

$x=-1$，$y=2$

これを①，⑥ に代入すると，

$$\begin{cases} -a-4b=5 & \cdots\cdots①' \\ 4a-3=b+11 & \cdots\cdots⑥' \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=-2}$

(2)　連立方程式の解の和が 1 であるから，$x+y=1$ より，

$y=1-x \quad \cdots\cdots①$

よって，

$$\begin{cases} x+2y=4 & \cdots\cdots② \\ ax+(1-a)y=8 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①を②に代入すると，

$x+2(1-x)=4$ より，$x=-2$

これを①に代入すると，

$y=1+2=3$

$x=-2$，$y=3$ を ③に代入すると，

$-2a+3(1-a)=8$ より，$\boldsymbol{a=-1}$

【13】
$$\begin{cases} x+y+z=0 & \cdots\cdots① \\ 5x+2y+3z=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② − ① × 2 より，

$3x+z=0$

$z=-3x \quad \cdots\cdots③$

② − ① × 3 より，

$2x-y=0$

$y=2x \quad \cdots\cdots④$

(1) ③，④ より，

$$\begin{aligned} \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z} &= \frac{2x}{x}+\frac{-3x}{2x}+\frac{x}{-3x} \\ &= 2-\frac{3}{2}-\frac{1}{3} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

(2) ③，④ より，

$$\begin{aligned} \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} &= \frac{x^3+8x^3+(-27x^3)}{x\times(2x)\times(-3x)} \\ &= \frac{-18}{-6} \\ &= \boldsymbol{3} \end{aligned}$$

【14】(1) $\begin{cases} ax+5y=13 \cdots\cdots ① \\ 4x-by=-2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

A の解は b の正しい値を用いているので，② 式に，$x=\dfrac{107}{47}$，$y=\dfrac{58}{47}$ を代入

$$\begin{aligned} 4\times\frac{107}{47}-b\times\frac{58}{47}&=-2 \\ 4\times107-b\times58&=-2\times47 \\ 428-58b&=-94 \\ 58b&=522 \\ b&=9 \end{aligned}$$

また，B の解は a の正しい値を用いているので，① 式に，$x=\dfrac{81}{76}$，$y=\dfrac{17}{19}$ を代入して，

$$\begin{aligned} a\times\frac{81}{76}+5\times\frac{17}{19}&=13 \\ a\times81+5\times17\times4&=13\times76 \\ 81a+340&=988 \\ 81a&=648 \\ a&=8 \end{aligned}$$

以上より，$\boldsymbol{a=8,\ b=9}$

(2) a，b の値を ①，② に代入して，

$\begin{cases} 8x+5y=13 \cdots\cdots ③ \\ 4x-9y=-2 \cdots\cdots ④ \end{cases}$

③ − ④ × 2 より，

$$y=\frac{17}{23}$$

これを ④ に代入して，

$$\begin{aligned} 4x-9\times\frac{17}{23}&=-2 \\ 4x&=\frac{107}{23} \\ x&=\frac{107}{92} \end{aligned}$$

以上より，$\boldsymbol{x=\dfrac{107}{92},\ y=\dfrac{17}{23}}$

【15】Ａから y g の食塩水をＢに入れた後の，Ｂの中に含まれる食塩の重さに着目して，

$$\frac{6}{100}y + 400 \times \frac{4}{100} = (y+400) \times \frac{4.4}{100}$$

これを解いて，$y = 100$

操作後のＣとＡの中の食塩の重さに着目して，

$$100 \times \frac{4.4}{100} + 300 \times \frac{x}{100} = (100+300) \times \frac{z}{100} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$100 \times \frac{z}{100} + (500-100) \times \frac{6}{100} = 500 \times \frac{5.32}{100} \qquad \cdots\cdots ②$$

②より，$z = 2.6$

①に代入して，$x = 2$

したがって，$\boldsymbol{x = 2}$，$\boldsymbol{y = 100}$，$\boldsymbol{z = 2.6}$

３章　証明問題の探求（１）

問題

【1】(1) $\angle a$ と $\angle b$

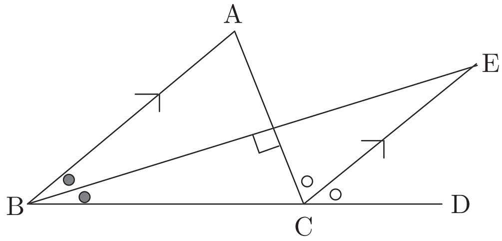
(2) $\angle a$ と $\angle c$, $\angle b$ と $\angle d$, $\angle c$ と $\angle f$

(3) $\angle a$ と $\angle d$, $\angle b$ と $\angle c$, $\angle d$ と $\angle f$

(4) $\angle c$ と $\angle e$, $\angle d$ と $\angle e$

注意：平行線でなくとも同位角・錯角・同側内角の関係となる.

【2】



AB//CE より，平行線の錯角は等しいので,

$\angle$ACE=$\angle$BAC ······①

同位角は等しいので,

$\angle$ECD=$\angle$ABC ······②

仮定より，$\angle$ACE=$\angle$ECD なので，これと ①，② より,

$\angle$BAC=$\angle$ABC ······③

一方，BE は $\angle$B の二等分線であり，これが対辺 AC と垂直に交わるので，△ ABC は BA=BC の二等辺三角形である.

∴ $\angle$BAC=$\angle$BCA ······④

③，④ より,

$\angle$BAC=$\angle$ABC=$\angle$BCA

よって，3 つの角がすべて等しいので，△ ABC は正三角形である.　（証明終）

【3】ア　**錯角**　イ　**$\angle$ACE**　ウ　**同位角**　エ　**$\angle$AEC**

オ　**$\angle$BAD**　カ　**$\angle$AEC**　キ　**角**

【4】ア　**△ ACE**　イ　**(すべての) 辺 (の長さ)**

ウ　AC　エ　AE

オ　**(すべての) 角 (の大きさ) は 60°**　カ　**$\angle$BAC**

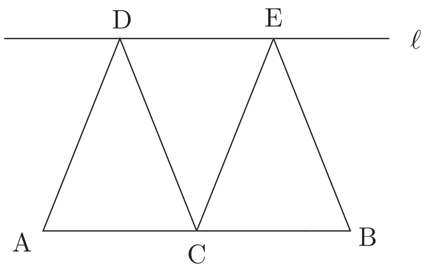
キ　**$\angle$DAE**　ク　**$\angle$CAE**

ケ　**2 つの辺とその間の角がそれぞれ等しい（2 辺夾角相等な）**

コ　**△ ACE**　サ　**$\angle$ACE**

シ　**$\angle$BAC**　ス　**錯角**

【5】△ ACD と△ BCE において，



仮定より，

AC=BC ⋯⋯①

CD=CE ⋯⋯②

ここで，ℓ //AB より，錯角は等しいので，

∠ACD=∠CDE

① より，△ CDE は二等辺三角形である．

二等辺三角形の底角は等しいから，

∠CDE=∠CED

さらに，ℓ //AB より，

∠CED=∠BCE

ゆえに，

∠ACD=∠BCE⋯⋯③

①，②，③ より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ ACD≡ △ BCE

合同な図形の対応する辺の長さは等しいから，

AD=BE　（証明終）

【6】(1) 正しい

〔証明〕

仮定 BP=CP より，△ BPC は二等辺三角形．

その底角は等しいので，

∠PBC=∠PCB ⋯⋯①

ここで，△ BDC と△ CEB において，

BC は共通 ⋯⋯②

① より，∠CBD=∠BCE ⋯⋯③

AB=AC より，∠DCB=∠EBC ⋯⋯④

②，③，④ より，1 辺とその両端の角が等しいので，

△ BDC≡ △ CEB

∴ BD=CE　（証明終）

(2) 正しくない

〔成り立たない例〕

右の図で，E′ は BE′ =CD となる点.

このとき，CE′ =BD となる.

∠CE′E=∠CEE′ となる点 E をとれば，

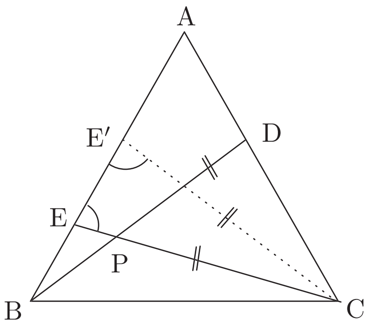
CE′ =CE より，

BD=CE

となるが，

BP≒CP

である.



【7】(1) ア　△ QDA　　イ　(2 組の) 対辺は等しい

ウ　DC(CD)　　エ　QD

オ　DA　　カ　(2 組の) 対角は等しい

キ　∠CDA (∠ADC)　　ク　∠CDQ (∠QDC)

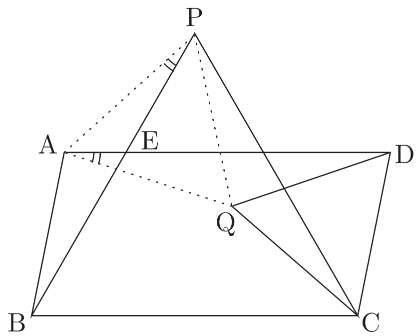
ケ　∠QDA

コ　2 辺とその間の角がそれぞれ等しい (2 辺夾角相等な)

サ　△ QDA　　シ　辺

ス，セ　AP，AQ

(2) いえる



AD と BP の交点を E とする.

△ ABP ≡ △ QDA より

$\angle BPA = \angle DAQ$ ···①

一方，

$\angle QAP = \angle DAQ + \angle DAP$

$= \angle BPA + \angle DAP$　［①より］

$= \angle PED$　［三角形の外角と内対角の関係］

$= \angle EBC$　［平行線の同位角］

$= 60^\circ$　［正三角形の内角］

よって，△ APQ は頂角が 60° の二等辺三角形なので，残る 2 つの角も 60° となり，正三角形となる.

【8】 (1) 図 I で，斜線部分がひし形のとき，

AN=NC=CM=MA，AC⊥MN

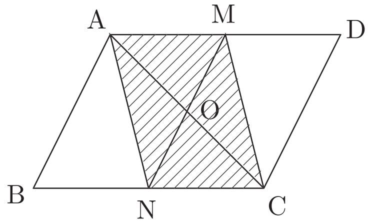
したがって，

△ANO≡△CNO≡△CMO

≡△AMO

つまり，合同な三角形は **3 個**

〔図 I〕

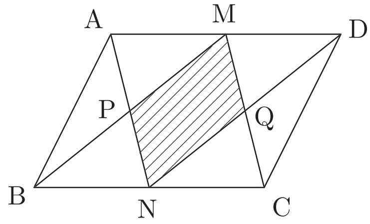


(2) 図 I の斜線部分は AM と NC が平行で等しいので，平行四辺形であるから，ひし形になるためには，AC⊥MN となればよい．

よって，AB//MN より，

AB ⊥ AC

〔図 II〕



(3) 図 II において，四角形 ANCM，MBND とも 1 組の対辺が平行で等しいから，平行四辺形である．したがって，四角形 MPNQ は平行四辺形である．これが長方形になるためには，

∠MPN= 90° ……①

四角形 ABNM も 1 組の対辺が平行で等しいから平行四辺形で，① よりひし形であればよい．

したがって，AB=AM

つまり，$\mathbf{AB=\frac{1}{2}AD}$

【9】 $\boxed{\text{証明 1}}$

△ABE と△CDF において，

仮定より，AB=CD，BE=DF

AB // DC より，∠ABE=∠CDF

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ABE ≡ △CDF

したがって，AE=CF …①

また，∠AEB=∠CFD より，∠AEF=∠CFE

錯角が等しいので，AE // CF …②

①，② より，1 組の対辺が平行でその長さが等しいので，四角形 AECF は平行四辺形である．　（証明終）

証明２

AE=CF $\cdots$① を示してから, 次のように証明してもよい.

同様にして $\triangle$ CBE $\equiv$ $\triangle$ ADF より，CE=AF $\cdots$③

①，③ より，2 組の対辺がそれぞれ等しいので，四角形 AECF は平行四辺形である.

（証明終）

証明３

AC と BD の交点を O とすると，平行四辺形の対角線は互いに中点で交わるので,

$\text{AO} = \text{CO}$ $\cdots$①

$\text{BO} = \text{DO}$ $\cdots$②

仮定より $\text{BE} = \text{DF}$ なので，② から,

$\text{BO} - \text{BE} = \text{DO} - \text{DF}$

$\therefore \text{EO} = \text{FO}$

これと ① より，対角線が互いに中点で交わる四角形は平行四辺形なので，四角形 AECF は平行四辺形である.　　（証明終）

※ 証明の仕方は, この他にも数通り考えられる.

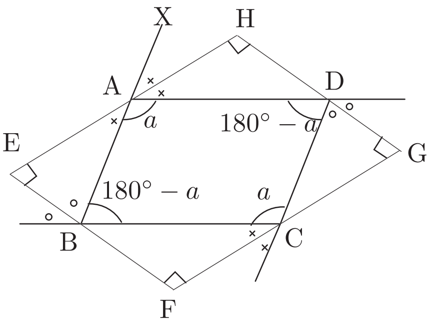
【10】$\angle\text{BAD} = a$ とすると,

AD // BC より，$\angle\text{ABC} = 180^\circ - a$

線分 BA の延長線上に X をとると,

$$\angle\text{EAB} = \angle\text{HAX} = \frac{1}{2}(180^\circ - a)$$
$$= 90^\circ - \frac{1}{2}a$$

$$\angle\text{EBA} = \frac{1}{2}\{180^\circ - (180^\circ - a)\}$$
$$= \frac{1}{2}a$$



$\triangle$ EBA において,

$$\angle\text{AEB} = 180^\circ - (\angle\text{EAB} + \angle\text{EBA})$$
$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

同様に,

$\triangle$ BFC で，$\angle\text{F} = 90^\circ$

$\triangle$ CGD で，$\angle\text{G} = 90^\circ$

$\triangle$ DHA で，$\angle\text{H} = 90^\circ$

よって，四角形 EFGH は 4 つの角がすべて 90° となるから，長方形である.　　（証明終）

【11】$\triangle$ PAS と $\triangle$ PBQ において，

正方形の対角線から，

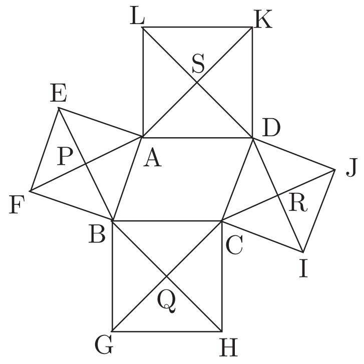
PA=PB ……①

正方形 BGHC と DKLA は，1 辺の長さが等しいので，合同である．

よって，同様に，

AS=BQ ……②

また，



$$\angle\text{PAS} = 360^\circ - (\angle\text{PAB} + \angle\text{SAD} + \angle\text{BAD})$$
$$= 360^\circ - (45^\circ + 45^\circ + \angle\text{BAD})$$
$$= 270^\circ - \angle\text{BAD}$$

$$\angle\text{PBQ} = \angle\text{PBA} + \angle\text{ABC} + \angle\text{CBQ}$$
$$= 45^\circ + \angle\text{ABC} + 45^\circ$$
$$= 90^\circ + \angle\text{ABC}$$

ここで，AD // BC より，$\angle\text{BAD} = 180^\circ - \angle\text{ABC}$ だから，

$$\angle\text{PAS} = 270^\circ - (180^\circ - \angle\text{ABC}) = 90^\circ + \angle\text{ABC}$$

したがって，

$\angle\text{PAS} = \angle\text{PBQ}$ ……③

①，②，③より，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

$\triangle\text{PAS} \equiv \triangle\text{PBQ}$

よって，$\angle\text{SPA} = \angle\text{QPB}$ ……④

同様にして，

$\triangle\text{PAS} \equiv \triangle\text{PBQ} \equiv \triangle\text{RCQ} \equiv \triangle\text{RDS}$

よって，

SP=PQ=QR=RS ……⑤

また，

$\angle\text{SPQ} = \angle\text{SPA} + \angle\text{APB} - \angle\text{QPB} = \angle\text{APB} = 90^\circ$ …⑥

⑤，⑥より，四角形 PQRS は，1 つの角が直角であるひし形だから，正方形である．

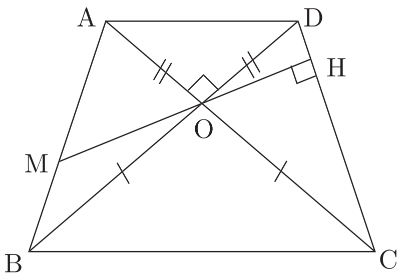
（証明終）

【12】仮定より，明らかに$\triangle AOB \equiv \triangle DOC$

したがって，

$\angle OAB = \angle ODC$ ……①

$\angle OBA = \angle OCD$ ……②



ここで，

$$\begin{aligned}\angle ODH &= 90^\circ - \angle DOH \\ &= \angle COH \\ &= \angle AOM\end{aligned}$$

① より，$\angle OAM = \angle AOM$ となるので，

$MA = MO$ ……③

同様に，

$$\begin{aligned}\angle OCH &= 90^\circ - \angle COH \\ &= \angle DOH \\ &= \angle BOM\end{aligned}$$

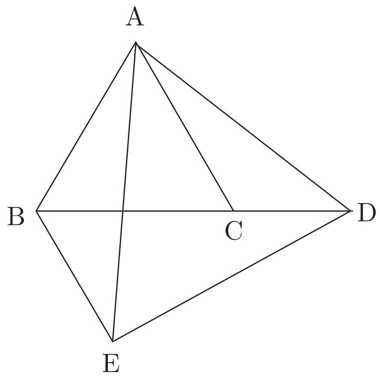
② より，$\angle OBM = \angle BOM$ となるので，

$MB = MO$ ……④

③，④ より，M は AB の中点である．　（証明終）

４章　証明問題の探求（２）

問題



【1】△ ABE と△ ACD において，

仮定より，

AB=AC

AE=AD

また，

$\angle$BAE=$\angle$BAC$-\angle$EAC$=60^\circ-\angle$EAC

$\angle$CAD=$\angle$EAD$-\angle$EAC$=60^\circ-\angle$EAC

よって，

$\angle$BAE=$\angle$CAD

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ ABE≡ △ ACD

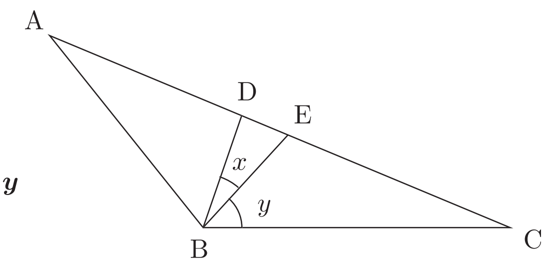
合同な図形の対応する角はそれぞれ等しいので，

$\angle$ABE=$\angle$ACD$=120^\circ$

よって，$\angle$CBE$=60^\circ$ となるので，

$\angle$ACB=$\angle$CBE より，

AC//BE　（証明終）



【2】(1) CB=CD より，

$\angle$BDE$=\boldsymbol{x+y}$

AB=AE より，

$\angle$BED=$\angle$ABE$=\boldsymbol{a-y}$

（または，$\angle$BED$=\boldsymbol{180^\circ-2x-y}$

でもよい）

(2) (1) より，

$\angle$BED$=a-y=180^\circ-2x-y$

x について解くと，

$2x=180^\circ-a$

$x=\boldsymbol{90^\circ-\dfrac{a}{2}}$

(3) (2) より，

$30^\circ=90^\circ-\dfrac{a}{2}$

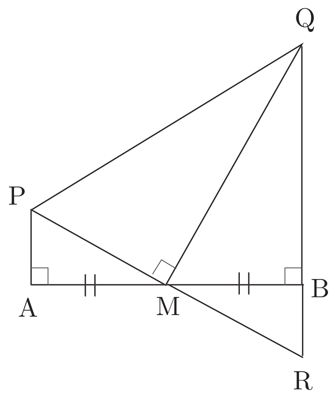
$a=\boldsymbol{120^\circ}$

(4) $x=x+y=a-y=60^\circ$ より，

$y=0^\circ,\ x=a=60^\circ$

したがって，**正三角形のときである．**

【3】(1) 直線 PM と直線 QB の交点を R とする．



△ APM と△ BRM において，

AM=BM（仮定）

∠PAM = ∠RBM（= 90°）

∠AMP = ∠BMR（対頂角）

よって，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

△ APM ≡ △ BRM

したがって，

PM=RM ……①

∠APM = ∠BRM ……②

次に，△ PMQ と△ RMQ において，

MQ 共通

PM=RM（①より）

∠PMQ = ∠RMQ（= 90°）

よって，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ PMQ ≡ △ RMQ

したがって，∠QPM = ∠QRM ……③

②，③より，

∠APM = ∠QPM （証明終）

(2) (1) において，

△ APM ≡ △ BRM より，PA=RB

△ PMQ ≡ △ RMQ より，PQ=RQ

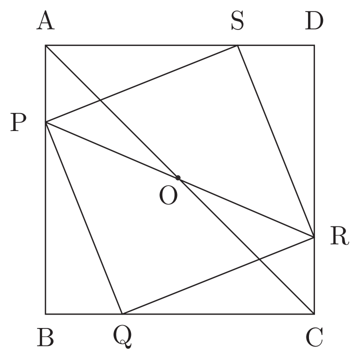
したがって，

PQ=RQ=RB+BQ=PA+QB

すなわち，PQ=PA+QB （証明終）

【4】(1) 4点P，Q，R，Sは同じ速さで動くので，

$AP=BQ=CR=DS$ ……①



したがって，

$SA=PB=QC=RD$ ……②

また，

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D\ (= 90^\circ)$ …③

まず，$\triangle APS$ と $\triangle BQP$ において

①より，$AP = BQ$

②より，$SA = PB$

③より，$\angle A = \angle B$

であるから，2辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

$\triangle APS \equiv \triangle BQP$

同様に，$\triangle BQP$ と $\triangle CRQ$，$\triangle CRQ$ と $\triangle DSR$，$\triangle DSR$ と $\triangle APS$ において，それぞれ

$\triangle BQP \equiv \triangle CRQ$，$\triangle CRQ \equiv \triangle DSR$，$\triangle DSR \equiv \triangle APS$

となるから

$\triangle APS \equiv \triangle BQP \equiv \triangle CRQ \equiv \triangle DSR$

$\therefore\ PS=QP=RQ=SR$ ……④

さらに，$\angle BPQ = \angle ASP$ であるから，

$\angle BPQ + \angle APS = \angle ASP + \angle APS = 90^\circ$

$\therefore\ \angle SPQ = 90^\circ$ ……⑤

④，⑤より，四角形PQRSは，1つの角が 90° のひし形であるから，正方形である．（証明終）

(2) ACの中点をOとすると，

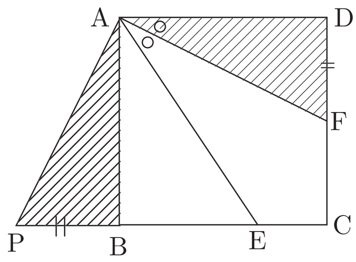
仮定より，

$AP=CR$，$AP \parallel CR$

よって，四角形APCRは1組の対辺が平行で，その長さが等しいから，平行四辺形である．

平行四辺形において，対角線は互いに中点で交わるので，PRはつねにACの中点Oを通る．（証明終）

【5】CB の延長線上に，BP=DF となる点 P をとる．



△ APB と△ AFD において，四角形 ABCD が正方形だから，

AB=AD

$\angle ABP = \angle ADF (= 90°)$

また，PB=FD

よって，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ APB ≡ △ AFD　$\cdots$①

ここで，$\angle DAF = \angle EAF = \angle a$ とおく．

①より，$\angle PAB = \angle FAD = \angle a$ だから，△ APB において，

$\angle APB = 90° - \angle a$　$\cdots$②

また，

$$\begin{aligned}\angle PAE &= \angle PAB + \angle BAE \\ &= \angle a + (90° - 2\angle a) = 90° - \angle a \quad \cdots ③\end{aligned}$$

②，③より，

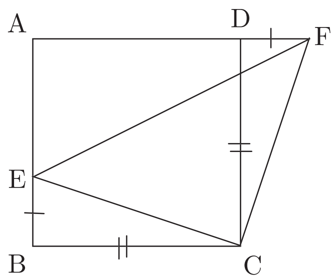
$\angle APB = \angle PAE$

2 つの角が等しいから，△ EAP は二等辺三角形で，AE=PE

したがって，PE=PB+BE=FD+BE より，

AE=BE+DF　（証明終）

【6】(1) △ BCE と△ DCF において，



四角形 ABCD は正方形より，

BC=DC

$\angle EBC = \angle FDC\ (= 90°)$

仮定より，BE=DF

よって，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ BCE ≡ △ DCF

したがって，

CE=CF　$\cdots\cdots$①

$\angle BCE = \angle DCF$　$\cdots\cdots$②

②より，

$$\begin{aligned}\angle ECF &= \angle ECD + \angle DCF \\ &= \angle ECD + \angle BCE \\ &= \angle BCD = 90°\end{aligned}$$

つまり，$\angle ECF = 90°$　$\cdots\cdots$③

①，③より，△ CEF は，$\angle ECF = 90°$ の直角二等辺三角形である．

ゆえに，$\angle CEF = \mathbf{45°}$　（証明終）

(2) F を通り AB に平行な直線と，BD の延長との交点を Q とする．

△ BPE と△ QPF において，

AB // QF より，

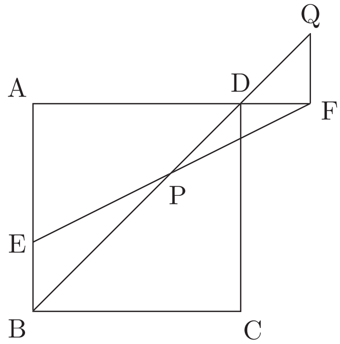
∠PBE = ∠PQF　……①

∠PEB = ∠PFQ　……②

また，

∠DFQ (= ∠A) = 90°

∠FQD (= ∠ABD) = 45°



より，△ FDQ は，∠DFQ を頂角とする直角二等辺三角形だから，

DF=QF

よって，

BE=QF(=DF)　……③

①，②，③より，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

△ BPE ≡ △ QPF

したがって，EP=FP より，P は EF の中点である．　（証明終）

【7】DE の延長上に，BC=CK となる K をとり，BC と AK の交点を F とすると，

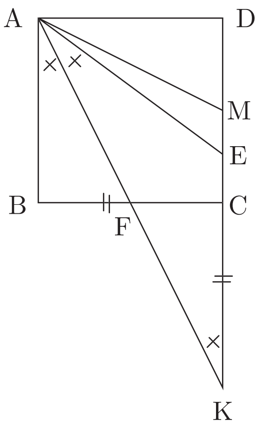
AE=CE+BC=CE+CK=EK

つまり，△ EAK は二等辺三角形となるので，

∠EAK=∠EKA …… ①

また，DK// AB なので

∠EKA=∠FAB　(錯角)



よって，∠EAB=2∠FAB

△ ABF と△ KCF において

∠FAB=∠CKF，AB=CK

∠FBA=∠FCK=90 °

よって，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

△ ABF≡ △ KCF

したがって，BF=CF より，F は BC の中点となる．

△ ADM と△ ABF において，

AD=AB，DM=BF

∠ADM=∠ABF

よって，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ ADM≡ △ ABF

よって，∠MAD=∠FAB=∠EAF

∠EAB=2∠DAM　（証明終）

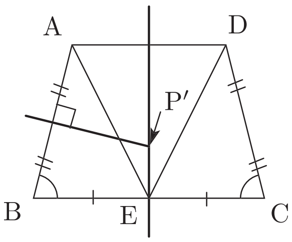
【8】BC の中点を E とすると，△ ABE と△ DCE において

$BE=CE$，$AB=DC$

$\angle B=\angle C$

よって，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ ABE≡ △ DCE



したがって，AE=DE より，△ ADE は二等辺三角形.
ゆえに，E は AD の垂直二等分線上の点でもある.
また，AD//BC より，BC の垂直二等分線は AD の垂直二等分線でもある.
ここで，AB，BC の垂直二等分線の交点を P′ とすると，

$AP' = BP'$，$BP' = CP'$

また，P′ は AD の垂直二等分線上の点でもあったので

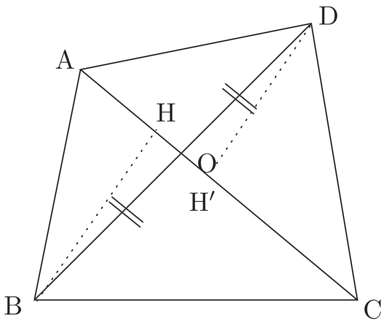
$AP' = DP'$

よって，

$CP' = DP'$

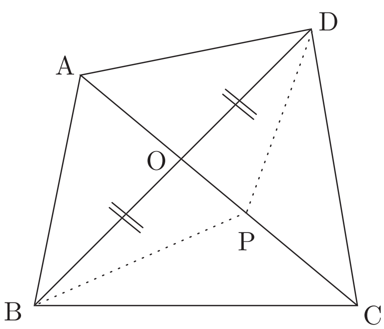
すなわち，P′ は CD の垂直二等分線上にある．よって，P′ と P は一致する.
つまり，AB と CD それぞれの垂直二等分線の交点 P は，BC の垂直二等分線上にある.
したがって，BP=CP　（証明終）

【9】(1) 右の図において，△ OBH≡ △ ODH′ より，△ ABC と△ ADC は，底辺 AC が共通で高さが等しい.
よって△ ABC もしくは△ ADC の面積を 2 等分すればよいことになるので，求める点 P は AC の中点である.　（証明終）



(2) AC と BD の交点を O とする.
AP+PC=AC であるから，これは一定である.
よって，BP+PD が最小になるようにすればよい.
P が O と重ならないときは，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長いので，

$BP+PD>BD$



が成り立つ．よってこのとき BP+PD は常に BD より長い.
よって，BP+PD を最小にするには P を BD 上にとればよい.
すなわち AC，BD の対角線の交点 O に一致されればよい.

2MJSS/2MJS/2MJ
中２選抜東大・医学部数学
中２数学
中２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	