3MJS/3MJ

春期講習　確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

中３数学

中３東大数学

【1】(1) 接弦定理より $\angle\mathrm{DBA} = 57^\circ$.

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}} : \overset{\frown}{\mathrm{DA}} = \angle\mathrm{CBD} : \angle\mathrm{DBA}$ より

$$2 : 3 = \angle\mathrm{CBD} : 57^\circ \qquad \therefore \angle\mathrm{CBD} = 38^\circ$$

四角形 ABCD は円に内接しているので

$$\begin{aligned} x + \angle\mathrm{ABC} &= 180^\circ \\ x &= 180^\circ - (57^\circ + 38^\circ) = \mathbf{85^\circ} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8^2 \quad \cdots\cdots ① \\ (7-x)^2 + y^2 &= 6^2 \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

①−②より,

$$\begin{aligned} -7^2 + 14x &= 8^2 - 6^2 \\ x &= \frac{8^2 - 6^2 + 7^2}{14} \\ &= \frac{(8+6)\times(8-6)+7^2}{14} \\ &= \frac{7\times 2\times 2 + 7^2}{14} \\ &= \frac{4+7}{2} \\ &= \mathbf{\frac{11}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 8^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{16^2 - 11^2}{2^2} = \frac{27\times 5}{2^2} \\ y &= \mathbf{\frac{3\sqrt{15}}{2}} \end{aligned}$$

(3) $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{DAC}$ より, $\overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}}$

弧の長さが等しければ, 弦の長さは等しいので, $\mathrm{CD} = \mathrm{BC}$

よって, $x = \mathbf{6}$

$\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{DCE}$ より,

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3} : y &= 6 : 4 \\ y &= \mathbf{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

【2】 $x = \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$
$y = \sqrt{5-\sqrt{24}} = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

(1) $x+y = 2\sqrt{3}$

(2) $xy = 1$

(3)
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= (2\sqrt{3})^2 - 2\times 1 \\ &= \mathbf{10} \end{aligned}$$

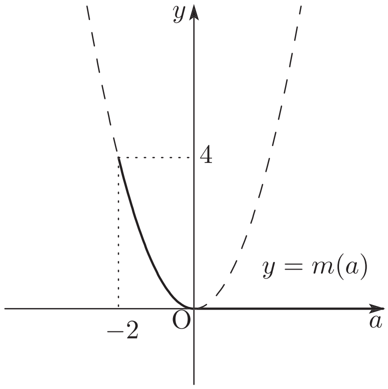
(4)
$$\begin{aligned} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\ &= \frac{10}{1} \\ &= \mathbf{10} \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= \frac{x+y}{xy} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{1} \\ &= \mathbf{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

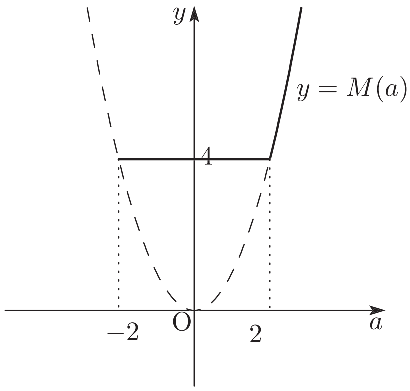
(6)
$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1} &= \frac{(y+1)+(x+1)}{(x+1)(y+1)} \\ &= \frac{x+y+2}{xy+(x+y)+1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+2}{1+2\sqrt{3}+1} \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned} x^3-x^2y-xy^2+y^3 &= x^2(x-y)-(x-y)y^2 \\ &= (x-y)(x^2-y^2) \\ &= (x-y)^2(x+y) \\ &= (x^2-2xy+y^2)(x+y) \\ &= (10-2)\times 2\sqrt{3} \\ &= \mathbf{16\sqrt{3}} \end{aligned}$$

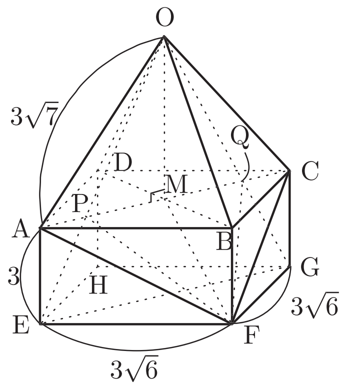
【3】(1) $-2 \leqq a < 0$ のとき，最小値は $x = a$ のとき，$y = a^2$．よって，$m(a) = a^2$
$0 \leqq a$ のとき，最小値は $x = 0$ のとき，$y = 0$．よって，$m(a) = 0$
以上よりグラフは下図.



(2) $-2 \leqq a < 2$ のとき，最大値は $x = -2$ のとき，$y = 4$．よって，$M(a) = 4$
$2 \leqq a$ のとき，最大値は $x = a$ のとき，$y = a^2$，よって，$M(a) = a^2$
以上よりグラフは下図.



【4】(1) 右の図で，正方形 ABCD の対角線の交点を M とすると，OM⊥AC，OM⊥BD より，OM⊥〔面 ABCD〕となり，線分 OM の長さが正四角すい O−ABCD の高さである．よって，△OAM は直角三角形だから，三平方の定理より，$\mathrm{OM} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AM}^2}$ が成り立つ．したがって，$\mathrm{OA} = 3\sqrt{7}$，$\mathrm{AC} = \sqrt{2}\mathrm{AB} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 6\sqrt{3}$ より，$\mathrm{AM} = 6\sqrt{3} \div 2 = 3\sqrt{3}$ だから，



$$\mathrm{OM} = \sqrt{(3\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$$

である．

(2) 線分 OE，OG と正方形 ABCD との交点 P，Q は，それぞれ上図のように線分 OE，OG と正方形 ABCD の対角線 AC との交点である．これより，AC // EG なので，△OPQ ∽ △OEG となる．よって，PQ : EG = OP : OE が成り立つ．また，$\angle\mathrm{OMP} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{EAP} = 90^\circ$ より，OM // AE となり，△OPM ∽ △EPA であるから，OP : EP = OM : EA = 6 : 3 = 2 : 1 となる．したがって，$\mathrm{OP} : \mathrm{OE} = 2 : (2+1) = 2 : 3$ となり，$\mathrm{EG} = 6\sqrt{3}$ だから，$\mathrm{PQ} : 6\sqrt{3} = 2 : 3$ より，$\mathrm{PQ} \times 3 = 6\sqrt{3} \times 2$,

$$\mathbf{PQ = 4\sqrt{3}}$$

となる．

(3) 右上の図の △FAC は FA = FC の二等辺三角形であり，点 M は辺 AC の中点だから，FM⊥AC である．これより，△PFQ で，辺 PQ を底辺とすると，高さは線分 FM の長さとなる．ここで，線分 FM の長さを，△FMB に着目して求める．$\angle\mathrm{FBM} = 90^\circ$，$\mathrm{BF} = \mathrm{AE} = 3$，$\mathrm{BM} = \mathrm{AM} = 3\sqrt{3}$ だから，三平方の定理より，$\mathrm{FM} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$ となる．したがって，

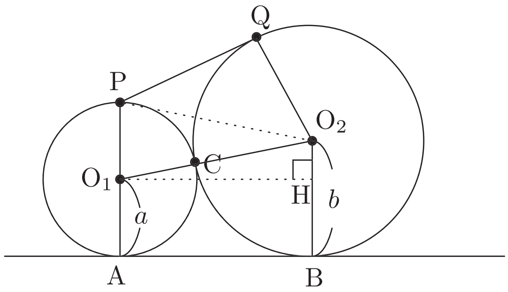
$$\triangle\mathrm{PFQ} = \frac{1}{2} \times \mathrm{PQ} \times \mathrm{FM} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 6 = \mathbf{12\sqrt{3}}$$

である．

【5】(1) 図より，

$$AB^2 = (a+b)^2 - (b-a)^2 = 4ab$$

$$\therefore \quad AB = \boldsymbol{2\sqrt{ab}}$$



(2) $PO_2{}^2$ を表すと

$$\begin{aligned} PO_2{}^2 &= PQ^2 + QO_2{}^2 \\ &= AB^2 + (AP - BO_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad PQ^2 + b^2 &= 4ab + (2a-b)^2 \\ PQ^2 &= 4ab + 4a^2 - 4ab + b^2 - b^2 \\ &= 4a^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad PQ = 2a = AP \qquad \text{(証明終)}$$