3MJS/3MJ

春期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

中３数学

中３東大数学

問題

【1】(1) ① $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\boldsymbol{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

② $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\sqrt{5}-1}$

③

$$\begin{aligned}\sqrt{11+6\sqrt{2}}&=\sqrt{11+2\sqrt{18}}\\&=\boldsymbol{3+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}\sqrt{35-3\sqrt{96}}&=\sqrt{35-2\sqrt{216}}\\&=\sqrt{27}-\sqrt{8}\\&=\boldsymbol{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

⑤

$$\begin{aligned}\sqrt{4+\sqrt{15}}&=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}\\&=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}}\end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{19}{12}+\sqrt{\frac{5}{3}}}&=\sqrt{\frac{19}{12}+\frac{\sqrt{15}}{3}}\\&=\sqrt{\frac{19+4\sqrt{15}}{12}}\\&=\frac{\sqrt{19+2\sqrt{60}}}{2\sqrt{3}}\\&=\frac{\sqrt{15}+2}{2\sqrt{3}}\\&=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}}\end{aligned}$$

(2)

$$x = \frac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}},\ y = \frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{2\{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})+(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{2\times 2(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})^2-3} \\ &= \frac{4(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \\ &= 2+\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$xy = \frac{4}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

①

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= (2+\sqrt{2})^2-2\sqrt{2} \\ &= 4+4\sqrt{2}+2-2\sqrt{2} \\ &= \mathbf{6+2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= \frac{x+y}{xy} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \mathbf{1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned} \frac{y}{x}+\frac{x}{y} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\ &= \frac{6+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \mathbf{3\sqrt{2}+2} \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned} x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 \\ &= (6+2\sqrt{2})^2-2\times(\sqrt{2})^2 \\ &= 36+24\sqrt{2}+8-4 \\ &= \mathbf{40+24\sqrt{2}} \end{aligned}$$

⑤

$$
\begin{aligned}
&x^3+x^2y+xy^2+y^3\\
=&x^2(x+y)+(x+y)y^2\\
=&(x^2+y^2)(x+y)\\
=&(6+2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})\\
=&12+10\sqrt{2}+4\\
=&\mathbf{16+10\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

⑥

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\\
=&\frac{y+1+x+1}{(x+1)(y+1)}\\
=&\frac{(x+y)+2}{xy+(x+y)+1}\\
=&\frac{2+\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+1}\\
=&\frac{4+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\\
=&\frac{(4+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{9-8}\\
=&12-5\sqrt{2}-4\\
=&\mathbf{8-5\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

⑦

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y-2}=&\frac{y-2+x-2}{(x-2)(y-2)}\\
=&\frac{(x+y)-4}{xy-2(x+y)+4}\\
=&\frac{2+\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}-2(2+\sqrt{2})+4}\\
=&\frac{\sqrt{2}-2}{-\sqrt{2}}\\
=&\mathbf{\sqrt{2}-1}
\end{aligned}
$$

【2】 (1) $2<\sqrt{6}<3$ より，$a=\sqrt{6}-2$

$$\frac{a-1}{a+1}=\frac{\sqrt{6}-3}{\sqrt{6}-1}=\frac{(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)}=\mathbf{\frac{3-2\sqrt{6}}{5}}$$

(2) $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ だから，$2<\sqrt{8}<3$ より，$a=2$，$b=2\sqrt{2}-2$

$$2ab+b^2=b(2a+b)=(2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+2)=(2\sqrt{2})^2-2^2=\mathbf{4}$$

(3) $1<\sqrt{3}<2$ より，$-2<-\sqrt{3}<-1$

よって，$2<4-\sqrt{3}<3$ だから，

$$x=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$$

$x-2=-\sqrt{3}$ より，$x^2-4x+4=3$

したがって，

$$x^2-4x+7=(x^2-4x+4)+3=3+3=\mathbf{6}$$

【3】(1) $3x^2-ax+a^2+2a-8=0$ に $x=a-2$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
3(a-2)^2-a(a-2)+a^2+2a-8&=0\\
3a^2-12a+12-a^2+2a+a^2+2a-8&=0\\
3a^2-8a+4&=0\\
(a-2)(3a-2)&=0\\
a&=2,\ \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

i) $a=2$ のとき, $3x^2-2x=0$ $\quad\therefore\ \boldsymbol{x=0,\ \frac{2}{3}}$

ii) $a=\frac{2}{3}$ のとき

$$
\begin{aligned}
3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{4}{3}-8&=0\\
3x^2-\frac{2}{3}x-\frac{56}{9}&=0
\end{aligned}
$$

$x=a-2=-\frac{4}{3}$ が解より,

$$(3x+4)\left(x-\frac{14}{9}\right)=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x=-\frac{4}{3},\ \frac{14}{9}}$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&x^2-3ax+2a^2=0\ \cdots①\\
&x^2-4ax+3a^2+a+6=0\ \cdots②
\end{aligned}
$$

① より, $(x-a)(x-2a)=0$ $\quad\therefore\ x=a,\ 2a$

i) $x=a$ を ② に代入すると,

$$
\begin{aligned}
a^2-4a^2+3a^2+a+6&=0\\
a&=-6
\end{aligned}
$$

ii) $x=2a$ を ② に代入すると,

$$
\begin{aligned}
4a^2-8a^2+3a^2+a+6&=0\\
-a^2+a+6&=0\\
a^2-a-6&=0\\
(a+2)(a-3)&=0\\
a&=-2,\ 3
\end{aligned}
$$

よって, $\boldsymbol{a=-6,\ -2,\ 3}$

【4】(1) $3x^2-(6a-4)x+3a^2-a+1=0$ において，判別式 $D \geqq 0$ となればよい．

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(3a-2)^2-3(3a^2-a+1)\geqq 0\\ 9a^2-12a+4-9a^2+3a-3&\geqq 0\\ -9a+1&\geqq 0\\ \boldsymbol{a}&\boldsymbol{\leqq \frac{1}{9}}\end{aligned}$$

(2) $(k-1)x^2+(2k-2)x-2k+3=0$

$k=1$ のとき，左辺 $=1$ となるので，方程式の解はない．

$k \neq 1$ のとき，判別式 $D=0$ が条件．

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)(-2k+3)&=0\\ (k-1)\{(k-1)-(-2k+3)\}&=0\\ (k-1)(3k-4)&=0\end{aligned}$$

$k \neq 1$ より，$\boldsymbol{k=\frac{4}{3}}$

(3) $(a+2)x^2-(2a+6)x+b=0\ \cdots$①

$a+2 \neq 0$ のもとで，$D=0$ が重解条件．

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}=(a+3)^2-(a+2)b&=0\\ a^2+(6-b)a+9-2b&=0\ \cdots②\end{aligned}$$

この方程式をみたす a が 1 つだけ存在すればよい．

この方程式の判別式を D_1 として，

$$\begin{aligned}D_1=(6-b)^2-4(9-2b)&=0\\ 36-12b+b^2-36+8b&=0\\ b^2-4b&=0\\ b(b-4)&=0\\ b&=0,\ 4\end{aligned}$$

② より，

$b=0$ のとき，$a^2+6a+9=0$ $\quad\therefore a=-3$

$b=4$ のとき，$a^2+2a+1=0$ $\quad\therefore a=-1$

これらは $a+2 \neq 0$ をみたす．

① より，

$b=0,\ a=-3$ のとき，$-x^2=0$ $\quad\therefore x=0$

$b=4,\ a=-1$ のとき，$x^2-4x+4=0$ $\quad\therefore x=2$

以上より，

$\boldsymbol{b=0}$ のとき，$\boldsymbol{a=-3,\ x=0}$

$\boldsymbol{b=4}$ のとき，$\boldsymbol{a=-1,\ x=2}$

【5】 $x^2+2x+3a=0 \ \cdots$(i) と，

$x^2+2ax+a^2-a-1=0 \ \cdots$(ii) の判別式が，ともに正か 0 ならばよいので，

(i) より

$$\frac{D}{4}=1-3a \geqq 0$$
$$a \leqq \frac{1}{3}$$

(ii) より

$$\frac{D}{4}=a^2-(a^2-a-1)=a+1 \geqq 0$$
$$a \geqq -1$$

よって，$-1 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$．題意をみたす整数 a は，$\mathbf{-1,\ 0}$

【6】(1) $2x^2+6x-1=0$ において，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{6}{2}=-3,\ \alpha\beta=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

① $$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-3)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)=9+2=\mathbf{11}$$

② $$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{9+1}{\frac{1}{4}}=\mathbf{40}$$

③ $$\begin{aligned}\frac{1}{(\alpha-1)^2}+\frac{1}{(\beta-1)^2}&=\frac{(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2}{(\alpha-1)^2(\beta-1)^2}\\&=\frac{\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2}{\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\}^2}\\&=\frac{10-2\times(-3)+2}{\left(-\frac{1}{2}+3+1\right)^2}\\&=\frac{18}{\left(\frac{7}{2}\right)^2}\\&=\mathbf{\frac{72}{49}}\end{aligned}$$

④ α，β は $2x^2+6x-1=0$ の解なので，$2\alpha^2+6\alpha-1=0$，$2\beta^2+6\beta-1=0$

$$\begin{aligned}&\therefore 2\alpha^2+6\alpha+1=2\alpha^2+6\alpha-1+2=2\\&\quad 2\beta^2+6\beta-2=2\beta^2+6\beta-1-1=-1\\&\therefore (2\alpha^2+6\alpha+1)(2\beta^2+6\beta-2)=2\times(-1)=\mathbf{-2}\end{aligned}$$

(2) $x^2-5x+2=0$ において，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$$

① $$(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0$$

$\therefore\ x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$ が求める式.

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25-4=21$$
$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=4$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x^2-21x+4=0}$$

② $$\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right)=0$$

$\therefore\ x^2-\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)x+\dfrac{1}{\alpha\beta}=0$ が求める式.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{2},\ \frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0}$$

＜別解＞

$x^2-5x+2=0$ の両辺を x^2 で割ると $(x\fallingdotseq 0)$,

$$1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$
$$\therefore 2\times\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\times\left(\frac{1}{x}\right)+1=0$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}=0$$

この式は，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$ で成立する.

よって，$\dfrac{1}{x}$ を x と置き換えた $x^2-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{1}{2}=0$ が求める式.

【7】(1)

$$\begin{cases} 3x - y = -2 & \cdots ① \\ 4x^2 + y = 3 & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より，

$$\begin{aligned} 4x^2 + 3x &= 1 \\ 4x^2 + 3x - 1 &= 0 \\ (x+1)(4x-1) &= 0 \\ x &= -1,\ \frac{1}{4} \end{aligned}$$

① より，

$x = -1$ のとき，$y = -1$

$x = \dfrac{1}{4}$ のとき，$y = \dfrac{11}{4}$

よって，

$$(x,\ y) = \boldsymbol{(-1,\ -1),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{11}{4}\right)}$$

(2)

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 = y & \cdots ① \\ -2x^2 + y = 5 & \cdots ② \end{cases}$$

① を ② に代入して，

$$\begin{aligned} -2x^2 + x^2 + 4x + 3 &= 5 \\ x^2 - 4x + 2 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

② に代入して，

$$\begin{aligned} y &= 2(2 \pm \sqrt{2})^2 + 5 \\ &= 2(6 \pm 4\sqrt{2}) + 5 \\ &= 17 \pm 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって，

$(x,\ y) = \boldsymbol{(2 \pm \sqrt{2},\ 17 \pm 8\sqrt{2})}$ （複号同順）

(3)

$$\begin{cases} x+y=4 & \cdots ① \\ xy=-6 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$y=4-x$ $\cdots ③$

② に代入して，

$$\begin{aligned} x(4-x)&=-6 \\ x^2-4x-6&=0 \\ x&=2\pm\sqrt{10} \end{aligned}$$

③ より，$y=2\mp\sqrt{10}$

よって，

$(x,\ y)=\boldsymbol{(2\pm\sqrt{10},\ 2\mp\sqrt{10})}$ （複号同順）

(4)

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=30 & \cdots ① \\ x+y=6 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$y=6-x$ $\cdots ③$

① に代入して，

$$\begin{aligned} x^2+x(6-x)+(6-x)^2&=30 \\ x^2-6x+6&=0 \\ x&=3\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

③ より，$y=3\mp\sqrt{3}$

よって，

$(x,\ y)=\boldsymbol{(3\pm\sqrt{3},\ 3\mp\sqrt{3})}$ （複号同順）

(5)
$$\begin{cases} xy = 2 & \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 8 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$y = \dfrac{2}{x}$ $(x \neq 0)$ $\cdots ③$

② に代入して，$x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 8$

両辺に x^2 をかけて，

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= 8x^2 \\ x^4 - 8x^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \pm \sqrt{16-4} = 4 \pm 2\sqrt{3} \\ \therefore x &= \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \pm(\sqrt{3} \pm 1) \\ &= \pm\sqrt{3} \pm 1 \quad \text{（複号任意）} \end{aligned}$$

③ より，

$x = \sqrt{3} \pm 1$ のとき，$y = \dfrac{2}{\sqrt{3} \pm 1} = \sqrt{3} \mp 1$

$x = -\sqrt{3} \pm 1$ のとき，$y = \dfrac{2}{-\sqrt{3} \pm 1} = -\sqrt{3} \mp 1$

よって，

$$(x,\ y) = \boldsymbol{(\sqrt{3}+1,\ \sqrt{3}-1),\ (\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1),}$$
$$\boldsymbol{(-\sqrt{3}+1,\ -\sqrt{3}-1),\ (-\sqrt{3}-1,\ -\sqrt{3}+1)}$$

【8】(1)
$$\begin{cases} x + y = k \ \cdots ① \\ xy = 2 \ \cdots ② \end{cases}$$

① より，$y = k - x$

② に代入して，

$$\begin{aligned} x(k-x) &= 2 \\ x^2 - kx + 2 &= 0 \end{aligned}$$

この式が解をもてばよい．

$$\begin{aligned} D = (-k)^2 - 4 \times 2 &\geqq 0 \\ k^2 &\geqq 8 \\ \therefore |k| &\geqq 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{k \leqq -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2} \leqq k}$

(2)
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \ \cdots ① \\ xy=k \ \cdots ② \end{cases}$$

$x>0$, $y>0$ より，$k>0$ $\cdots$③
$x>0$ より，$y=\dfrac{k}{x}$
① に代入して，

$$x^2+k+\frac{k^2}{x^2}=1$$

両辺に x^2 をかけて，

$$x^4+(k-1)x^2+k^2=0 \ \cdots ④$$

x^2 についての方程式の判別式 $D=0$ が必要.

$$\begin{aligned} D=(k-1)^2-4k^2&=0 \\ (k-1+2k)(k-1-2k)&=0 \\ (3k-1)(-k-1)&=0 \\ k&=\frac{1}{3},\ -1 \end{aligned}$$

③より，$k=\dfrac{1}{3}$
このとき ④ は，

$$\begin{aligned} x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}&=0 \\ \left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2&=0 \\ x^2&=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$x>0$ より，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
② より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}}\times y&=\frac{1}{3} \\ y&=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

以上より，$\boldsymbol{k=\dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

問題

【1】(1) 最大値 なし
最小値 $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x=0}$ のとき)

(2) 最大値 $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x=0}$ のとき)
最小値 なし

(3) 最大値 $\boldsymbol{4}$ ($\boldsymbol{x=-2}$ のとき)
最小値 $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x=0}$ のとき)

(4) 最大値 なし
最小値 $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x=0}$ のとき)

(5) 最大値 $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x=0}$ のとき)
最小値 $\boldsymbol{-18}$ ($\boldsymbol{x=6}$ のとき)

(6) 最大値 なし
最小値 $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x=0}$ のとき)

(7) 最大値 $\boldsymbol{40}$ ($\boldsymbol{x=4}$ のとき)
最小値 $\boldsymbol{10}$ ($\boldsymbol{x=2}$ のとき)

(8) 最大値 $\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{x=0}$ のとき)
最小値 なし

(9) 最大値 なし
最小値 なし

(10) 最大値 なし
最小値 なし

【2】頂点 $x=0$ を定義域に含むので，最大値または最小値には 0 が含まれる．
最小値が -6 より，最大値は $\boldsymbol{b=0}$.
グラフは上に凸であり，頂点から離れた端点である $x=3$ のときが最小値 -6 をとるとき．よって，$y=ax^2$ に $x=3$, $y=-6$ を代入して，$\boldsymbol{a=-\dfrac{2}{3}}$

【3】(1) 頂点 $x=0$ が $a \leqq x \leqq a+2$ の中にあるかないかで場合分けをする．

i) $a+2<0$ つまり $a<-2$ のとき
最小値は $x=a+2$ のときだから，$y=(a+2)^2$

ii) $0 \leqq a+2$ かつ $a<0$，つまり $-2 \leqq a < 0$ のとき
最小値は $x=0$ のとき，$y=0$

iii) $0 \leqq a$ のとき
最小値は $x=a$ のとき，$y=a^2$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<-2} \text{ のとき} & \boldsymbol{(a+2)^2} \\ \boldsymbol{-2 \leqq a < 0} \text{ のとき} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0 \leqq a} \text{ のとき} & \boldsymbol{a^2} \end{cases}$$

(2) 頂点 $x=0$ と，範囲の中心 $a+1$ の位置関係によって場合分けをする．

i) $a+1<0$ つまり $a<-1$ のとき

最大値は $x=a$ のときだから，$y=a^2$

ii) $a+1=0$ つまり $a=-1$ のとき

最大値は $x=\pm 1$ のとき，$y=1$

iii) $0<a+1$ つまり $a>-1$ のとき

最大値は $x=a+2$ のとき，$y=(a+2)^2$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<-1} \text{ のとき} & \boldsymbol{a^2} \\ \boldsymbol{a=-1} \text{ のとき} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{a>-1} \text{ のとき} & \boldsymbol{(a+2)^2} \end{cases}$$

【4】(1) i) $a=1$ のとき

$y=7$ となって一定．このとき $M(a)=7$

ii) $a<1$ のとき

1 次関数の傾き $a-1<0$ なので，グラフは右下がり．

よって最大値をとるのは $x=-2$ のとき．

$\therefore M(a)=(a-1)\times(-2)+a+6=-a+8$

iii) $1<a$ のとき

1 次関数の傾き $a-1>0$ なので，グラフは右上がり．

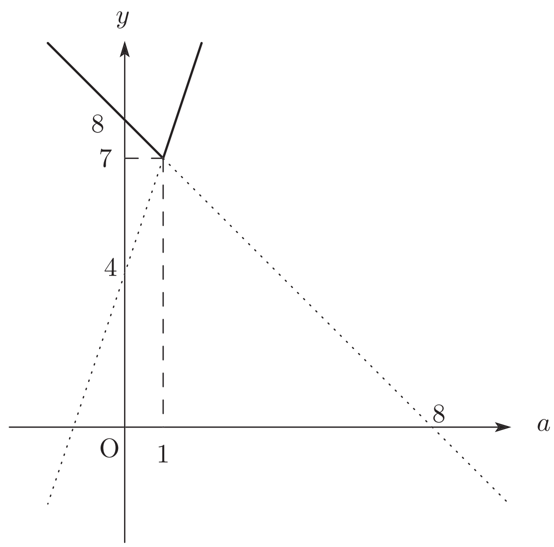
よって最大値をとるのは $x=2$ のとき．

$\therefore\ M(a)=(a-1)\times 2+a+6=3a+4$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a<1} \text{ のとき} & \boldsymbol{M(a)=-a+8} \\ \boldsymbol{a=1} \text{ のとき} & \boldsymbol{M(a)=7} \\ \boldsymbol{a>1} \text{ のとき} & \boldsymbol{M(a)=3a+4} \end{cases}$$

(2)



【5】グラフは上に凸なので，$a \leqq x \leqq a+1$ の中に $x=0$ が含まれたときは，最大値は 0.
よって最大値 $=-4$ となるのは，

i) $a+1<0$ つまり $a<-1$ のとき

ii) $0<a$ のとき

の 2 つ.

i) $a<-1$ のとき
最大値は $x=(a+1)$ のとき．よって，

$$\begin{aligned} -4 &= -\frac{1}{2}(a+1)^2 \\ \therefore (a+1)^2 &= 8 \\ a+1 &= \pm 2\sqrt{2} \\ a &= -1 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$a<-1$ という条件下で解いているので，$a=-1+2\sqrt{2}$ は不適.
よって，$a=-1-2\sqrt{2}$

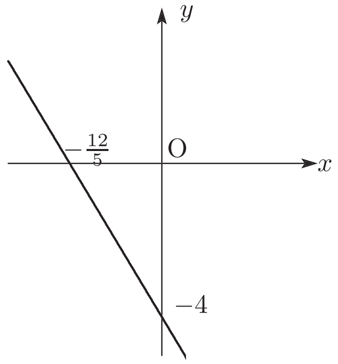
ii) $0<a$ のとき
最大値は $x=a$ のとき．よって，

$$\begin{aligned} -4 &= -\frac{1}{2}a^2 \\ \therefore a &= \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$0<a$ より，$a=2\sqrt{2}$

以上より，$\boldsymbol{a=-1-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}}$

【6】(1) ①



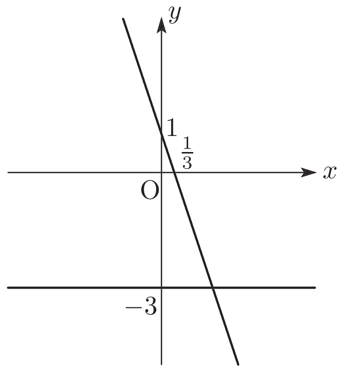
② $y=0$ とおいて,

$$-\frac{5}{3}x-4=0$$
$$-\frac{5}{3}x=4$$
$$x=4\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\boldsymbol{-\frac{12}{5}}$$

③ グラフより y 座標が正になる
x の範囲は　$\boldsymbol{x<-\frac{12}{5}}$
不等式を解くと

$$-\frac{5}{3}x-4>0$$
$$-\frac{5}{3}x>4$$
$$\boldsymbol{x<4\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{12}{5}}$$

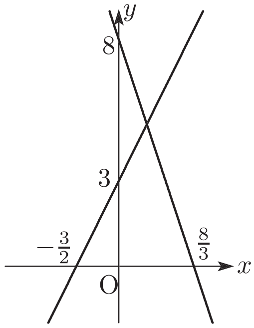
(2) ①



② $y_1=-3x+1$, $y_2=-3$ とおくと,
与えられた不等式 $-3x+1>-3$ の解は, $y_1>y_2$ となるグラフ上での x の範囲となる.
$y_1=y_2$ のとき, $-3x+1=-3$
$x=\frac{4}{3}$ とグラフより, $\boldsymbol{x<\frac{4}{3}}$
なお, 不等式を直接解くと,

$$-3x+1>-3$$
$$-3x>-4$$
$$\boldsymbol{x<\frac{4}{3}}$$

(3) ①



② $y_1=-3x+8$, $y_2=2x+3$ とおくと, 与えられた不等式 $-3x+8<2x+3$ の解は, $y_1<y_2$ となるグラフ上での x の範囲となる.
$y_1=y_2$ のとき

$$-3x+8=2x+3$$
$$-5x=-5$$
$$x=1$$

とグラフより, $\boldsymbol{x>1}$
なお, 不等式を直接解くと,

$$-3x+8<2x+3$$
$$-5x<-5$$
$$\boldsymbol{x>1}$$

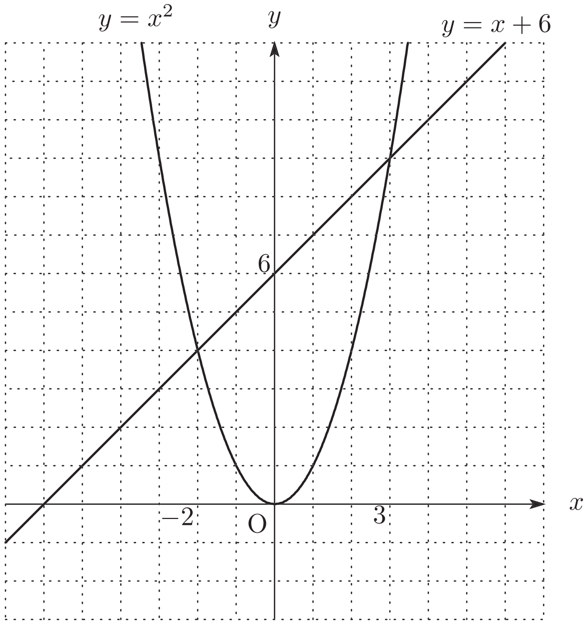
【7】(1) ① 右のグラフより，$\boldsymbol{(-2,\ 4),\ (3,\ 9)}$

② $y = x^2$ のグラフが，$y = x + 6$ のグラフより下にあるような x の範囲を答えればよい．

よって，$\boldsymbol{-2 < x < 3}$

③ $y = x^2$ のグラフが，$y = x + 6$ のグラフより上にあるような x の範囲を答えればよい．

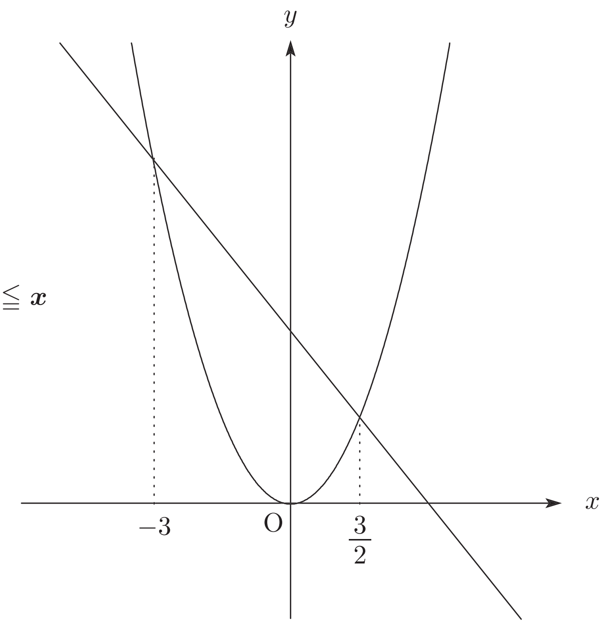
よって，$\boldsymbol{x < -2,\ 3 < x}$



(2) $y = 2x^2$ のグラフが，$y = -3x + 9$ より上にあるような x の範囲を答えればよい．

$$2x^2 + 3x - 9 = 0$$
$$(x + 3)(2x - 3) = 0$$
$$x = -3,\ \frac{3}{2}$$

よってグラフより，$\boldsymbol{x \leqq -3,\ \frac{3}{2} \leqq x}$

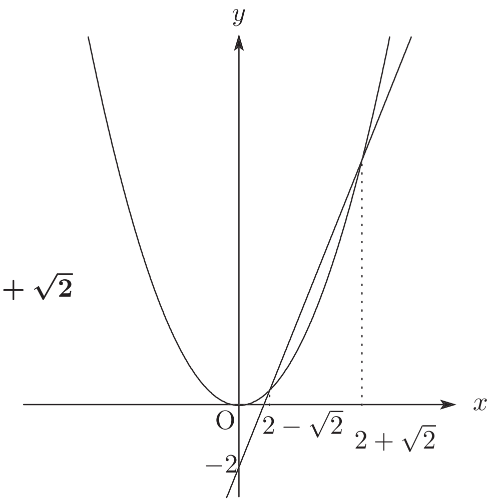


(3) $x^2-4x+2 \leqq 0$ より，$x^2 \leqq 4x-2$

よって，$y=x^2$ のグラフが $y=4x-2$ よりも下にあるような x の範囲を答えればよい.

$x^2-4x+2=0$ のとき，$x=2\pm\sqrt{2}$

よってグラフより，$\mathbf{2-\sqrt{2} \leqq x \leqq 2+\sqrt{2}}$



【8】
$$\begin{cases} y=-2x^2 & \cdots\cdots ① \\ y=x+a & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② − ① より，$2x^2+x+a=0$

判別式 $D=1^2-4\times 2\times a$

$\therefore\ D=1-8a\ \cdots\cdots ③$

(1) $D<0$ となるから，③ より，

$$1-8a<0$$
$$\boldsymbol{a>\frac{1}{8}}$$

(2) $D=0$ となるから，③ より，

$$1-8a=0$$
$$a=\mathbf{\frac{1}{8}}$$

よって，

$$2x^2+x+\frac{1}{8}=0$$
$$16x^2+8x+1=0$$
$$(4x+1)^2=0$$
$$x=-\frac{1}{4}$$

これを ① に代入して，

$y=-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2=-\frac{1}{8}$

よって，交点の座標は，$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)}$

【9】(1) $y=ax^2$ に $x=-3,\ y=6$ を代入して

$$6=a\times(-3)^2$$
$$a=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2) $y=-\frac{4}{3}x+b$ とおく.

$x=-3,\ y=6$ を代入して

$$6=-\frac{4}{3}\times(-3)+b$$
$$b=2$$

よって，$\boldsymbol{y=-\frac{4}{3}x+2}$

(3)
$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x^2 \\ y = -\dfrac{4}{3}x + 2 \end{cases}$$
より
$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 2 &= 0 \\ 2x^2 + 4x - 6 &= 0 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x+3)(x-1) &= 0 \\ x &= -3,\ 1 \end{aligned}$$

$x \neq -3$ より，$x = 1$

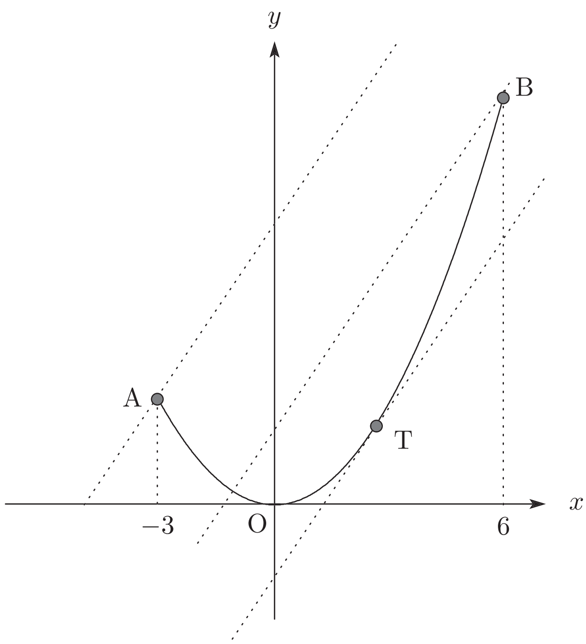
よって，$y = \dfrac{2}{3} \times 1^2 = \dfrac{2}{3}$

したがって，**B$\left(\mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$**

(4) $y = -\dfrac{4}{3}x + k$ とおくことができる．

これと $y = \dfrac{2}{3}x^2$ とを連立して
$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - k &= 0 \\ 2x^2 + 4x - 3k &= 0 \end{aligned}$$
よって
$$\begin{aligned} \frac{D}{4} = 2^2 - 2 \times (-3k) &= 0 \\ 6k &= -4 \\ k &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$
よって
$$\boldsymbol{y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}}$$

【10】 A$\left(-3,\ \dfrac{27}{4}\right)$，B$(6,\ 27)$ とすると，グラフより条件をみたす直線 $y = 3x + k$ は，$y = \dfrac{3}{4}x^2$ と接するときから，A または B を通るときまでとわかる．



接するとき，$y = \dfrac{3}{4}x^2$ と $y = 3x + k$ を連立して，
$$\frac{3}{4}x^2 - 3x - k = 0$$
$$\begin{aligned} D &= (-3)^2 - 4 \times \frac{3}{4} \times (-k) \\ &= 0 \end{aligned}$$
$$9 + 3k = 0$$
$$\therefore\ k = -3$$
A を通るとき，$y = 3x + k$ に $x = -3$，$y = \dfrac{27}{4}$ を代入．
$$\frac{27}{4} = -9 + k$$
$$\therefore\ k = \frac{63}{4}$$
B を通るとき，$y = 3x + k$ に $x = 6$，$y = 27$ を代入．
$$27 = 18 + k$$
$$\therefore\ k = 9$$
$9 < \dfrac{63}{4}$ より，求める k の範囲は，$\boldsymbol{-3 \leqq k \leqq \dfrac{63}{4}}$

【11】(1) l の方程式を $y=mx+n$ とおくと，A(2, -2) を通るので，

$$-2=2m+n \qquad \therefore n=-2m-2$$

よって l は $y=mx-2m-2$ となる．

これと $y=\dfrac{3}{2}x^2$ とを連立した式が重解をもつ，つまり接するとき，$\dfrac{3}{2}x^2=mx-2m-2$ より

$$\frac{3}{2}x^2-mx+(2m+2)=0$$

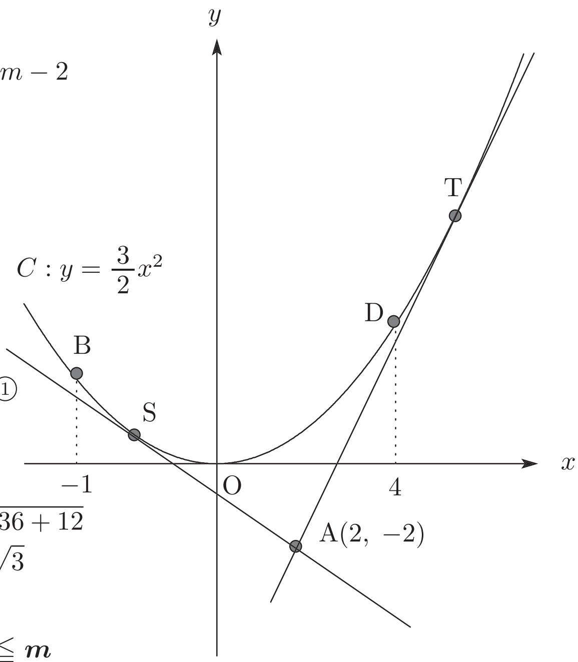
$$3x^2-2mx+(4m+4)=0 \quad \cdots ①$$

$$\frac{D}{4}=m^2-3(4m+4)=0$$

$$m^2-12m-12=0$$

$$m=6\pm\sqrt{36+12}$$

$$=6\pm4\sqrt{3}$$



グラフより，l と C が共有点をもつのは，$\boldsymbol{m \leqq 6-4\sqrt{3},\ 6+4\sqrt{3} \leqq m}$

(2) ① より，

$$x^2-\frac{2}{3}mx+\frac{4m+4}{3}=0$$

接するとき，接点の x 座標を a とすると，この左辺は

$$(x-a)^2=0 \iff x^2-2ax+a^2=0$$

と表せる．よって，

$$2a=\frac{2}{3}m$$

$$\therefore a=\frac{1}{3}m=\frac{6\pm4\sqrt{3}}{3}=\frac{6\pm\sqrt{48}}{3}$$

$6=\sqrt{36}<\sqrt{48}<\sqrt{49}=7$ より，

$$\frac{6-7}{3}<\frac{6-\sqrt{48}}{3}<\frac{6-6}{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{3}<\frac{6-4\sqrt{3}}{3}<0$$

$$\frac{6+6}{3}<\frac{6+\sqrt{48}}{3}<\frac{6+7}{3}$$

$$\therefore 4<\frac{6+4\sqrt{3}}{3}<\frac{13}{3}$$

よって，接点を x 座標の小さい方から S，T とすれば，傾きが負のときは点 S で接することができるが，傾きが正のときは点 T で接することはできず，点 D(4, 24) を通るときが傾き最小となる．このとき $y=mx-2m-2$ に $x=4$，$y=24$ を代入して，

$$24=4m-2m-2$$

$$m=13$$

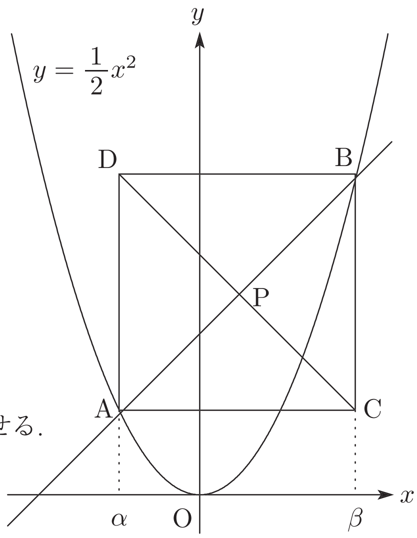
よって，$\boldsymbol{m \leqq 6-4\sqrt{3},\ 13 \leqq m}$

【12】(1)

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2}{2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$$

よって，P$\left(\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta}{2}}\textbf{，}\ \boldsymbol{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}\right)$



(2) AC $= \beta - \alpha$，BC $= \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2$ と表せる．
AC $=$ BC となるときを考える．

$$\beta - \alpha = \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$$

$\beta - \alpha \neq 0$ より，

$$1 = \frac{1}{2}(\beta+\alpha)$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha + \beta = 2}$$

(3) $\alpha+\beta = 2$ より，$x = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2}{2} = 1$
一方，
$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
より，

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2\}$$

ここで正方形の面積は，$24\sqrt{3} - 4 = (\beta-\alpha)^2 = (\alpha-\beta)^2$ であることに注意すると，y 座標は

$$y = \frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2) = \frac{1}{8}\{(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2\} = \frac{1}{8}(4 + 24\sqrt{3} - 4) = 3\sqrt{3}$$

以上より，P$\boldsymbol{(1,\ 3\sqrt{3})}$

問題

【1】$\angle\mathrm{BAT} = \angle\mathrm{BTA} = x$ より，

$$\therefore\ \angle\mathrm{ABP} = 2x$$

一方，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} : \overset{\frown}{\mathrm{BP}} = 2:3$ より，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{APB} : \angle\mathrm{BAP} &= 2:3\\ x : \angle\mathrm{BAP} &= 2:3\\ \angle\mathrm{BAP} &= \frac{3}{2}x\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}x + 2x + \frac{3}{2}x &= 180^\circ\\ \frac{9}{2}x &= 180^\circ\\ x &= \mathbf{40^\circ}\end{aligned}$$

【2】$\overset{\frown}{\mathrm{AM}} = \overset{\frown}{\mathrm{MB}}$ より，$\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$

これと仮定 $\mathrm{MB} = \mathrm{MP}$ より，

$$\mathrm{AM} = \mathrm{MB} = \mathrm{MP}$$

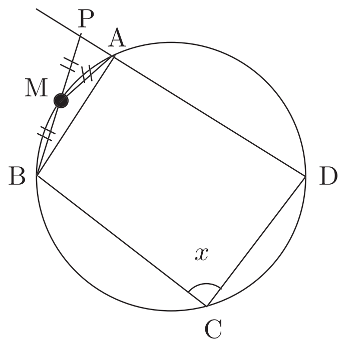
よって，3 点 P，A，B は M を中心とする円周上にある．

$\therefore\ \angle\mathrm{BAP} = 90^\circ$

また，$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{BAP}$

(円に内接する四角形の内対角と外角)

$\therefore\ \angle\mathrm{BCD} = \mathbf{90^\circ}$



【3】BN と CL との交点は重心 G となるので，AG の延長は BC の中点 M を通る．

仮定 $\mathrm{BN} = \mathrm{CL}$ と重心が中線を 2 : 1 にわけることにより

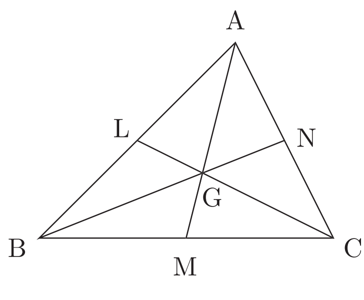
$$\frac{2}{3}\mathrm{BN} = \frac{2}{3}\mathrm{CL}$$

$$\therefore \mathrm{BG} = \mathrm{CG}$$

よって，△BCG は二等辺三角形．

ところが，GM は △BCG の頂点 G から底辺 BC への中線であるから，二等辺三角形の性質より，$\mathrm{GM} \perp \mathrm{BC}$

よって，A は BC の垂直二等分線上にあるので，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ である．　　　　(証明終)



【4】(1) 半円の弧に対する円周角は 90° なので

$$\angle \mathrm{ABD} = 90^\circ \quad \cdots\cdots①$$

弧 AB に対する円周角より

$$\angle \mathrm{BDA} = \angle \mathrm{BCA} \quad \cdots\cdots②$$

△ABD，△AHC において，

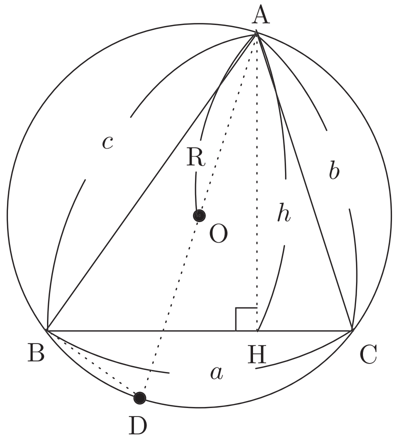
$$\begin{cases} \angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{AHC} = 90^\circ & (①より) \\ \angle \mathrm{BDA} = \angle \mathrm{HCA} & (②より) \end{cases}$$

$$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{AHC} \quad (2\text{ 角相等})$$

$$\therefore\ \mathrm{AB} : \mathrm{AD} = \mathrm{AH} : \mathrm{AC}$$

$$c : 2R = h : b$$

$$\boldsymbol{h = \frac{bc}{2R}}$$



(2)

$$S = \frac{1}{2} \times ah$$

(1) より

$$S = \frac{1}{2}a \cdot \frac{bc}{2R} = \frac{abc}{4R} \quad (証明終)$$

【5】図において

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{IBI_1} &= \angle \mathrm{IBD} + \angle \mathrm{DBI_1} \\ &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{ABC} + \frac{1}{2}\angle \mathrm{CBR} \\ &= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{CBR}) \\ &= \frac{1}{2} \times 180^\circ \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

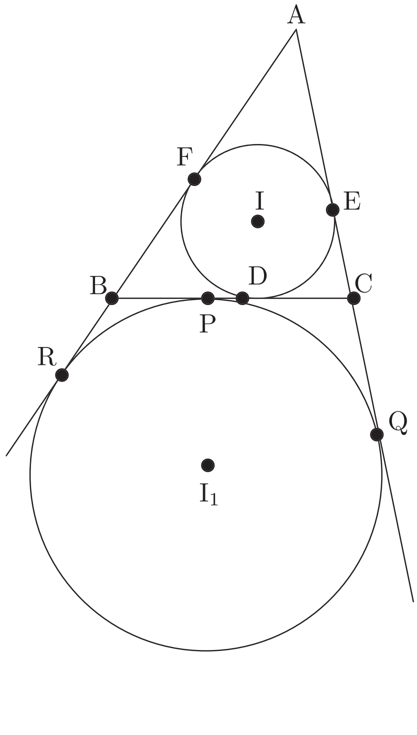
同様に

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{ICI_1} &= \angle \mathrm{ICD} + \angle \mathrm{DCI_1} \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \angle \mathrm{IBI_1} + \angle \mathrm{ICI_1} = 180^\circ$$

よって，B，I，C，$\mathrm{I_1}$ は同一円周上にある．
方べきの定理より

$$\mathrm{ID} \times \mathrm{DI_1} = \mathrm{BD} \times \mathrm{DC} \quad (証明終)$$

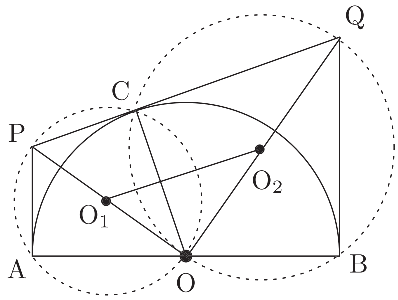


【6】 $\angle \mathrm{PAO} = \angle \mathrm{PCO} = 90^\circ$ より，$\mathrm{O_1}$ は OP の中点となる．

同様にして，$\mathrm{O_2}$ は OQ の中点となる．

よって，中点連結定理より，

$$\mathrm{O_1O_2} = \frac{1}{2}\mathrm{PQ} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$



【7】 CD の延長上に $\angle \mathrm{GAD} = \angle \mathrm{FAB}$ となるように点 G をとる．$\triangle \mathrm{EAG}$ において，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{EAG} &= \angle \mathrm{EAD} + \angle \mathrm{GAD} \\ &= \angle \mathrm{EAD} + \angle \mathrm{FAB} \\ &= \angle \mathrm{EAD} + \angle \mathrm{FAE} \text{ (仮定より)} \\ &= \angle \mathrm{FAD} \\ &= \angle \mathrm{AFB} \text{ (錯角)} \cdots ① \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{cases} \mathrm{AB} = \mathrm{AD} \\ \angle \mathrm{BAF} = \angle \mathrm{DAG} \\ \angle \mathrm{ABF} = \angle \mathrm{ADG} = 90^\circ \end{cases}$$

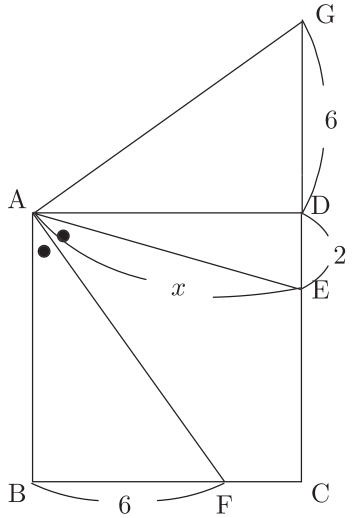
より，$\triangle \mathrm{ABF} \equiv \triangle \mathrm{ADG}$（二角夾辺相等）なので

$$\angle \mathrm{AFB} = \angle \mathrm{AGD} \cdots ②$$

①，②より

$$\angle \mathrm{EAG} = \angle \mathrm{AGE}$$

$$\therefore\ \mathrm{AE} = \mathrm{EG} = \mathrm{ED} + \mathrm{DG} = \mathrm{ED} + \mathrm{BF} = 2 + 6 = \mathbf{8}$$



【8】 AB の中点を F とすると，

中点連結定理より，EF // AC

$$\therefore\ \angle \mathrm{FED} = \angle \mathrm{C} \text{ (同位角)} \cdots ①$$

一方，F は直角三角形の斜辺の中点なので，

FB = FD

$$\therefore\ \angle \mathrm{FDB} = \angle \mathrm{B} \cdots ②$$

ここで，$\triangle \mathrm{DEF}$ に外角の定理を用いると，

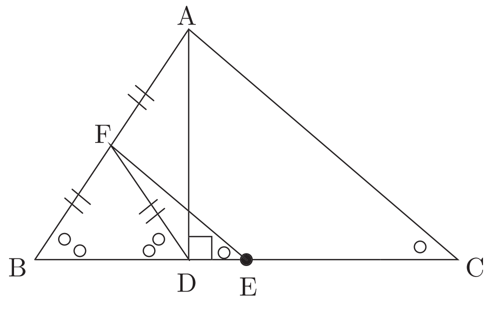
$$\begin{aligned}\angle \mathrm{FDB} &= \angle \mathrm{FED} + \angle \mathrm{DFE} \\ \angle \mathrm{B} &= \angle \mathrm{C} + \angle \mathrm{DFE} \text{ (①,②より)}\end{aligned}$$

ここで，条件 $\angle \mathrm{B} = 2\angle \mathrm{C}$ であることが示されているので，

$$\therefore\ \angle \mathrm{DFE} = \angle \mathrm{FED} \text{ (①より)}$$

よって，

$$\mathrm{DE} = \mathrm{DF} = \mathrm{BF} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = \mathbf{2}$$



【9】(1) N は中点より

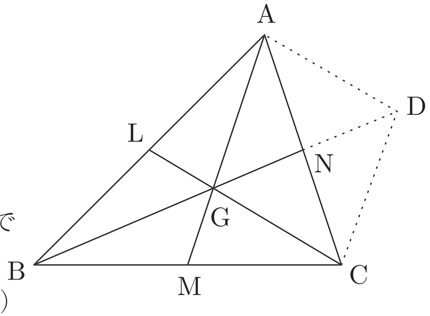
$$\mathrm{AN} = \mathrm{NC}$$

作図より

$$\mathrm{GN} = \mathrm{ND}$$

よって，四角形 AGCD は対角線が中点で交わりあうので，平行四辺形である．

（証明終）



(2) △GCD に注目すると，G は重心なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{GC} &= \frac{2}{3}\mathrm{CL} \\
\mathrm{CD} &= \mathrm{AG} \quad (\text{平行四辺形の対辺}) \\
&= \frac{2}{3}\mathrm{AM} \\
\mathrm{GD} &= 2\mathrm{GN} \\
&= \mathrm{BG} \quad (\mathrm{G}\text{ は BN を }2:1\text{ に内分}) \\
&= \frac{2}{3}\mathrm{BN}
\end{aligned}$$

よって，△GCD は題意の 3 本の中線の長さを 3 辺とする三角形と相似で，その比は $\frac{2}{3}$.

したがって，求める三角形の面積を S' とすれば

$$S' \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \triangle\mathrm{GCD} \quad \cdots\cdots ①$$

一方，

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{GCD} &= \frac{1}{2}\text{四角形 AGCD} && (\text{平行四辺形は対角線によって半分にわけられる}) \\
&= \triangle\mathrm{AGC} && (\text{同上}) \\
&= \frac{2}{3}\triangle\mathrm{AMC} && (\mathrm{AG}:\mathrm{GM} = 2:1\text{ より}) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC} && (\mathrm{BM}:\mathrm{MC} = 1:1\text{ より}) \\
&= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC} \quad \cdots\cdots ②
\end{aligned}$$

ここで $\triangle\mathrm{ABC} = S$ とすると，①，② より

$$\begin{aligned}
S' \times \frac{4}{9} &= \frac{1}{3}S \\
S' &= \frac{1}{3} \times \frac{9}{4}S = \frac{3}{4}S
\end{aligned}$$

$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{3}{4}}$**倍**

【10】 (1) $\overset{\frown}{\mathrm{EC}}$ に対する円周角より

$$\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{EAC}$$

$\overset{\frown}{\mathrm{BE}}$ に対する円周角より

$$\angle\mathrm{ECB} = \angle\mathrm{EAB}$$

AD は $\angle\mathrm{A}$ の二等分線なので

$$\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{EAB}$$

以上より，$\angle\mathrm{EBC} = \angle\mathrm{ECB}$
よって，
$\triangle\mathrm{BEC}$ は $\mathrm{BE} = \mathrm{EC}$ の二等辺三角形.

$$\therefore\quad \mathrm{EC} = \mathrm{BE} = \mathbf{6}$$

(2) $\mathrm{EC} = x$，$\mathrm{AD} = y$ とする.
$\triangle\mathrm{BAD} \backsim \triangle\mathrm{ECD}$ より

$$\mathrm{BA} : \mathrm{AD} = \mathrm{EC} : \mathrm{CD}$$
$$6\sqrt{3} : y = x : 4$$

$x = 6$ より，

$$6\sqrt{3} : y = 6 : 4$$
$$y = \mathbf{4\sqrt{3}}$$

(3) $\mathrm{BD} = a$，$\mathrm{AC} = b$ とおくと，角の二等分線の性質より

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$
$$6\sqrt{3} : b = a : 4$$
$$ab = 24\sqrt{3} \quad \cdots ①$$

一方，

$$\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{DAC}\ (\mathrm{AD}\ \text{は}\ \angle\mathrm{A}\ \text{の二等分線})$$

$$\angle\mathrm{AEB} = \angle\mathrm{ACD}\ (\overset{\frown}{\mathrm{AB}}\text{の円周角})$$

より，$\triangle\mathrm{BAE} \backsim \triangle\mathrm{DAC}$

$$\therefore\quad \mathrm{BE} : \mathrm{AE} = \mathrm{DC} : \mathrm{AC}$$
$$6 : \mathrm{AE} = 4 : b$$
$$\mathrm{AE} = \frac{3}{2}b$$

$\mathrm{AD} = 4\sqrt{3}$ より，

$$\mathrm{DE} = \frac{3}{2}b - 4\sqrt{3}$$

方べきの定理より

$$\mathrm{BD} \times \mathrm{DC} = \mathrm{AD} \times \mathrm{DE}$$
$$a \times 4 = 4\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{2}b - 4\sqrt{3}\right)$$
$$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}b - 12 \quad \cdots ②$$

②を①に代入して

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}b-12\right)b=24\sqrt{3}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2-12b-24\sqrt{3}=0$$

$$\sqrt{3}b^2-8b-16\sqrt{3}=0$$

$$(\sqrt{3}b+4)(b-4\sqrt{3})=0$$

$$b=4\sqrt{3}\ (b>0)$$

$$\therefore\quad a=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{3}-12=6$$

$$\therefore\quad \mathrm{BD}=\mathbf{6},\ \mathrm{AC}=\mathbf{4\sqrt{3}}$$

【11】(1) $\triangle\mathrm{APE}$，$\triangle\mathrm{AP'F'}$ において，

$$\begin{cases}\angle\mathrm{PEA}=\angle\mathrm{P'F'A}=90^\circ\\ \angle\mathrm{EAP}=\angle\mathrm{PAP'}+\angle\mathrm{CAP'}=\angle\mathrm{PAP'}+\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{F'AP'}\end{cases}$$

よって，2 角相等より，$\triangle\mathrm{APE}\backsim\triangle\mathrm{AP'F'}$ なので，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{AE}=\mathrm{AP'}:\mathrm{AF'}$$

$$\mathrm{AP}:\mathrm{AP'}=\mathrm{AE}:\mathrm{AF'}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AP'}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF'}}\ \cdots①$$

同様にして，$\triangle\mathrm{APF}\backsim\triangle\mathrm{AP'E'}$ より

$$\mathrm{AP}:\mathrm{AF}=\mathrm{AP'}:\mathrm{AE'}$$

$$\therefore\ \mathrm{AP}:\mathrm{AP'}=\mathrm{AF}:\mathrm{AE'}$$

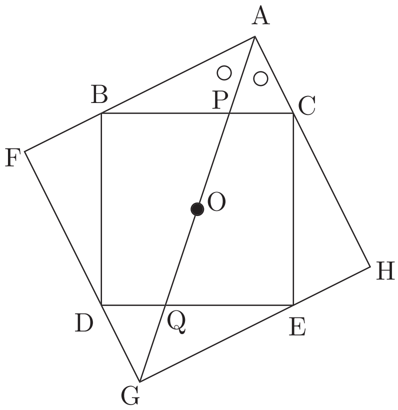
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AP'}}=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE'}}\ \cdots②$$

①，② より，$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF'}}=\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE'}}$ （証明終）

(2) (1) より，$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AE'}=\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AF'}$
よって，方べきの定理の逆より，E，E′，F，F′ は同一円周上にある．このとき，EE′ の中点を M とすれば，台形の中点連結定理により，MI // PE (// P′E′) となり，これと $\mathrm{PE}\perp\mathrm{EE'}$ より，IM は弦 EE′ の垂直二等分線となる．同様に，FF′ の中点を N とすれば，IN もまた弦 FF′ の垂直二等分線である．
よって，2 つの弦の垂直二等分線は I で交わるので，I はこの円の中心である．
（証明終）

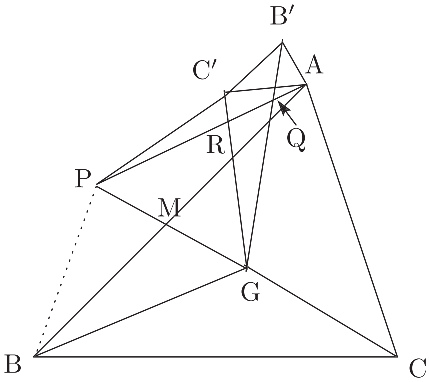
(3) D，D′，E，E′ についても同様にして，I を中心とする円周上にあることを示すことができる．
以上より，D，D′，E，E′，F，F′ は I を中心とする同一円周上にあることが示された．
（証明終）

【12】図のように，△ABC と合同な直角三角形を 3 つ正方形 BCED のまわりにつけると，正方形 AFGH ができる．∠A の二等分線はこの正方形の対角線なので，対角の頂点 G を通る．
よって，PQ は正方形 AFGH の対角線の交点 O を通るが，O は正方形 BDEC の対角線の交点でもある．
ゆえに，PQ は正方形 BDEC を半分に分ける．
したがって，四角形 BPQD : 四角形 CEQP = **1 : 1**



【13】(1) $\angle PGC' = 180° - 120° = 60°$
$PG = GC$，$GC' = GC$ より，$PG = GC'$
よって，$\triangle PGC'$ は正三角形である．

$\therefore\ PC' = C'G$ （証明終）



(2) PG と AB の交点を M とすると，CG は中線の一部なので，M は AB の中点である．
また，$PG = GC$ かつ $MG = \dfrac{1}{2}GC$ なので（重心）

$PM = MG$

よって，四角形 APBG は，対角線が中点同士で交わっているので，平行四辺形である．

$\therefore\ PA = BG$

一方，$B'G = BG$
よって，$PA = B'G$ （証明終）

(3) AP と B$'$G の交点を Q，AP と C$'$G の交点を R とすると，PA // BG より

$$\angle PQG + \angle QGB = 180^\circ \text{ (同側内角)}$$
$$\therefore\ \angle PQG = 180^\circ - \angle QGB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \quad \cdots ①$$

$\triangle C'PA$，$\triangle C'GB'$ において，

$$\begin{cases} PC' = GC' \text{ ((1) より)} \\ PA = GB' \text{ ((2) より)} \\ \angle C'PA = 180^\circ - \angle PRC' - \angle RC'P \\ \qquad\quad = 180^\circ - \angle QRG - 60^\circ \\ \qquad\quad = 180^\circ - \angle QRG - \angle GQR \text{ (①より)} \\ \qquad\quad = \angle C'GB' \end{cases}$$

よって，$\triangle C'PA \equiv \triangle C'GB'$ (2 辺夾角相等)

$$\begin{cases} C'A = C'B & \cdots ③ \\ \angle PC'A = \angle GC'B' & \cdots ④ \end{cases}$$

ここで，

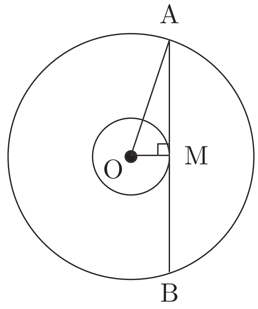
$$\begin{aligned} \angle B'C'A &= \angle GC'B' - \angle GC'A \\ &= \angle PC'A - \angle GC'A \text{ (④より)} \\ &= \angle PC'G \\ &= 60^\circ \text{ ($\triangle PC'G$ は正三角形)} \end{aligned}$$

これと③より，$\triangle AB'C'$ は正三角形であることが示された．　（証明終）

4章　三平方の定理

問題

【1】図のように，弦 AB と内側の円との接点を M とすると，AM = BM = 4 より



$$\begin{aligned}\pi \mathrm{OA}^2 - \pi \mathrm{OM}^2 &= \pi(\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OM}^2)\\ &= \pi \mathrm{AM}^2\\ &= \pi \times 4^2\\ &= \boldsymbol{16\pi}\end{aligned}$$

【2】

$$\mathrm{O_1O} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{O_1O_2} = r$$

$$\therefore\ \mathrm{O_1O} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

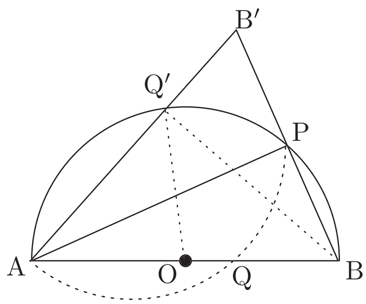
円 O の半径 = 1 より，

$$r + \frac{2r}{\sqrt{3}} = 1$$

$$r\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 1$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = \boldsymbol{2\sqrt{3}-3}$$

【3】AP についての点 Q，B の対称点をそれぞれ Q′，B′ とすると，



$$\mathrm{AQ} = 10 \times \frac{3}{3+2} = 6 \text{ より}$$

$$\mathrm{AQ'} = \mathrm{AQ} = 6$$

$$\mathrm{BQ} = 10 \times \frac{2}{3+2} = 4 \text{ より}$$

$$\mathrm{B'Q'} = \mathrm{BQ} = 4$$

ここで，$\angle \mathrm{AQ'B} = 90^\circ$ (半円の弧に対する円周角) より

$\triangle \mathrm{ABQ'}$ に三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{BQ'}^2 &= \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AQ'}^2\\ &= 10^2 - 6^2 = 8^2 \qquad \therefore\ \mathrm{BQ'} = 8\end{aligned}$$

一方，$\angle \mathrm{BQ'B'} = 180^\circ - \angle \mathrm{AQ'B} = 90^\circ$ より，$\triangle \mathrm{BQ'B'}$ に三平方の定理を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{BB'}^2 &= \mathrm{BQ'}^2 + \mathrm{B'Q'}^2\\ &= 8^2 + 4^2\\ &= 4^2(4+1)\\ &= 5 \times 4^2 \qquad \therefore\ \mathrm{BB'} = 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

ここで，

$$\mathrm{BP} = \frac{1}{2}\mathrm{BB'} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

よって，$\triangle$APB において

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BP}^2$$
$$= 10^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 80 \qquad \therefore\ \mathrm{AP} = \boldsymbol{4\sqrt{5}}$$

【4】(1) $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (\beta-\alpha)^2 + (\beta^2-\alpha^2)^2 \\ &= (\beta-\alpha)^2 + \{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)\}^2 \\ &= \boldsymbol{(\beta-\alpha)^2\{1+(\beta+\alpha)^2\}}\end{aligned}$$

(2) $x^2 = ax + 2 \iff x^2 - ax - 2 = 0$ の 2 解が α，β なので解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta = a\ ,\quad \alpha\beta = -2$$

ここで，

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2 &= \beta^2 - 2\beta\alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta \\ &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}\{1+(\alpha+\beta)^2\} \\ &= \{a^2 - 4\times(-2)\}(1+a^2) \\ &= (a^2+8)(a^2+1) \\ &= \boldsymbol{a^4 + 9a^2 + 8}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}a^4 + 9a^2 + 8 &= 12^2 \\ a^4 + 9a^2 - 136 &= 0 \\ (a^2+17)(a^2-8) &= 0\end{aligned}$$

$a^2 > 0$ より，

$$a^2 = 8$$
$$\therefore\ a = \pm 2\sqrt{2}$$

$a > 0$ より，$\boldsymbol{a = 2\sqrt{2}}$

【5】見込む角が 30° になる場所は，弧 AB に対する中心角が 60° になるような円 C を描いたときの円周上の点である．このとき円の中心 C と 2 点 A，B を結ぶ三角形は正三角形となるので，

$$\text{一辺の長さ} = 11 - 1 = 10$$

より，

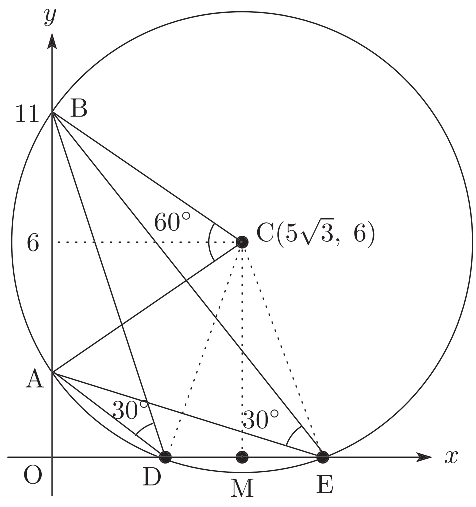
$$\begin{aligned} \text{C の } x \text{ 座標} &= \text{正三角形の高さ} \\ &= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{C の } y \text{ 座標} = \frac{11+1}{2} = 6$$

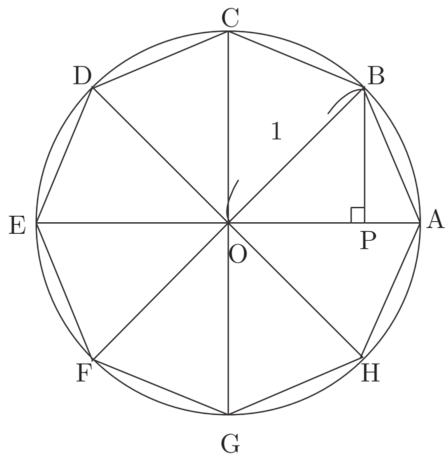
この円と x 軸との交点を D，E，DE の中点を M とすると，CD = CE = 10，CM = 6 より，DM = ME = 8 (3 : 4 : 5 の直角三角形)

線分 DE 間に点 P があれば，∠APB ≧ 30° となるので，

$$\boldsymbol{5\sqrt{3} - 8 \leqq x \leqq 5\sqrt{3} + 8}$$



【6】半径 1 の円 O に内接する正八角形 ABCDE-FGH を考える.



題意を示すには,

(円 O の円周) > (正八角形の周の長さ)

であるから,

(正八角形の周の長さ) $> 2 \times 3.05 = 6.1$

さらに，両辺共に正なので,

$$64\mathrm{AB}^2 > 6.1^2 = 37.21$$

を示せばよい. …①

B から OA に下した垂線の足を P とすると,

$\angle\mathrm{BOP} = 45^\circ$ より,

$$\mathrm{BP} = \mathrm{OP} = \mathrm{OB} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{PA} = \mathrm{OA} - \mathrm{OP} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \ \mathrm{AB}^2 &= \mathrm{BP}^2 + \mathrm{PA}^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} + 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \\
&= 2 - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

つまり

$$64 \cdot \mathrm{AB}^2 = 64 \times (2 - \sqrt{2})$$

ここで，$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ なので,

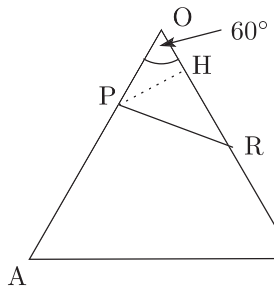
$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$
$$-1.414 > -\sqrt{2} > -1.415$$

$$2 - \sqrt{2} > 2 - 1.415$$
$$2 - \sqrt{2} > 0.585$$
$$64(2 - \sqrt{2}) > 37.44 > 37.21$$

となって，①は示せた.

以上より，円周率が 3.05 より大きいことが証明された. （証明終）

【7】(1) P から OC に下した垂線の足を H とすると，$\angle \mathrm{POH} = 60^\circ$ より



$$\mathrm{OH} = \mathrm{OP} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{PH} = \mathrm{OP} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\mathrm{HR} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

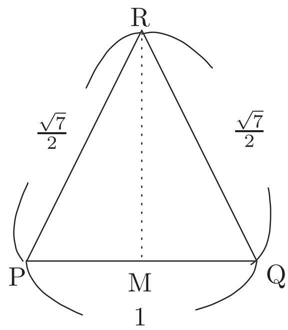
よって，$\triangle \mathrm{PHR}$ において，

$$\begin{aligned}\mathrm{PR}^2 &= \mathrm{PH}^2 + \mathrm{HR}^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 \\ &= \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{PR} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

(2) $\mathrm{QR} = \mathrm{PR} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$\mathrm{PQ} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AB} = 1$ より，PQ の中点を M とすると，$\mathrm{PM} = \dfrac{1}{2}$ より

$$\mathrm{RM}^2 = \mathrm{RP}^2 - \mathrm{PM}^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$
$$\mathrm{RM} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\ \triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$



(3) OPQ を底面とみて，R−OPQ と C−OPQ との体積を比較すると，OC = 2OR より，高さが 2 倍になる．

$$\therefore\ (\mathrm{R-OPQ}) = \frac{1}{2} \times (\mathrm{C-OPQ})\ \cdots ①$$

一方，(C−OPQ) と (C−OAB) の体積比は高さが同じなので，底面積の比となる．

$$\therefore\ (\mathrm{C-OPQ}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (\mathrm{C-OAB})\ \cdots ②\ (\triangle \mathrm{OPQ} \backsim \triangle \mathrm{OAB},\ 相似比\ 1:3\ より)$$

①，②より

$$(\mathrm{O-PQR}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} \times (\mathrm{O-ABC})$$

O から底面 ABC に下した垂線は △ABC の重心 G を通る．
AB の中点を N とすると，

$$\mathrm{NG} = \frac{1}{3}\mathrm{CN} = \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{ON} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

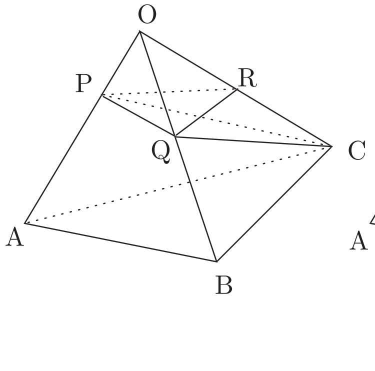
より，

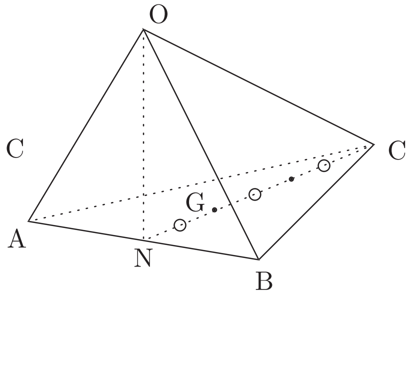
$$\mathrm{OG}^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 6$$

$$\therefore\ \mathrm{OG} = \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\mathrm{O-ABC}) &= \frac{1}{3} \times \mathrm{OG} \times \triangle\mathrm{ABC} \\ &= \frac{1}{3} \times \sqrt{6} \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 \\ &= \frac{9\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\mathrm{O-PQR}) &= \frac{1}{18} \times \frac{9\sqrt{2}}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{8}}\end{aligned}$$





【8】(1) 正方形 ABCD の対角線の交点を H とし，AR と PQ の交点を K とする.

△OBD で，PQ//BD より，

$$\begin{aligned} \mathrm{OK}:\mathrm{KH} &= \mathrm{OP}:\mathrm{PB} \\ &= 2:1 \end{aligned}$$

図 3 の △OAC で，

$$\begin{aligned} \mathrm{CE}:\mathrm{ER} &= \mathrm{CH}:\mathrm{HA} \\ &= 1:1 \\ \mathrm{OR}:\mathrm{RE} &= \mathrm{OK}:\mathrm{KH} \\ &= 2:1 \end{aligned}$$

OR：RE：EC=2：1：1 より，

$$\mathrm{OR} = \frac{1}{2}\mathrm{OC} = \frac{1}{2} \times 6 = \mathbf{3}$$

(2) △OBD⊥△OAC だから，

$$\mathrm{PQ} \perp \mathrm{AR}$$

図 3 で，

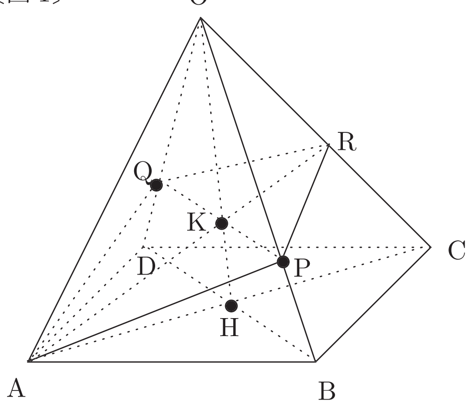
$$\begin{aligned} \mathrm{AR} &= \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OR}^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 3^2} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

図 2 で，

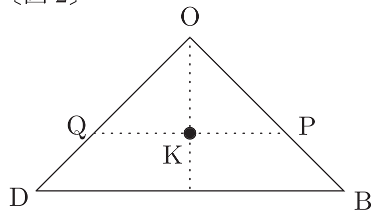
$$\mathrm{PQ} = \frac{2}{3}\mathrm{BD} = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{四角形 APRQ} &= \mathrm{PQ} \times \mathrm{AR} \times \frac{1}{2} \\ &= 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{1}{2} \\ &= \mathbf{6\sqrt{10}} \end{aligned}$$

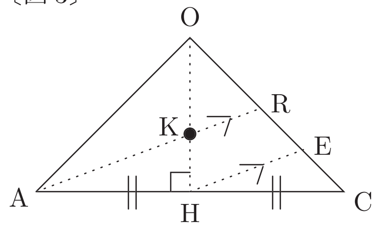
〔図 1〕



〔図 2〕



〔図 3〕



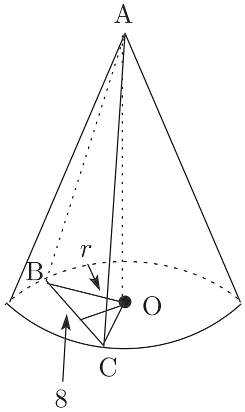
(3)

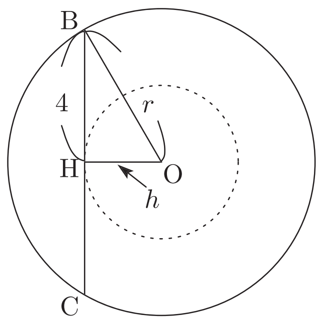
$$\begin{aligned} \text{四角すい O} - \text{APRQ} &= (\text{三角すい P} - \text{OAR}) + (\text{三角すい Q} - \text{OAR}) \\ &= \triangle\mathrm{OAR} \times \mathrm{PQ} \times \frac{1}{3} \\ &= \left(6 \times 3 \times \frac{1}{2}\right) \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \mathbf{12\sqrt{2}} \end{aligned}$$

【9】 $\mathrm{OB} = \mathrm{OC} = r$

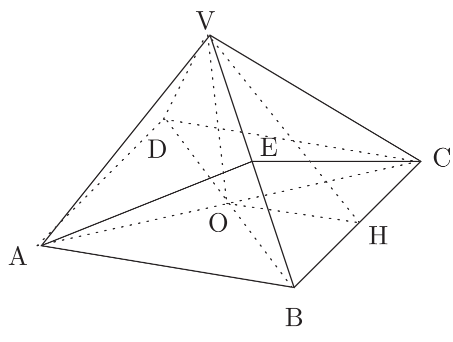
O と弦 BC との距離を h とおくと，△ABC が通過してできる図形は，半径 r，高さが 6 の円すいから，半径 h，高さが 6 の円すいを除いたものである．よって，

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times 6 - \frac{1}{3} \times \pi h^2 \times 6 \\
&= 2\pi(r^2 - h^2) \\
&= 2\pi \times 4^2 \ (\triangle\mathrm{BOH} \text{ の三平方の定理を用いる}) \\
&= \boldsymbol{32\pi}
\end{aligned}
$$



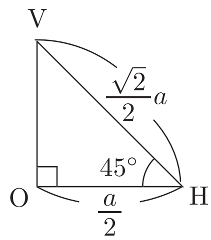


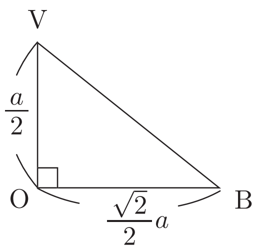
【10】 正方形の 1 辺の長さを a とし，BC の中点を H とすると，VH⊥BC，OH⊥BC なので，底面と側面のなす角が 45° とは，OV=OH= $\frac{a}{2}$ であることを意味する．



△OVH において，OB は底面の正方形の対角線の半分なので，$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

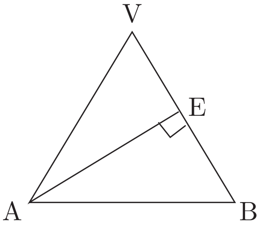
$$
\begin{aligned}
\therefore \mathrm{BV}^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}a^2 \\
\mathrm{BV} &= \frac{\sqrt{3}}{2}a
\end{aligned}
$$

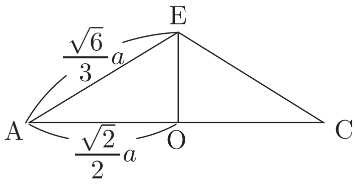




△VAB において，その面積は
AB を底辺としたときの高さは
VH と等しいから，

$$\frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a$$
$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2}a$$





一方，A から VB に下ろした垂線の足を E とすると，

$$\triangle\mathrm{VAB} = \frac{1}{2} \times \mathrm{BV} \times \mathrm{AE}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \mathrm{AE} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2}a$$
$$\mathrm{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

ここで △AOE において，

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AO} = \frac{\sqrt{6}}{3}a : \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{1}{2}$$
$$= 2\sqrt{3} : 3 = 2 : \sqrt{3}$$

よって △AOE は，30°，60°，90° の直角三角形であるから，

$$\angle\mathrm{AEO} = 60^\circ$$

したがって，∠AEC= 120°
ゆえに，側面のなす角は **120°**

【11】NA，NB と球面 K との交点をそれぞれ C，D とする．また，線分 AB の中点を M とし，NM と球面 K との交点を L とする．
N，S，B を含む平面で考えると（図 2）
NS = SB = 2 より，△NSB は直角二等辺三角形で D が球との交点である．NS を直径とした円上にあることから，NS の中点，つまり，球の中心 O と D は同じ高さにあり，OD = 1 となる．弧 AB 上を P が動くときは，底面の半径が 2 の円すい上を Q は動くので，Q は D と同じ高さを保つ．つまり，このときの Q は O を中心として両端を C，D とする四分円上を動く．このときの曲線の長さは

$$2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \cdots ①$$

P が線分 AB 上を動くときは，平面 NAB と球 K との交線が Q の動く曲線となる．これは球を平面で切ったのだから，円の一部となる．N，M，S を含む平面（図 3）で考えると，$\mathrm{MS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \mathrm{SA} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, NS = 2 より，

$$\mathrm{NM}^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 = 6 \quad \therefore \quad \mathrm{NM} = \sqrt{6}$$

O から NM に垂線 OO′ を下すと，O′ が円の中心となる．この円は N を通ることから半径は O′N となる．

$\triangle \mathrm{ONO'} \backsim \triangle \mathrm{MNS}$ より，

$$\begin{aligned} \mathrm{NO'} : \mathrm{NO} &= \mathrm{NS} : \mathrm{NM} \\ \mathrm{NO'} : 1 &= 2 : \sqrt{6} \\ \therefore \quad \mathrm{NO'} &= \frac{2}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

平面 NAB（図 4）において，$\angle \mathrm{ANB} = 60^\circ$ ($\because \quad \mathrm{NA} = \mathrm{AB} = \mathrm{BN} = 2\sqrt{2}$) より，円周角と中心角の関係から

$$\begin{aligned} &\angle \mathrm{CQ'D} = 120^\circ \\ \therefore \quad &\overset{\frown}{\mathrm{CD}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{6}} \times \pi \times \frac{120}{360} \\ &\qquad = \frac{4\pi}{3\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3 \times 6}\pi \\ &\qquad = \frac{2\sqrt{6}}{9}\pi \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，②より，

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\sqrt{6}}{9}\pi = \boldsymbol{\frac{9 + 4\sqrt{6}}{18}\pi}$$

図 1

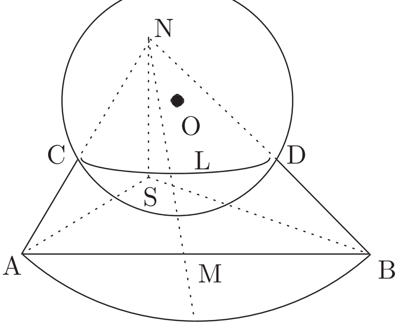


図 2

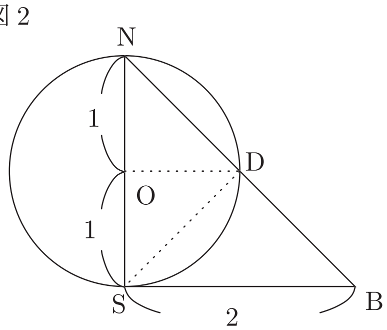


図 3

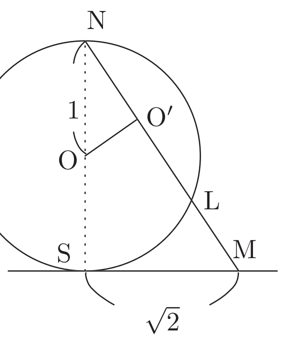
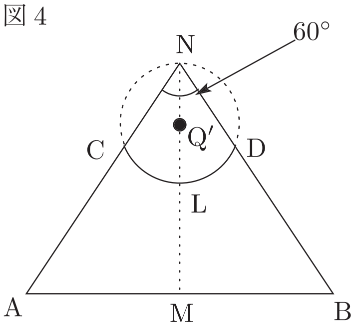
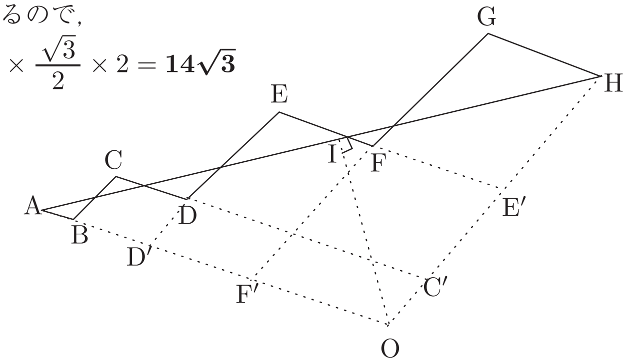


図 4



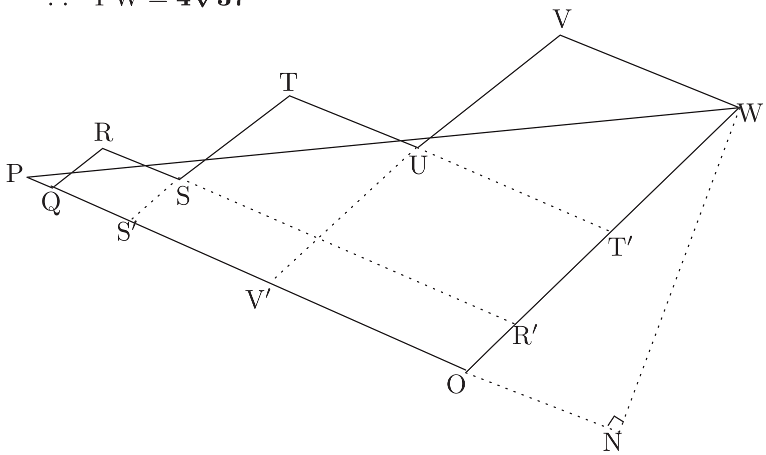
【12】(1) 図のように，120° をはさむ辺の長さが，$1+3+4+6=2+5+7=14$
である二等辺三角形のもう一辺を求めればよい．AH は 1 辺が 14 の正三角形の高さの 2 倍となるので，

$$\mathrm{AH} = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \mathbf{14\sqrt{3}}$$



(2) W から PQ の延長上に下した垂線の足を N とすると，$\mathrm{WO}=2+4+6=12$
$\angle\mathrm{WON}=60°$ より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{WN} &= 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\\
\mathrm{ON} &= 12 \times \frac{1}{2} = 6\\
\therefore\quad \mathrm{PN} &= (1+3+5+7)+6 = 22\\
\mathrm{PW}^2 &= \mathrm{PN}^2 + \mathrm{NW}^2\\
&= 22^2 + (6\sqrt{3})^2 = 2^2(11^2 + (3\sqrt{3})^2)\\
&= 2^2 \times (121+27)\\
&= 2^2 \times 148 = 4^2 \times 37\\
\therefore\quad \mathrm{PW} &= \mathbf{4\sqrt{37}}
\end{aligned}$$



(3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{AH}^2 - \mathrm{PW}^2 &= (14\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{37})^2\\
&= 2^2\left\{(7\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{37})^2\right\}\\
&= 2^2(147-148) = -4 < 0\\
\therefore\quad \mathrm{AH} &< \mathrm{PW}
\end{aligned}$$

よって，**PW** の方が長い．

【13】 A $(a,\ a^2)$ とおくと，双曲線の式は $y=\dfrac{a^3}{x}$ $\cdots$①

接線の式を $y=mx+n$ とおくと，$(a,\ a^2)$ を通るので

$$a^2=ma+n \qquad \therefore\quad n=a^2-ma \ \cdots ②$$

$y=x^2$ を連立したとき $D=0$ となるので

$$x^2=mx+n$$
$$x^2-mx-n=0$$
$$D=m^2+4n=0$$

②を代入して，

$$m^2+4(a^2-ma)=0$$
$$m^2-4am+4a^2=0$$
$$(m-2a)^2=0$$
$$\therefore\quad m=2a$$
$$\therefore\quad n=a^2-2a^2=-a^2$$

よって，接線の式は，$y=2ax-a^2$

これと①を連立して，

$$2ax-a^2=\frac{a^3}{x}$$
$$2ax^2-a^2x-a^3=0$$

$a \fallingdotseq 0$ より

$$2x^2-ax-a^2=0$$

A が共有点であることに注意して

$$(x-a)(2x+a)=0$$
$$x=a,\ -\frac{a}{2}$$

よって，B の x 座標は $-\dfrac{a}{2}$

$$y=\frac{a^3}{x}=-\frac{a^3}{\frac{a}{2}}=-2a^2$$

よって，

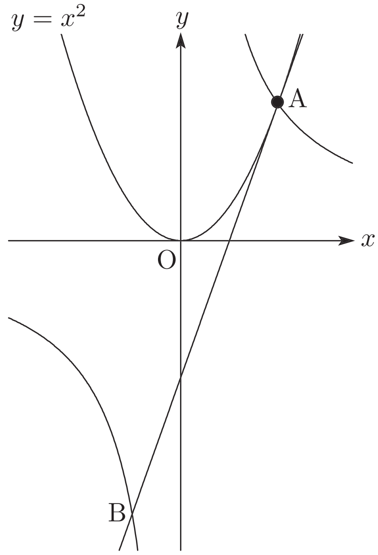
$$\mathrm{AB}^2=\left\{a-\left(-\frac{a}{2}\right)\right\}^2+\{a^2-(-2a^2)\}^2=\left(\frac{3}{2}a\right)^2+(3a^2)^2$$

これが，$(3\sqrt{66})^2$ と等しいので

$$(3a^2)^2+\left(\frac{3}{2}a\right)^2=(3\sqrt{66})^2$$
$$(a^2)^2+\frac{1}{4}a^2-66=0$$
$$4(a^2)^2+a^2-4\times 66=0$$
$$(a^2-8)(4a^2+33)=0$$
$$a^2=8$$

$a>0$ より，$a=2\sqrt{2}$

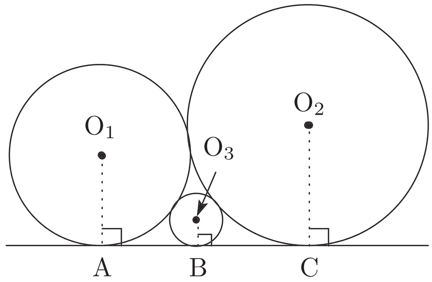
よって，**A $(2\sqrt{2},\ 8)$**



【14】
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(r_1+r_3)^2-(r_1-r_3)^2}=\sqrt{4r_1r_3}=2\sqrt{r_1r_3}$$
$$\mathrm{BC}=\sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_2-r_3)^2}=\sqrt{4r_2r_3}=2\sqrt{r_2r_3}$$
$$\mathrm{AC}=\sqrt{(r_2+r_1)^2-(r_2-r_1)^2}=\sqrt{4r_2r_1}=2\sqrt{r_1r_2}$$

AC=AB+BC より,

$$2\sqrt{r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_3}+2\sqrt{r_2r_3}$$



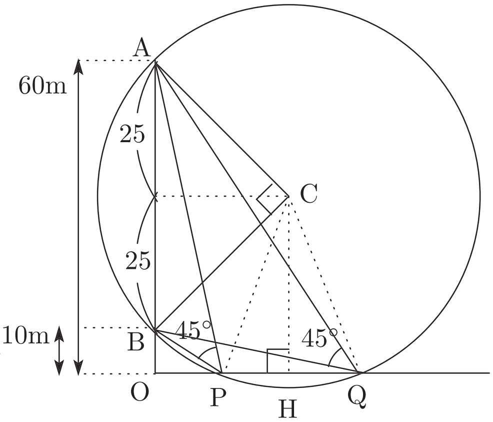
両辺を，$2\sqrt{r_1r_2r_3}$ で割ると,

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_2}}+\frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

すなわち,

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$$ （証明終）

【15】棒の根元を O，棒の先端を A，赤く塗り始める点を B とする．
見込む角が 45° となる点は，弧 AB に対する中心角が 90° となるような円の，円周上にある点である．よって地上を表す O からの半直線上で，この円の内部にあたる部分が条件をみたす．

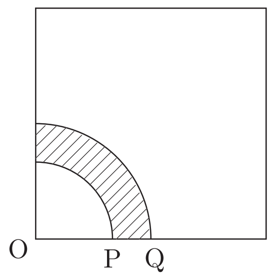


円の中心 C は高さが $\dfrac{60+10}{2}=35\mathrm{m}$ にあり，
図より棒からは 25m 離れている．
よって円の半径は $25\sqrt{2}\mathrm{m}$
図において，CH=35，CP= $25\sqrt{2}$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}^2=\mathrm{CP}^2-\mathrm{CH}^2&=(25\sqrt{2})^2-35^2\\&=5^2\{(5\sqrt{2})^2-7^2\}\\&=5^2(50-49)=5^2\end{aligned}$$

よって，PH= 5 OH = 25 より，

$$\mathrm{OP}=25-5=20,\ \mathrm{OQ}=25+5=30$$



求める部分の面積は，右図の斜線部分であるから，

$$\pi(30^2-20^2)\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{125\pi(\mathrm{m}^2)}$$

3MJS/3MJ
中３数学
中３東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	