

Z会東大進学教室

高1 選抜東大数学

高1 東大数学



【1】 $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ \dots\dots ①$, $\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3} \dots\dots ②$

(1) ②の両辺を2乗して

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{16}{9}$$

$$\therefore 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{16}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{18} \quad (\text{答})$$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$
 $= \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{7}{18}\right)$
 $= \frac{22}{27} \quad (\text{答})$

【2】 (1) $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta = 3 \iff 2(1 - \sin^2 \theta) + 3 \sin \theta = 3$
 $\iff 2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 1 = 0$
 $\iff (\sin \theta - 1)(2 \sin \theta - 1) = 0$
 $\iff \sin \theta = \frac{1}{2}, 1$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから

$$\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ \quad (\text{答})$$

(2) $2 \sin^2 \theta - 2 \tan \theta \geq 3 \iff 2(1 - \cos^2 \theta) - 2 \tan \theta \geq 3$
 $\iff 2 \cos^2 \theta + 2 \tan \theta + 1 \leq 0$
 $\iff \frac{2}{1 + \tan^2 \theta} + 2 \tan \theta + 1 \leq 0$
 $\iff 2 + (1 + \tan^2 \theta)(2 \tan \theta + 1) \leq 0$
 $\iff 2 \tan^3 \theta + \tan^2 \theta + 2 \tan \theta + 3 \leq 0$
 $\iff (\tan \theta + 1)(2 \tan^2 \theta - \tan \theta + 3) \leq 0 \dots ①$

ここで

$$2 \tan^2 \theta - \tan \theta + 3 = 2 \left(\tan \theta - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{23}{8} > 0$$

を考慮して

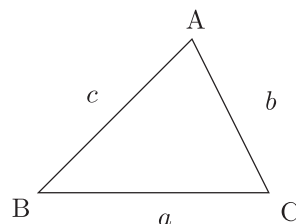
$$① \iff \tan \theta + 1 \leq 0 \iff \tan \theta \leq -1$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから

$$90^\circ < \theta \leq 135^\circ \quad (\text{答})$$

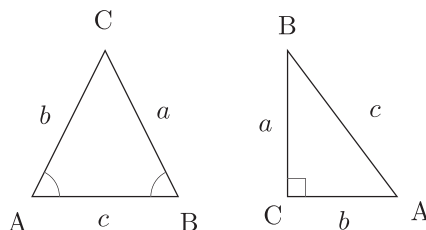
- 【3】 $\triangle ABC$ について、 $\angle A, \angle B, \angle C$ の対辺の長さをそれぞれ a, b, c ($a > 0, b > 0, c > 0$) とし、また外接円の半径を $R (> 0)$ とおく。このとき正弦定理、余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} & \sin A \cos A = \sin B \cos B \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \Leftrightarrow & a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2) \\ \Leftrightarrow & (a^2 - b^2)c^2 - (a^4 - b^4) = 0 \\ \Leftrightarrow & (a^2 - b^2)\{c^2 - (a^2 + b^2)\} = 0 \\ \Leftrightarrow & (a + b)(a - b)\{c^2 - (a^2 + b^2)\} = 0 \\ \Leftrightarrow & a = b \quad \text{または} \quad a^2 + b^2 = c^2 \end{aligned}$$



よって、 $\triangle ABC$ は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{CB} = \text{CA} \text{ である二等辺三角形} \\ \text{または} \\ \angle C = 90^\circ \text{ である直角三角形} \end{array} \right. \quad (\text{答})$$



- 【4】 C_1 の中心 $(0, 0)$ と C_2 の中心 $(3, 4)$ との距離は

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

これと C_1 の半径 15 と C_2 の半径 r との関係を考える。

- (1) C_2 の中心 $(3, 4)$ は、 C_1 の内部にあるから、

- (i) C_2 が C_1 の内部にあるとき

$$5 + r < 15$$

$$\therefore r < 10$$

よって

$$0 < r < 10$$

- (ii) C_1 が C_2 の内部にあるとき

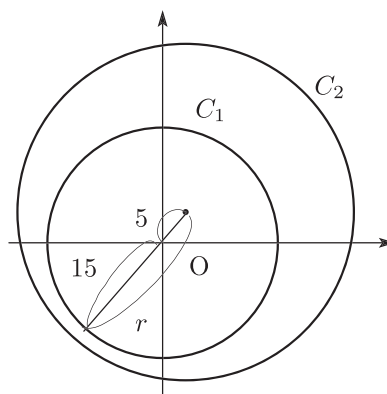
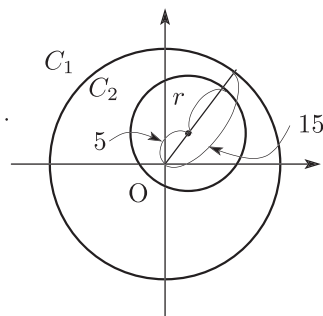
$$5 + 15 < r$$

よって

$$20 < r$$

したがって、

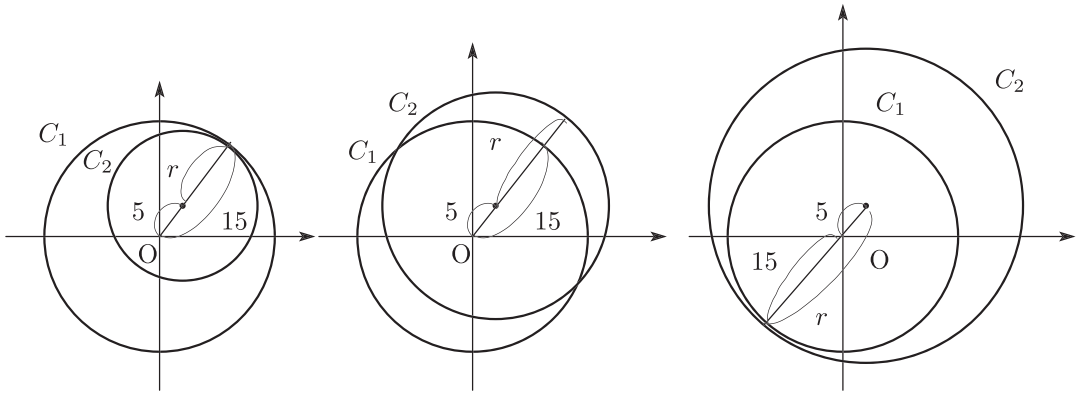
$$0 < r < 10, 20 < r$$



- (2) C_2 の半径 r が、 C_2 が C_1 に内接するときより大きく、かつ、 C_2 が C_1 に内接するときより小さい範囲のときであるから

$$\begin{cases} 5+r > 15 \\ 15+5 > r \end{cases}$$

$\therefore 10 < r < 20$ (答)



【5】与えられた方程式の解を， $y = ax$ と $y = b$ との交点の x 座標として考える。

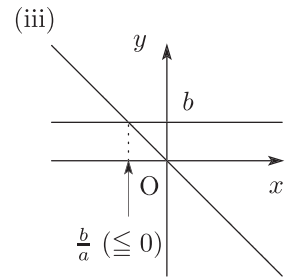
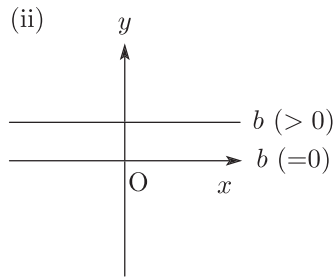
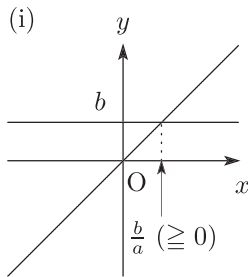
$y = ax$ は

(i) $a > 0$ のとき 傾き $a (> 0)$ の原点を通る直線

(ii) $a = 0$ のとき $y = 0$ (x 軸)

(iii) $a < 0$ のとき 傾き $a (< 0)$ の原点を通る直線

それぞれグラフをかくと次のとおり。



(ii) について

$b = 0$ のとき， $y = 0$ となり一致

$b \neq 0$ のとき， $y = b$ とは交わらない

よって

$$\begin{cases} x = \frac{b}{a} & (a \neq 0 \text{ のとき}) \\ \text{任意の数} & (a = 0 \text{ かつ } b = 0) \\ \text{解なし} & (a = 0 \text{ かつ } b > 0) \end{cases} \quad (\text{答})$$