M1JS/M1J

春期講習

解答

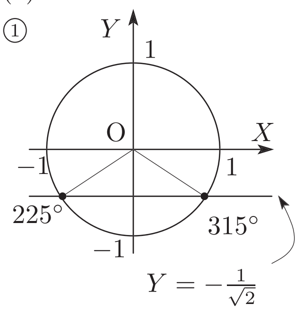
Z会東大進学教室

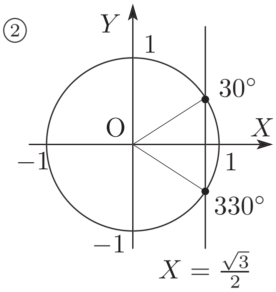
高1選抜東大数学

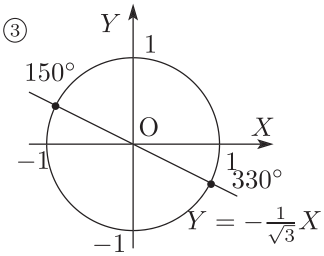
高1東大数学

問題

【1】(1)

① 

② 

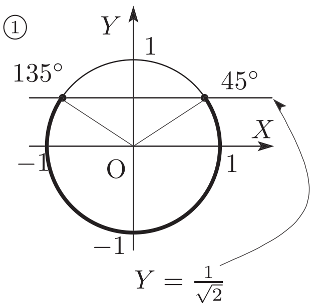
③ 

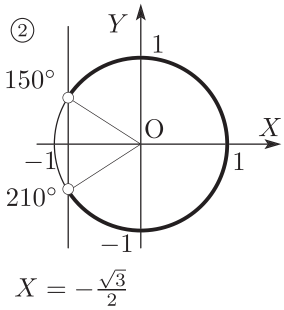
① $\theta = \mathbf{225^\circ,\ 315^\circ}$　　(答)

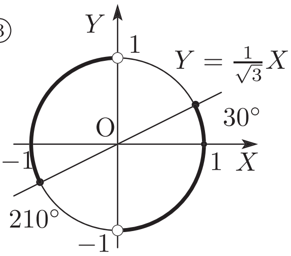
② $\theta = \mathbf{30^\circ,\ 330^\circ}$　　(答)

③ $\theta = \mathbf{150^\circ,\ 330^\circ}$　　(答)

(2)

① 

② 

③ 

① $\begin{cases} \mathbf{0^\circ \leqq \boldsymbol{\theta} \leqq 45^\circ} \\ \mathbf{135^\circ \leqq \boldsymbol{\theta} < 360^\circ} \end{cases}$　　(答)

② $\begin{cases} \mathbf{0^\circ \leqq \boldsymbol{\theta} < 150^\circ} \\ \mathbf{210^\circ < \boldsymbol{\theta} < 360^\circ} \end{cases}$　　(答)

③ $\begin{cases} \mathbf{0^\circ \leqq \boldsymbol{\theta} \leqq 30^\circ} \\ \mathbf{90^\circ < \boldsymbol{\theta} \leqq 210^\circ} \\ \mathbf{270^\circ < \boldsymbol{\theta} < 360^\circ} \end{cases}$　　(答)

【2】 $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ より

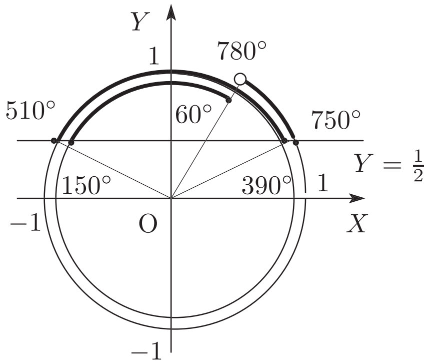
$$60^\circ \leqq 2\theta + 60^\circ < 780^\circ$$

である.

したがって

$$\begin{cases} 60^\circ \leqq 2\theta + 60^\circ \leqq 150^\circ \\ 390^\circ \leqq 2\theta + 60^\circ \leqq 510^\circ \\ 750^\circ \leqq 2\theta + 60^\circ < 780^\circ \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ} \\ \boldsymbol{165^\circ \leqq \theta \leqq 225^\circ} \\ \boldsymbol{345^\circ \leqq \theta < 360^\circ} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$



【3】 $15^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ$ より

$$60^\circ \leqq 2\theta + 30^\circ \leqq 90^\circ$$

であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin(2\theta + 30^\circ) \leqq 1$$

$$\therefore \quad \sqrt{3} \leqq 2\sin(2\theta + 30^\circ) \leqq 2$$

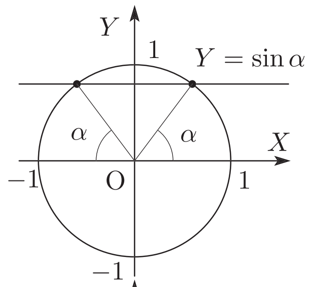
$$\therefore \quad \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2\sin(2\theta + 30^\circ)} \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

したがって

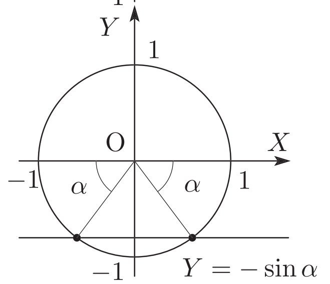
$$\boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq f(\theta) \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad \text{(答)}$$

【4】$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より

$$0 < \sin\alpha < 1,\ 0 < \cos\alpha < 1$$

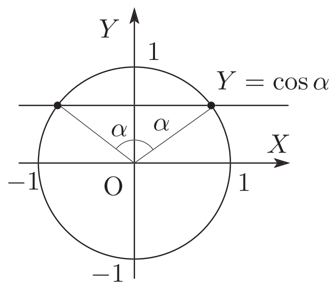


(1) $x = \boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{180^\circ} - \boldsymbol{\alpha}$ (答)



(2) $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ より

$$x = \mathbf{180^\circ} + \boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{360^\circ} - \boldsymbol{\alpha} \qquad (答)$$



(3) $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ より

$$x = \mathbf{90^\circ} - \boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{90^\circ} + \boldsymbol{\alpha} \qquad (答)$$

【5】(1) $\mathrm{AB} = \sin\theta$, $\mathrm{BC} = \cos\theta$ より

$$S_1 = \mathrm{AB}^2 = \sin^2\theta,\quad S_2 = 1 \cdot \mathrm{BC} = \cos\theta$$

したがって

$$S_1 + S_2 = f(\theta) = \boldsymbol{\sin^2\theta + \cos\theta} \qquad (答)$$

(2) (1) で求めた式を $\cos\theta$ で表すと

$$f(\theta) = 1 - \cos^2\theta + \cos\theta = -\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

また，θ は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内角の 1 つであるから

$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\therefore\quad 0 < \cos\theta < 1$$

より，いま，$t = \cos\theta$ とおくと，題意は

$$f(\theta) = g(t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \qquad (0 < t < 1)$$

の最大値を求めることに等しい．

$g(t)$ は

$$t = \frac{1}{2} \text{ のとき，最大値 } \frac{5}{4}$$

をとり，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲で $t = \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ となるのは，$\theta = 60^\circ$ のときである．

したがって

$$\theta = \mathbf{60^\circ} \text{ のとき　最大値 } \boldsymbol{\frac{5}{4}} \qquad (答)$$

【6】 (i) $0° \leqq x \leqq 90°$ のとき

$$y = x,\ \ y = 180° - x$$

(ii) $90° \leqq x \leqq 180°$ のとき

$$y = x,\ \ y = 180° - x$$

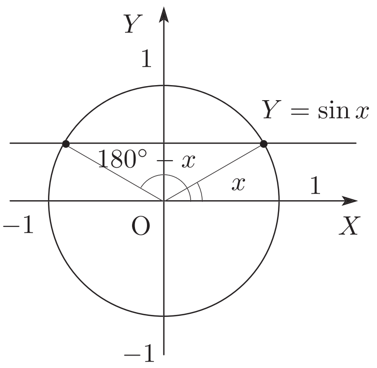
(iii) $180° \leqq x \leqq 270°$ のとき

$$y = x,\ \ y = 360° - (x - 180°) = 540° - x$$

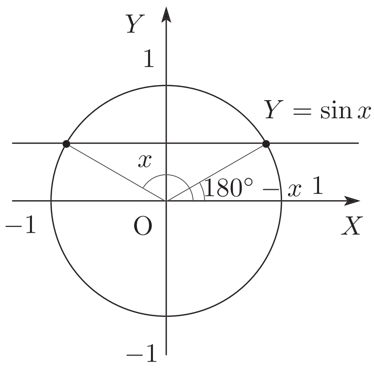
(iv) $270° \leqq x < 360°$ のとき

$$y = x,\ \ y = 180° + (360° - x) = 540° - x$$

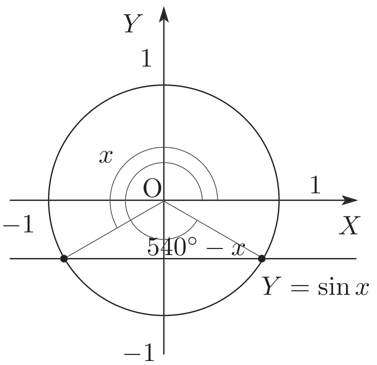
(i)



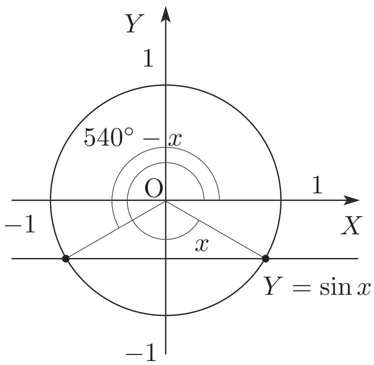
(ii)



(iii)



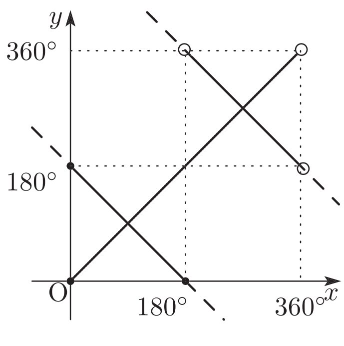
(iv)



以上，まとめると

$$\begin{cases} 0° \leqq x \leqq 180° \text{ のとき} \\ \qquad y = x,\ y = 180° - x \\ 180° \leqq x < 360° \text{ のとき} \\ \qquad y = x,\ y = 540° - x \end{cases}$$

したがって，これを図示すると，右図の太実線部.



(答)

問題

【1】(1) 三平方の定理より

$$\mathrm{BD} = \sqrt{5^2 + (\sqrt{6})^2} = \boldsymbol{\sqrt{31}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\angle\mathrm{BCD} = \theta$ とし，$\triangle\mathrm{DBC}$ で余弦定理を用いると

$$\cos\theta = \frac{5^2 + 6^2 - (\sqrt{31})^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より

$$\theta = \angle\mathrm{BCD} = \mathbf{60^\circ} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$$

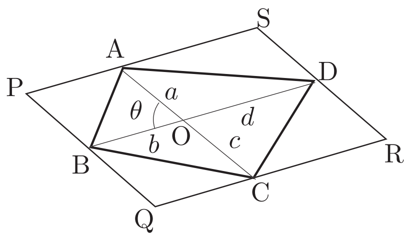
$$\triangle\mathrm{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{15}{2}\sqrt{3}$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{四角形 ABCD} &= \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD} \\ &= \frac{5}{2}\sqrt{6} + \frac{15}{2}\sqrt{3} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{2}\left(\sqrt{6} + 3\sqrt{3}\right)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【2】対角線 AC，BD に平行で各頂点を通過する図のような平行四辺形PQRS を考える．

すると対角線の交点 O として，四角形 ABCD の各辺は，それぞれの平行四辺形の対角線になっているので



$$\triangle\mathrm{PBA} = \triangle\mathrm{ABO},\ \triangle\mathrm{QCB} = \triangle\mathrm{BCO}$$

$$\triangle\mathrm{RDC} = \triangle\mathrm{CDO},\ \triangle\mathrm{SAD} = \triangle\mathrm{DAO}$$

より，四角形 ABCD は平行四辺形 PQRS の面積の半分になる．

ここで

$$\mathrm{OA} = a,\ \mathrm{OB} = b,\ \mathrm{OC} = c,\ \mathrm{OD} = d$$

とすると

$$\begin{aligned} &\text{平行四辺形 PQRS} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}ab\sin\theta + 2 \cdot \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - \theta) + 2 \cdot \frac{1}{2}cd\sin\theta + 2 \cdot \frac{1}{2}da\sin(180^\circ - \theta) \\ &= (ab + bc + cd + da)\sin\theta \qquad (\because \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta) \\ &= \{(b + d)a + c(b + d)\}\sin\theta \\ &= (a + c)(b + d)\sin\theta \\ &= \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}\sin\theta \end{aligned}$$

したがって

$$\text{四角形 ABCD} = \frac{1}{2}\text{平行四辺形 PQRS} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}\sin\theta \qquad \text{〔証明終〕}$$

【3】AD $= x$ とすると，△ABC の面積について

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)$$

また，一方で

$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}cx\sin\alpha + \frac{1}{2}bx\sin\beta$$

と表されるので

$$\frac{1}{2}cx\sin\alpha + \frac{1}{2}bx\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)$$

$$\therefore\quad x(c\sin\alpha + b\sin\beta) = bc\sin(\alpha+\beta)$$

$$\therefore\quad x = \mathrm{AD} = \boldsymbol{\frac{bc\sin(\alpha+\beta)}{c\sin\alpha + b\sin\beta}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) AB $= x$，BC $= \sqrt{2}x$ とおく．

$\angle\mathrm{ABC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ であり，△ABC において余弦定理を用いると

$$(\sqrt{5})^2 = x^2 + (\sqrt{2}x)^2 - 2\cdot x\cdot\sqrt{2}x\cdot\cos 135^\circ$$

$$\therefore\quad 5 = x^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x^2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore\quad x^2 = 1$$

$x > 0$ より，$x = \mathrm{AB} = \mathbf{1}$　　**(答)**

(2) AD $= y$ とおき，△ACD において余弦定理を用いて

$$(\sqrt{5})^2 = y^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot y\cdot\cos 45^\circ$$

$$\therefore\quad 5 = y^2 + 8 - 4y$$

$$\therefore\quad (y-1)(y-3) = 0$$

$$\therefore\quad y = 1,\ 3$$

さらに，BD $= z$ とおく．

$\angle\mathrm{BAD} = \theta$ とおくと，$\angle\mathrm{BCD} = 180^\circ - \theta$ であり，△ABD に余弦定理を用いると

$$\cos\theta = \frac{1^2 + y^2 - z^2}{2\cdot 1\cdot y} = \frac{y^2 - z^2 + 1}{2y} \quad \cdots\cdots①$$

また，△BCD に余弦定理を用いると

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - z^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad -\cos\theta = \frac{10 - z^2}{8} \quad \cdots\cdots②$$

①，② 式より

$$\frac{y^2 - z^2 + 1}{2y} = -\frac{10 - z^2}{8}$$

$$\therefore\quad (y+4)z^2 = 4y^2 + 10y + 4$$

$$\therefore\quad z^2 = \frac{4y^2 + 10y + 4}{y+4} \qquad (\because\quad y > 0)$$

ここで，$y = 1$ のとき

$$z^2 = \frac{18}{5} \qquad \therefore\quad z = \frac{3}{5}\sqrt{10} \qquad (\because\quad z > 0)$$

$y = 3$ のとき

$$z^2 = 10 \qquad \therefore \quad z = \sqrt{10} \qquad (\because \quad z > 0)$$

以上より，$(\mathrm{AD},\ \mathrm{BD}) = \left(\mathbf{1},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\sqrt{\mathbf{10}}\right),\ (\mathbf{3},\ \sqrt{\mathbf{10}})$　　(答)

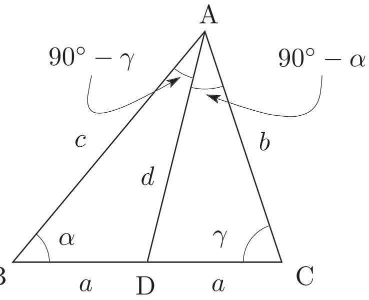
【5】図のように

$$\angle \mathrm{ACB} = \gamma$$

とおくと

$$\angle \mathrm{BAD} = 90^\circ - \gamma$$

となる.



また，条件式より

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

である.

これらより，α，β，γ はすべて鋭角である.

$\triangle\mathrm{ABD}$ において，正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{BD}}{\sin(90^\circ - \gamma)} \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{AD}}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{BD}}{\cos\gamma}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\gamma}$$

また，$\triangle\mathrm{ADC}$ において，正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin\gamma} = \frac{\mathrm{DC}}{\sin(90^\circ - \alpha)} \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{AD}}{\sin\gamma} = \frac{\mathrm{BD}}{\cos\alpha}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha}$$

2 式より

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha}$$

$$\therefore \quad \sin\alpha\cos\alpha = \sin\gamma\cos\gamma \quad \cdots\cdots(*)$$

ここで

$\mathrm{BC} = 2a$，$\mathrm{CA} = b$，$\mathrm{AB} = c$，$\mathrm{AD} = d$，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を R

とおき，$(*)$ に余弦定理，正弦定理を用いると

$$\frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - d^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

$$\therefore \quad b^2(a^2 + c^2 - d^2) = c^2(a^2 + b^2 - d^2)$$

$$\therefore \quad (b^2 - c^2)a^2 - (b^2 - c^2)d^2 = 0$$

$$\therefore \quad (b^2 - c^2)(a^2 - d^2) = 0$$

$a > 0$，$b > 0$，$c > 0$，$d > 0$ であるから

$$b = c \quad \text{または} \quad a = d$$

$b = c$ のときは，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ の二等辺三角形である.

$a = d$ のときは，$\triangle\mathrm{ABD}$ が $\mathrm{DA} = \mathrm{DB}$ の二等辺三角形であるから，その底角は等しく

$$\alpha = 90^\circ - \gamma \qquad \therefore \quad \alpha + \gamma = 90^\circ$$

つまり，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ の直角三角形である.

以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は

AB = AC の二等辺三角形　または　∠BAC = 90° の直角三角形　　(答)

【6】△ABC の内角 A に着目する．

△ABC について，面積を S とし，また，余弦定理を用いて

$$\begin{cases} S = \dfrac{1}{2}bc\sin A \\ \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4S = 2bc\sin A \quad \cdots\cdots ① \\ b^2+c^2-a^2 = 2bc\cos A \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①^2 + ②^2 より

$$(4S)^2 + \left(b^2+c^2-a^2\right)^2 = (2bc)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad 16S^2 &= (2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 \\ &= (2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2) \\ &= \left\{(b+c)^2-a^2\right\}\left\{a^2-(b-c)^2\right\} \\ &= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

条件より，$a+b+c=2s$ であるから

$$b+c=2s-a,\ \ a+b=2s-c,\ \ c+a=2s-b$$

したがって

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b) \\ &= 16s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

よって

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{〔証明終〕}$$

問題

【1】(1) $\angle \mathrm{APB} = 30^\circ$ で一定であるから，円周角の定理の逆より，A，B，P は同一円周上にあり，$\angle \mathrm{APB}$ は，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角である．

いま，$\angle \mathrm{APB} = 90^\circ$ のとき，AB は直径になるから，$\angle \mathrm{APB} < 90^\circ$ より，この円の中心は弦 AB に対して，P と同じ側にある．

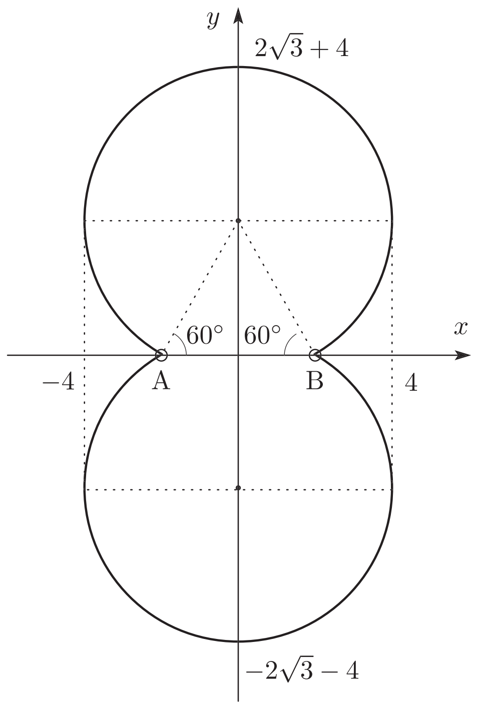
P が弦 AB より上側 (第 1，第 2 象限) の点であるときは，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の上側にある．

また，P が弦 AB より下側 (第 3，第 4 象限) の点であるときは，この x 軸に対して対称な図形である．

円周角の 2 倍が中心角であるから，この 2 つの円の中心を $\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$ とすると，$\triangle \mathrm{ABC_1}$，$\triangle \mathrm{ABC_2}$ は正三角形であり，AB=4 なので

$$\mathrm{C_1}\ (0,\ 2\sqrt{3}),\quad \mathrm{C_2}\ (0,\ -2\sqrt{3})$$

したがって，この図形 F を図示すると，次のとおり．



(答)

(2) (1) の図より，x 軸対称であるから，求める面積は

$$2\times\{(\text{半径 4 の円の円周角 }300^\circ\text{ のおうぎ形}) + (\text{1 辺の長さ 4 の正三角形})\}$$

である．

このおうぎ形の面積 S' と円の面積 S の比は中心角の大きさの比に等しいから

$$S : S' = 360 : 300 \qquad \therefore\quad S' = \frac{5}{6}S$$

である．

$$\begin{aligned} &2\cdot\left\{\pi\cdot 4^2\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}\right\} \\ =\ &\boldsymbol{\frac{80}{3}\pi+8\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

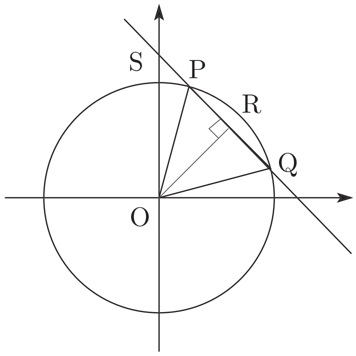
【2】△POQ は頂角が 60° の二等辺三角形より

$$\triangle\mathrm{POQ}\text{ は正三角形}$$

であり

$$\mathrm{PQ} = 5$$

である．



ここで，O から線分 PQ へおろした垂線の足を R とすると

$$\mathrm{OR} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

また，直線 l の y 切片を S とすると

$$l \text{ の傾き } -1\ (= \tan(-45^\circ))$$

より

$$\angle\mathrm{RSO} = 45^\circ$$

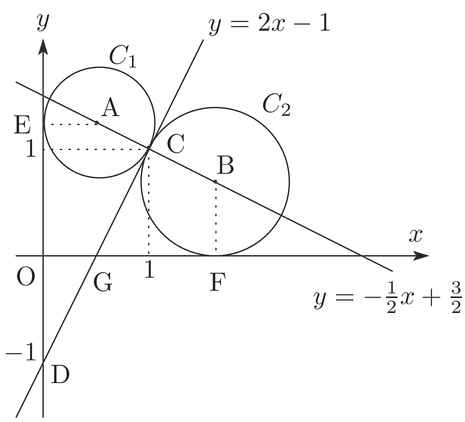
であり，$\angle\mathrm{ORS} = 90^\circ$ でもあるから

$$\triangle\mathrm{SOR}\text{ は }\mathrm{RS} = \mathrm{RO} = \frac{5}{2}\sqrt{3}\text{ の直角二等辺三角形}$$

であり

$$k = \mathrm{OS} = \frac{5}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{5}{2}\sqrt{6}} \qquad \text{(答)}$$

【3】図のように各点をとり，C_1，C_2 の半径の長さを s，t とする．



2 円の中心を通る直線は，(1，1) を通り傾き 2 の直線 l と直交するので，その方程式は

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots(*)$$

である．

まず，C_1 の中心 A について考える．

その座標は，$(*)$ 上の点より

$$\mathrm{A}\left(s,\,-\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}\right)\quad\cdots\cdots①$$

ここで，三平方の定理と円の性質より

$$\mathrm{CD}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore\quad \mathrm{ED}=\mathrm{CD}=\sqrt{5}$$

これより，A の y 座標は

$$\sqrt{5}-1$$

これと ① を比較して

$$-\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}=\sqrt{5}-1$$

$$\therefore\quad s=5-2\sqrt{5}$$

したがって

$$\mathrm{A}\left(\boldsymbol{5-2\sqrt{5},\sqrt{5}-1}\right)\qquad(答)$$

次に，C_2 の中心 B について考える．その座標は，$(*)$ 上の点より

$$\mathrm{B}(3-2t,\,t)\quad\cdots\cdots②$$

ここで，三平方の定理と円の性質より

$$\mathrm{GC}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\quad \mathrm{GF}=\mathrm{GC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

これより，B の x 座標は

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

これと ② を比較して

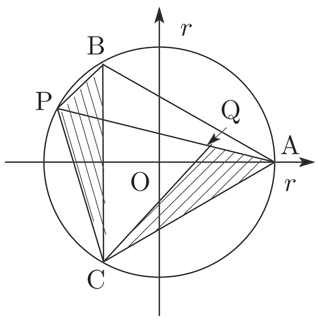
$$3-2t=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\quad t=\frac{5-\sqrt{5}}{4}$$

したがって

$$\mathrm{B}\left(\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{5-\sqrt{5}}{4}}\right)\qquad(答)$$

【4】(1) $\triangle$ABC は正三角形より，図のように A$(r, 0)$ としても一般性を失わない．



$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ に対する円周角より

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{APC} = 60^\circ$$

ここで，線分 AP 上に，$\triangle$PCQ が正三角形になるよう Q をとる．

ここで，$\triangle$BPC と $\triangle$AQC において

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} \quad (\because \ \triangle\mathrm{ABC}\text{ が正三角形})$$

$$\mathrm{PC} = \mathrm{QC} \quad (\because \ \triangle\mathrm{PCQ}\text{ が正三角形})$$

$$\angle\mathrm{PCB} = \angle\mathrm{PCA} - \angle\mathrm{BCA} = \angle\mathrm{PCA} - 60^\circ = \angle\mathrm{PCA} - \angle\mathrm{PCQ} = \angle\mathrm{QCA}$$

したがって，2 辺の長さとその間の角の大きさが等しいから

$$\triangle\mathrm{BPC} \equiv \triangle\mathrm{AQC}$$

対応する辺の長さが等しいことから

$$\mathrm{BP} = \mathrm{AQ}$$

したがって

$$\mathrm{BP} + \mathrm{CP} = \mathrm{AQ} + \mathrm{QP} = \mathrm{AP}$$ 〔証明終〕

(2) (1) より

$$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{CP} = 2\mathrm{AP}$$

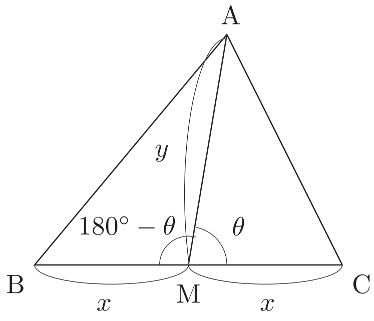
したがって，求めるのは AP が最大となるときであり，それは AP が円の直径となるときである．その値は

$\boldsymbol{4r}$ (答)

【5】図のように $\triangle$ABC を考え

$$\mathrm{BM} = \mathrm{CM} = x,\ \ \mathrm{AM} = y,$$
$$\angle\mathrm{AMC} = \theta$$

とおく.



$\triangle$ABM において，余弦定理を用いて

$$\mathrm{AB}^2 = x^2+y^2-2xy\cos(180°-\theta) \quad \cdots\cdots ①$$
$$\mathrm{AC}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta \quad \cdots\cdots ②$$

ここで

$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$

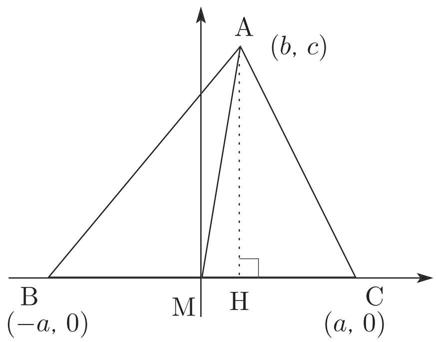
であるから，①，② より

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(x^2 + y^2) = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$ 〔証明終〕

ここで，$90° < \theta < 180°$ であっても $\angle\mathrm{AMB} = \theta$ とすれば同様.

＜別解＞

図のように M が原点にくるように座標平面上に A，B，C の座標をとり，A から BC へ下ろした垂線の足を H とすると



$$\mathrm{H}(b,\ 0)$$

$\triangle$ABH において三平方の定理を用いて

$$\mathrm{AB}^2 = \{b - (-a)\}^2 + c^2$$
$$= (a + b)^2 + c^2$$

$\triangle$ACH において三平方の定理を用いて

$$\mathrm{AC}^2 = (a - b)^2 + c^2$$

$\triangle$AMH において三平方の定理を用いて

$$\mathrm{AM}^2 = b^2 + c^2$$

また

$$\mathrm{BM}^2 = a^2$$

である.

これらを用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 &= (a^2 + b^2 + 2ab + c^2) + (a^2 + b^2 - 2ab + c^2)\\ &= 2\{a^2 + (b^2 + c^2)\}\\ &= 2(\mathrm{BM}^2 + \mathrm{AM}^2)\end{aligned}$$ 〔証明終〕

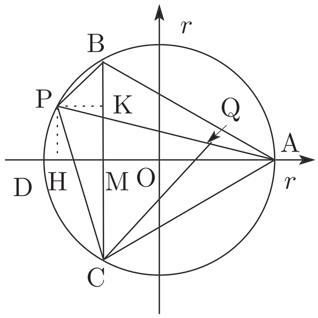
【6】A$(r,\,0)$ とすると

$$\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}r,\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

となる．また

$$\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2}r,\,0\right),\ \ \mathrm{D}(-r,\,0)$$

とする．



ここで，△PCB の辺 BC の中点 M に対して中線定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 &= 2(\mathrm{PM}^2+\mathrm{BM}^2)\\ &= 2\left(\frac{3}{4}r^2+\mathrm{PM}^2\right)\\ &= \frac{3}{2}r^2+2\mathrm{PM}^2 \quad \cdots\cdots①\end{aligned}$$

同様に，△PDO の辺 OD の中点 M に対して中線定理を用いて

$$\mathrm{PD}^2+\mathrm{PO}^2=2(\mathrm{PM}^2+\mathrm{OM}^2)$$

$$\therefore\ \ 2\mathrm{PM}^2-\mathrm{PD}^2=\mathrm{PO}^2-2\mathrm{OM}^2=r^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}r\right)^2=\frac{1}{2}r^2$$

$$\therefore\ \ 2\mathrm{PM}^2=\mathrm{PD}^2+\frac{1}{2}r^2 \quad \cdots\cdots②$$

また，AD は円の直径であるから，△APD は ∠APD $=90^\circ$ の直角三角形より

$$\mathrm{PD}^2+\mathrm{AP}^2=(2r)^2=4r^2 \quad \cdots\cdots③$$

以上より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 &= \mathrm{AP}^2+\frac{3}{2}r^2+2\mathrm{PM}^2 \qquad (\because\ ①)\\ &= \mathrm{AP}^2+\frac{3}{2}r^2+\left(\mathrm{PD}^2+\frac{1}{2}r^2\right) \qquad (\because\ ②)\\ &= 4r^2+\frac{3}{2}r^2+\frac{1}{2}r^2 \qquad (\because\ ③)\\ &= 6r^2\end{aligned}$$

となり，これは点 P の位置によらずつねに一定である．　〔証明終〕

＜別解＞
P から x 軸，y 軸へおろした垂線の足をそれぞれ，H，K とする．
P$(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{H}(x,\ 0),\ \ \mathrm{K}(0,\ y)$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\\
=&\ \left\{(r-x)^2+y^2\right\}+\left\{\left(x+\frac{1}{2}r\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r-y\right)^2\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\left\{\left(x+\frac{1}{2}r\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2\right\}\\
=&\ (x^2-2rx+r^2+y^2)+2\left(x^2+rx+\frac{1}{4}r^2\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\left(y^2-\sqrt{3}ry+\frac{3}{4}r^2\right)+\left(y^2+\sqrt{3}ry+\frac{3}{4}r^2\right)\\
=&\ 3(x^2+y^2)+3r^2\\
=&\ 3\mathrm{OP}^2+3r^2\\
=&\ 6r^2
\end{aligned}$$

としても同様.

問題

【1】(1)
$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ \text{かつ} \\ x-y=0 \end{cases} \qquad \therefore\quad (x,\ y)=\mathbf{(1,\ 1)}$$
(答)

(2)
$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ \text{かつ} \\ x-y\neq 0 \end{cases}$$

$\therefore$　**条件 $\boldsymbol{x+y=2}$ をみたす実数の組 $\boldsymbol{(x,\ y)}$**

(ただし, $\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 1)}$ を除く)　　(答)

(3) (1), (2) のときの条件を除いては, k の方程式 ① はただ 1 つの解をもつ.

① に, $(x_0,\ y_0)$ を代入すると

$$(x_0+y_0-2)k=y_0-x_0$$

$$\therefore\quad k=\frac{y_0-x_0}{x_0+y_0-2} \qquad (\because\quad x_0+y_0\neq 2)$$

この k を ① を変形した

$$(k+1)x+(k-1)y-2k=0$$

に代入すると

$$\left(\frac{y_0-x_0}{x_0+y_0-2}+1\right)x+\left(\frac{y_0-x_0}{x_0+y_0-2}-1\right)y-2\cdot\frac{y_0-x_0}{x_0+y_0-2}=0$$

整理すると

$$(y_0-1)x-(x_0-1)y+x_0-y_0=0$$

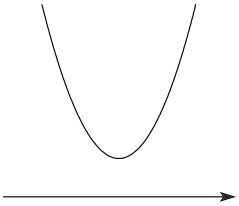
となり, P に対してただひとつの直線が定まる.　　〔証明終〕

【2】与えられた方程式の解を，$y=x^2-2ax+4$ と $y=0$ の共有点の x 座標として考える．
2 次関数

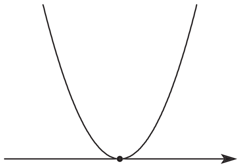
$$y=x^2-2ax+4=(x-a)^2-a^2+4$$

の頂点の y 座標 $-a^2+4$ と $y=0$ (x 軸) との位置を比較する．

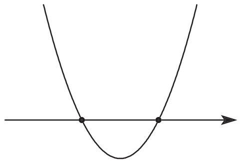
(i)



(ii)



(iii)



(i) $-a^2+4>0$ (つまり，$-2<a<2$) のとき
　　x 軸との共有点はない

(ii) $-a^2+4=0$ (つまり，$a=\pm 2$) のとき
　　x 軸と接している

(iii) $-a^2+4<0$ (つまり，$a<-2,\ a>2$) のとき
　　x 軸と異なる 2 点で交わる

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{-2<a<2} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a=\pm 2} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a<-2,\ a>2} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $y=2ax-a^2$ と $y=x^2$ との共有点の x 座標について考えると

$$x^2=2ax-a^2 \qquad \therefore \quad x^2-2ax+a^2=0$$

$$\therefore \quad (x-a)^2=0$$

より，$y=2ax-a^2$ と $y=x^2$ とが $x=a$ の 1 点のみを共有していることから，$x=a$ で接しているといえる．

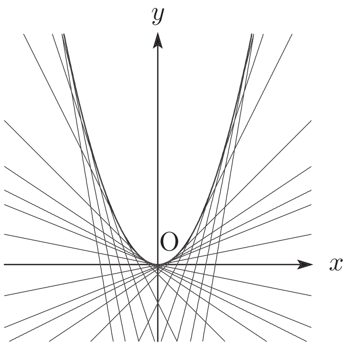
したがって，$y=2ax-a^2$ は $y=x^2$ の接線であり，その接点は，$\boldsymbol{(a,\, a^2)}$ である．

〔証明終〕

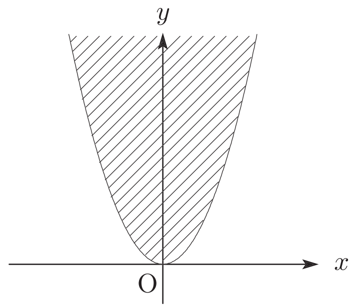
(2) $y=2ax-a^2$ が $x=a$ における接線より，$x=a$ を $y=x^2$ 上のあらゆる点について考えると図 1 のようになる．

このことから，2 次関数 $y=x^2$ のグラフの上側は通過し得ず，これを図 2 で示す．

〔図 1〕



〔図 2〕



$y=x^2$ 上の点は除く

(答)

(3) ① より

$$a^2-2x\cdot a+y=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$(x,\, y)=(1,\, 0)$ のとき

$$a^2-2a=0$$

より，(判別式) $=1\ (>0)$ であるから，解は 2 個　　(答)

$(x,\, y)=(1,\, 1)$ のとき

$$a^2-2a+1=0$$

より，(判別式) $=1-1=0$ であるから，解は 1 個　　(答)

$(x,\, y)=(1,\, 2)$ のとき

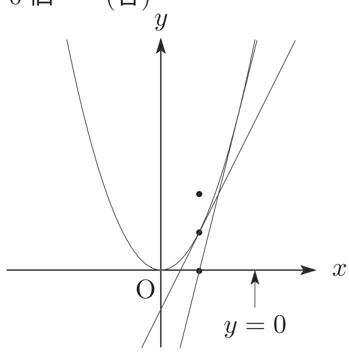
$$a^2-2a+2=0$$

より，(判別式) $=1-2\ (<0)$ であるから，解は 0 個　　(答)

したがって，$(*)$ は ① と同じ式であり，また，a は接点の x 座標であるから

$(x,\, y)=(1,\, 0)$，$(1,\, 1)$，$(1,\, 2)$ から，2 次関数 $y=x^2$ へ引ける接線の本数に対応している．

$(x,\, y)=(1,\, 0)$ のときには，$y=0$，$y=4x-4$ の 2 本，$(x,\, y)=(1,\, 1)$ のときには，$y=2x-1$ の 1 本が引ける．



【4】2 交点 P，Q の座標を

$$\mathrm{P}(\alpha,\alpha^2),\ \mathrm{Q}(\beta,\beta^2)$$

とすると，点 P，Q が存在するには，異なる実数 α，β が存在すればよい．

A が線分 PQ の中点となるのは

$$(p,\,q)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$$

となるときである．これを整理すると

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2p\\ \alpha^2+\beta^2=2q\end{cases}$$

より

$$\alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)}{2}=\frac{(2p)^2-2q}{2}=2p^2-q$$

これより，解と係数の関係より，α，β は t の 2 次方程式

$$t^2-2pt+2p^2-q=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

の 2 解であり，その判別式 D について

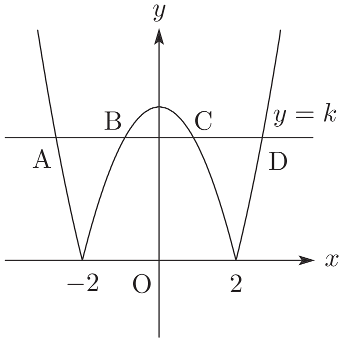
$$\frac{D}{4}=p^2-(2p^2-q)=q-p^2>0 \qquad (\because\ \text{①})$$

したがって，$(*)$ はつねに相異なる 2 つの実数解をもつ．

ここで，$(*)$ の 2 解 α，β は P，Q の x 座標であったから，題意は示された．

〔証明終〕

【5】 まず，$y=\left|x^2-4\right|$ のグラフをかくと



$$y=\left|x^2-4\right|$$
$$=\begin{cases} x^2-4 & (x \leqq -2,\ x \geqq 2) \\ -x^2+4 & (-2 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

これより，A，B，C，D の x 座標はそれぞれ

$$x^2-4=k,\quad -x^2+4=k$$

の解であり

$$x=\pm\sqrt{4+k},\quad x=\pm\sqrt{4-k}$$

である．A，B，C，D の位置関係より，それぞれの x 座標は

$$\mathrm{A}(-\sqrt{4+k}),\quad \mathrm{B}(-\sqrt{4-k}),\quad \mathrm{C}(\sqrt{4-k}),\quad \mathrm{D}(\sqrt{4+k})$$

となる．ここで

$$\mathrm{BC}=\sqrt{4-k}+\sqrt{4-k}=2\sqrt{4-k}$$
$$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=\sqrt{4+k}-\sqrt{4-k}$$

したがって，条件をみたすのは

$$2\sqrt{4-k}=\sqrt{4+k}-\sqrt{4-k}$$
$$\therefore\quad 3\sqrt{4-k}=\sqrt{4+k}$$

両辺はともに正であるから 2 乗して

$$9(4-k)=4+k$$
$$\therefore\quad k=\frac{16}{5}$$

これは，$0<k<4$ をみたしているので，求める k の値は

$$k=\boldsymbol{\frac{16}{5}} \qquad \text{(答)}$$

M1JS/M1J
高 1 選抜東大数学
高 1 東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	