春期講習　確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

高１難関大数学

【1】(1) 求める方程式は，$y=a(x-1)^2-4$ と表せる．これが点 $(3,\ 4)$ を通るから

$$4=a\times 2^2-4 \qquad \therefore\ a=2$$

以上より

$$\boldsymbol{y=2(x-1)^2-4} \qquad (答)$$

(2) 求める方程式を，$y=ax^2+bx+c$ とおくと，

点 $(-1,\ -6)$ を通ることから，$-6=a-b+c$ $\cdots$①

$(0,\ -7)$ を通ることから，$-7=c$ $\cdots$②

$(2,\ 9)$ を通ることから，$9=4a+2b+c$ $\cdots$③

② を ①，③ にそれぞれ代入して

$$\begin{cases} a-b-7=-6 & \cdots ④ \\ 4a+2b-7=9 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

④，⑤ より

$$a=3,\ b=2$$

だから，求める方程式は

$$\boldsymbol{y=3x^2+2x-7} \qquad (答)$$

【2】(1) $x+y=3$ より，$y=3-x$ $\cdots$①

また，$y=3-x\geqq 0$ より，$x\leqq 3$

よって，$0\leqq x\leqq 3$

① を x^2+3y^2 に代入して

$$\begin{aligned} x^2+3y^2 &= x^2+3(3-x)^2 \\ &= \boldsymbol{4x^2-18x+27} \quad (答) \end{aligned}$$

(2) (1) より，

$$x^2+3y^2=4\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{27}{4}$$

$0\leqq x\leqq 3$ より，

最大値は，$x=0$ のとき 27

最小値は，$x=\dfrac{9}{4}$ のとき $\dfrac{27}{4}$

であり，① より

$x=0$ のとき，$y=3$

$x=\dfrac{9}{4}$ のとき，$y=\dfrac{3}{4}$

であることから，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=0,\ y=3}\text{のとき，}\textbf{最大値 }\boldsymbol{27} \\ \boldsymbol{x=\frac{9}{4},\ y=\frac{3}{4}}\text{のとき，}\textbf{最小値}\boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{cases} \qquad (答)$$

【3】(1) 袋の中の 15 個の球は全て区別がつくものとすると，1 番目，2 番目の球の並び方は，

$${}_{15}\mathrm{P}_2 = 210(\text{通り})$$

(i) 1 番目が黒球であるとき，題意をみたす並び方は

$${}_{5}\mathrm{P}_2 = 20(\text{通り})$$

(ii) 1 番目が白球であるとき，題意をみたす並べ方は

$${}_{10}\mathrm{P}_1 \cdot {}_{5}\mathrm{P}_1 = 50(\text{通り})$$

(i) または (ii) が起こる確率は，(i) と (ii) が互いに排反であることを考えて，

$$\frac{20+50}{210} = \mathbf{\frac{1}{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 袋の中の 15 個の球は全て区別がつくものとすると 1，2，3 番目の球の並び方は，

$${}_{15}\mathrm{P}_3 = 15 \cdot 14 \cdot 13(\text{通り})$$

(i) 1 番目が黒球であるとき，題意をみたす並べ方は

$${}_{5}\mathrm{P}_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3(\text{通り})$$

(ii) 1 番目が白球であるとき，題意をみたす並べ方は

$${}_{10}\mathrm{P}_1 \cdot {}_{5}\mathrm{P}_2 = 10 \cdot 5 \cdot 4(\text{通り})$$

(i) または (ii) が起こる確率は，(i) と (ii) が互いに排反であることを考えて，

$$\begin{aligned}\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 + 10 \cdot 5 \cdot 4}{15 \cdot 14 \cdot 13} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 13}{15 \cdot 14 \cdot 13} \\ &= \mathbf{\frac{2}{21}} \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

【4】〔I〕　$0° \leqq \theta \leqq 45°$ $\cdots\cdots$①，　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{4}{3}$ $\cdots\cdots$②

(1)　② の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{16}{9}$$

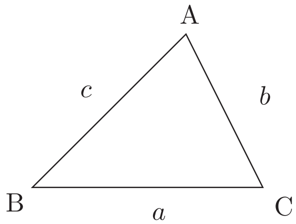
$$\therefore\quad 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{16}{9}$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{\frac{7}{18}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\\ &= \frac{4}{3}\cdot\left(1 - \frac{7}{18}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{22}{27}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

〔II〕　△ABC について，∠A，∠B，∠C の対辺の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$　$(a>0,\ b>0,\ c>0)$ とし，また外接円の半径を $R\ (>0)$ とおく．このとき正弦定理，余弦定理を用いて

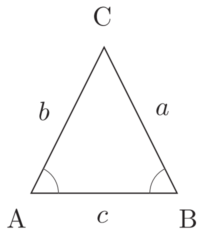


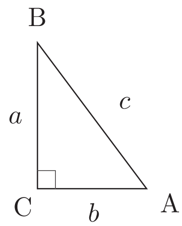
$$\begin{aligned}&\sin A\cos A = \sin B\cos B\\ \Longleftrightarrow\ & \frac{a}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \Longleftrightarrow\ & a^2(b^2+c^2-a^2) = b^2(c^2+a^2-b^2)\\ \Longleftrightarrow\ & (a^2-b^2)c^2 - (a^4-b^4) = 0\\ \Longleftrightarrow\ & (a^2-b^2)\{c^2-(a^2+b^2)\} = 0\\ \Longleftrightarrow\ & (a+b)(a-b)\{c^2-(a^2+b^2)\} = 0\\ \Longleftrightarrow\ & a = b \quad \text{または} \quad a^2+b^2 = c^2\end{aligned}$$

よって，△ABC は

$$\left\{\begin{array}{l}\textbf{CB} = \textbf{CA}\ \text{である二等辺三角形}\\ \text{または}\\ \angle\mathrm{C} = \mathbf{90°}\ \text{である直角三角形}\end{array}\right.$$

(答)





【5】(1)

$$
\begin{aligned}
&x^2-(3a+1)x+2a^2+2a\\
=&x^2-(3a+1)x+2a(a+1)\\
=&\boldsymbol{(x-2a)(x-a-1)} \qquad \textbf{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) (1) より，

$$(x-2a)(x-a-1) \leqq 0$$

$a>1$ だから，$2a>a+1$．よって，$\boldsymbol{a+1 \leqq x \leqq 2a}$ **(答)**