M1T

春期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高 1 難関大数学

問題

【1】(1) 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ とおくと，

点 (0, 4) を通るので，　$4 = c$　……①
点 (1, 3) を通るので，　$3 = a + b + c$　……②
点 (3, 13) を通るので，$13 = 9a + 3b + c$　……③

①，②，③ を連立して解くと，$(a,\ b,\ c) = (2,\ -3,\ 4)$
よって，求める 2 次関数は

$$\boldsymbol{y = 2x^2 - 3x + 4} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 頂点の座標を $(t,\ 2t)$ (t は実数) とおくと，2 次関数は

$$y = -(x-t)^2 + 2t$$

とおける．これが，点 (1, 3) を通るので

$$\begin{aligned} &3 = -(1-t)^2 + 2t \\ \Longleftrightarrow\ &t^2 - 4t + 4 = 0 \\ \therefore\quad &t = 2 \end{aligned}$$

よって，求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= -(x-2)^2 + 4 \\ &= \boldsymbol{-x^2 + 4x} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

【2】(1) 平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2+2x)+4 \\ &= -(x+1)^2+5 \end{aligned}$$

この関数のグラフは，軸が $x=-1$ の上に凸な放物線なので，$1 \leqq x \leqq 3$ において単調に減少する．よって，

$x=1$ のとき，**最大値　$\mathbf{1}$**
$x=3$ のとき，**最小値　$\mathbf{-11}$**　**(答)**

(2) 平方完成すると，

$$y=(x-2)^2-3$$

より，この関数のグラフは，軸が $x=2$ の下に凸なグラフになることより，

$x=4$ のとき，**最大値　$\mathbf{1}$**
$x=2$ のとき，**最小値　$\mathbf{-3}$**　**(答)**

(3) 平方完成すると，

$$y=(x-a)^2-a^2$$

この関数のグラフは，軸が $x=a$ の下に凸なグラフになることより，軸 $x=a$ の位置によって場合を分ける．

〔I〕最大値について，定義域の真中の点は

$$\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

であることから，軸 $x=a$ が $x=\frac{1}{2}$ より右にあるか左にあるかで場合を分ける．

(i) $a<\frac{1}{2}$ のとき
最大値をとるのは $x=2$ のときであるので，

$$\begin{aligned} (\text{最大値}) &= 2^2-2a\cdot 2 \\ &= 4-4a \end{aligned}$$

(ii) $a \geqq \frac{1}{2}$ のとき
最大値をとるのは $x=-1$ のときであるので，

$$\begin{aligned} (\text{最大値}) &= (-1)^2-2a\cdot(-1) \\ &= 2a+1 \end{aligned}$$

以上 (i)(ii) より

$$\text{最大値}=\begin{cases} \boldsymbol{4-4a} & \left(\boldsymbol{a<\frac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{2a+1} & \left(\boldsymbol{a \geqq \frac{1}{2}}\right) \end{cases} \quad \textbf{(答)}$$

〔II〕最小値について，軸 $x=a$ の位置によって場合を分ける．

(i) $a<-1$ のとき

最小値をとるのは $x=-1$ のときであるので，

$$\begin{aligned}(\text{最小値}) &= (-1)^2-2a\cdot(-1)\\ &= 2a+1\end{aligned}$$

(ii) $-1 \leqq a < 2$ のとき

最小値をとるのは $x=a$ のときであるので，

$$(\text{最小値}) = -a^2$$

(iii) $a \geqq 2$ のとき

最小値をとるのは $x=2$ のときであるので，

$$\begin{aligned}(\text{最小値}) &= 2^2-2a\cdot 2\\ &= 4-4a\end{aligned}$$

以上 (i)(ii)(iii) より

$$\text{最小値} = \begin{cases} \boldsymbol{2a+1} & \boldsymbol{(a<-1)} \\ \boldsymbol{-a^2} & \boldsymbol{(-1 \leqq a < 2)} \\ \boldsymbol{4-4a} & \boldsymbol{(a \geqq 2)} \end{cases} \qquad \textbf{(答)}$$

【3】

$$f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

より，軸 $x=1$ と区間 $a \leqq x \leqq a+1$ の位置関係について場合分けすると

(i) $a+1 \leqq 1$ (つまり $a \leqq 0$) のとき
$x = a+1$ で最小となり

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a+1) \\ &= a^2 - 1 \end{aligned}$$

(ii) $a \leqq 1 \leqq a+1$ (つまり $0 \leqq a \leqq 1$) のとき
$x=1$ で最小となり

$$g(a) = f(1) = -1$$

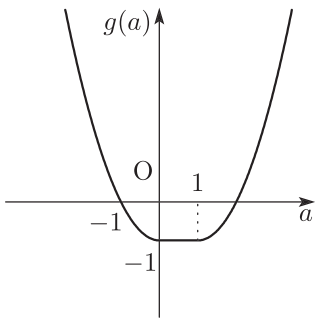
(iii) $1 \leqq a$ のとき
$x = a$ で最小となり

$$g(a) = f(a) = (a-1)^2 - 1$$

以上より

$$g(a) = \begin{cases} \boldsymbol{a^2 - 1} & \boldsymbol{(a \leqq 0)} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{(0 \leqq a \leqq 1)} \\ \boldsymbol{(a-1)^2 - 1} & \boldsymbol{(a \geqq 1)} \end{cases} \quad \textbf{(答)}$$

であるから，グラフを図示すると下図のとおり．



(答)

【4】

$$x^2+2x-1=t$$

とおくと，

$$t=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$$

より，$-2 \leqq x \leqq 1$ における t のとりうる値の範囲は

$$-2 \leqq t \leqq 2$$

である．したがって，題意は t の関数

$$y=t^2+2t-1=(t+1)^2-2\ (-2 \leqq t \leqq 2)$$

の最小値，最大値を求めることに等しく，

$$\begin{cases} t=2 \text{ のとき 最大値 } 7 \\ t=-1 \text{ のとき 最小値 } -2 \end{cases}$$

をとり，$t=x^2+2x-1$ より $x^2+2x-1=2$ となるのは

$$\begin{aligned} x^2+2x-3&=0 \\ \therefore\quad (x-1)(x+3)&=0 \end{aligned}$$
$$-2 \leqq x \leqq 1 \text{ より，} x=1$$

$x^2+2x-1=-1$ となるのは

$$\begin{aligned} &x^2+2x=0 \\ &x(x+2)=0 \\ &\quad\therefore\quad x=0,\ -2 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{cases} x=\mathbf{1} \text{ のとき} & \text{最大値 } \mathbf{7} \\ x=\mathbf{0,\ -2} \text{ のとき} & \text{最小値 } \mathbf{-2} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【5】条件式より

$$y^2 = 3 - 4x^2 + 4x \geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$
$$\therefore \quad 4x^2 - 4x - 3 \leqq 0$$
$$\therefore \quad (2x-3)(2x+1) \leqq 0$$
$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2} \quad \cdots\cdots②$$

① を $x^2 + y^2$ に代入すると

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (3 - 4x^2 + 4x) \\ &= -3x^2 + 4x + 3 \\ &= -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{13}{3} \end{aligned}$$

これより題意は

$$f(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{13}{3} \qquad \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right)$$

の最大値・最小値を求めることに等しい．$f(x)$ は

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \text{ のとき} & \text{最大値 } \dfrac{13}{3} \\ x = -\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & \text{最小値 } \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

となる．$x = \frac{2}{3}$ のとき

$$y^2 = 3 - 4 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{35}{9}$$
$$\therefore \quad y = \pm\frac{\sqrt{35}}{3}$$

$x = -\frac{1}{2}$ のとき

$$y^2 = 3 - 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$\therefore \quad y = 0$$

よって

$$\begin{cases} \text{最大値 } \boldsymbol{\dfrac{13}{3}} & \left(x = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}},\ y = \pm\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{35}}{3}}\right) \\ \text{最小値 } \boldsymbol{\dfrac{1}{4}} & \left(x = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}},\ y = \boldsymbol{0}\right) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $x^2+y^2=4 \cdots ①$
$x+3y=2 \cdots ②$

② より，$x=2-3y$ これを ① に代入して

$$(2-3y)^2+y^2=4$$
$$10y^2-12y=0$$
$$y(5y-6)=0 \qquad \therefore y=0,\ \frac{6}{5}$$

ここで，$y=0$ のとき $x=2$，$y=\frac{6}{5}$ のとき $x=-\frac{8}{5}$ であるので，

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 0),\ \left(-\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right)}$$ **(答)**

(2) $x^2+y^2=4 \cdots ③$
$x+3y=8 \cdots ④$

④ より，$x=8-3y$ これを ① に代入して

$$(8-3y)^2+y^2=4$$
$$5y^2-24y+30=0 \cdots (*)$$

ここで，$(*)$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=12^2-5\cdot 30=-6<0$$

よって，③，④ をみたす **実数 $(x,\ y)$ は存在しない．** **(答)**

(3) $x+3y=k$ とおくと，

$$x=k-3y \quad \cdots ⑤$$

となり，これを $x^2+y^2=4$ に代入すると

$$(k-3y)^2+y^2=4$$
$$\therefore \quad 10y^2-6ky+k^2-4=0 \quad \cdots ⑥$$

ここで，⑥ を y の 2 次方程式と考えれば，⑥ が実数解を持つとき，⑤ より，x も実数となるので，求める k の値の条件は，

(⑥ の判別式) $\geqq 0$

となることである．⑥ の判別式を D とすると，

$$D/4=(-3k)^2-10(k^2-4)\geqq 0$$
$$k^2-40\leqq 0$$
$$\left(k+2\sqrt{10}\right)\left(k-2\sqrt{10}\right)\leqq 0$$

よって，$-2\sqrt{10}\leqq k\leqq 2\sqrt{10}$ より，

$x+3y$ の **最大値：$\boldsymbol{2\sqrt{10}}$**
最小値：$\boldsymbol{-2\sqrt{10}}$ (答)

問題

【1】
$$\begin{cases} x^2+4ax+12a=0 & \cdots\cdots① \\ x^2-2ax+4a-1=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，② の判別式を D_1，D_2 とすると

$$\frac{D_1}{4}=(2a)^2-12a=4a(a-3)$$
$$\frac{D_2}{4}=a^2-(4a-1)=a^2-4a+1$$

ともに実数解をもつ条件は

$$\frac{D_1}{4}\geqq 0 \text{ かつ } \frac{D_2}{4}\geqq 0$$

$$\therefore \begin{cases} 4a(a-3)\geqq 0 \\ \text{かつ} \\ a^2-4a+1\geqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a\leqq 0 \text{ または } a\geqq 3 \\ \text{かつ} \\ a\leqq 2-\sqrt{3} \text{ または } a\geqq 2+\sqrt{3} \end{cases}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{a\leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{a\geqq 2+\sqrt{3}}$ 　(答)

【2】 $f(x)=x^2-mx-2m$ とする．また，$f(x)=0$ の判別式を D とする．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-mx-2m \\ &= \left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}-2m \end{aligned}$$

(1) 題意をみたすためには,

$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ f(-1)>0 \\ \text{軸 } x=\dfrac{m}{2}>-1 \end{cases}$$

であればよく,

$$\begin{cases} m^2+8m \geqq 0 & \cdots ① \\ 1-m>0 & \cdots ② \\ m>-2 & \cdots ③ \end{cases}$$

ここで，① より

$$\begin{aligned} m(m+8) &\geqq 0 \\ m &\leqq -8,\ m \geqq 0 \quad \cdots ①' \end{aligned}$$

② より

$$m<1 \quad \cdots ②'$$

①′，②′，③ をともにみたす m の値の範囲は

$\boldsymbol{0 \leqq m < 1}$　　**(答)**

(2) 題意をみたすためには

$$f(1)<0$$

であればよく

$$\begin{aligned} f(1) &= 1-3m<0 \\ \therefore\quad \boldsymbol{m} &> \boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

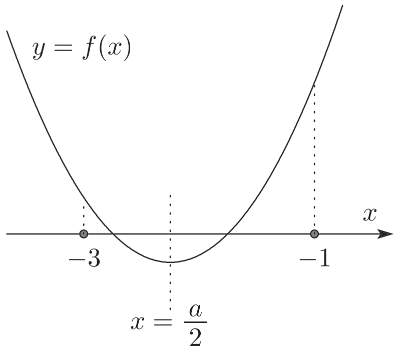
(答)

【3】 $$x^2-ax+2=0 \quad \cdots(*) \quad (a\text{ は実数})$$

とする.

(1)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-ax+2 \\ &= \left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+2 \end{aligned}$$

とおく. $f(x)$ が題意をみたすとき, $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる.



このとき $f(x)=0$ の判別式を D とおくと,

$$\begin{cases} D \geqq 0 & \cdots ① \\ -3 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq -1 & \cdots ② \\ f(-3) \geqq 0 & \cdots ③ \\ f(-1) \geqq 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

①より,

$$a^2-8 \geqq 0$$
$$a \leqq -2\sqrt{2},\ \ 2\sqrt{2} \leqq a \quad \cdots ①'$$

②より,

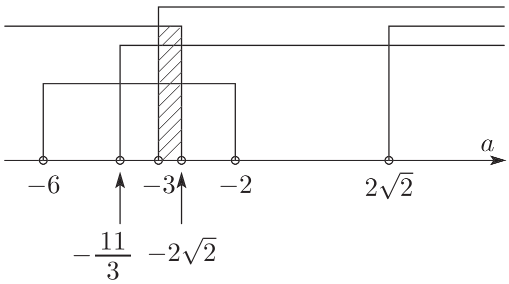
$$-6 \leqq a \leqq -2 \quad \cdots ②'$$

③より

$$\begin{aligned} f(-3) &= 9+3a+2 \\ &= 3a+11 \geqq 0 \\ \therefore \quad a &\geqq -\frac{11}{3} \quad \cdots ③' \end{aligned}$$

④より,

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1+a+2 \\ &= a+3 \geqq 0 \\ \therefore \quad a &\geqq -3 \quad \cdots ④' \end{aligned}$$



ゆえに求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-3 \leqq a \leqq -2\sqrt{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2)　(i) $(*)$ が $-3 < x < -1$ にただ 1 つの実数解をもつとき.

$$f(-3) \cdot f(-1) < 0$$
$$(3a+11)(a+3) < 0$$
$$-\frac{11}{3} < a < -3$$

(ii) $x = -1$ を解にもつとき.

$$f(-1) = a + 3 = 0$$
$$\therefore \quad a = -3$$

このとき

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$
$$= (x+1)(x+2)$$

より，もう 1 つの解は $x = -2$ となり不適.

(iii) $x = -3$ を解にもつとき.

$$f(-3) = 3a + 11 = 0$$
$$\therefore \quad a = -\frac{11}{3}$$

このとき

$$f(x) = x^2 + \frac{11}{3}x + 2$$
$$= \frac{1}{3}(3x+2)(x+3)$$

より，もう 1 つの解は $x = -\dfrac{2}{3}$ となり，適する.

以上より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{11}{3} \leqq a < -3} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) 求める条件は (1) または (2). ゆえに

$$\boldsymbol{-\frac{11}{3} \leqq a \leqq -2\sqrt{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

【4】(1) $a=0$ を $(*)$ に代入すると,

$$-x-3=0$$
$$\therefore\ x=\mathbf{-3}\quad \textbf{(答)}$$

(2) 放物線と直線の方程式を連立させる.

$$\begin{cases} y=x^2-2x+2 & \cdots\text{①} \\ y=\dfrac{1}{a}(x+3) & \cdots\text{②} \end{cases}$$

① と ② を連立させた x の 2 次方程式

$$x^2-2x+2=\frac{1}{a}(x+3)$$
$$x^2-\left(2+\frac{1}{a}\right)x+\left(2-\frac{3}{a}\right)=0$$
$$ax^2-(2a+1)x+(2a-3)=0$$

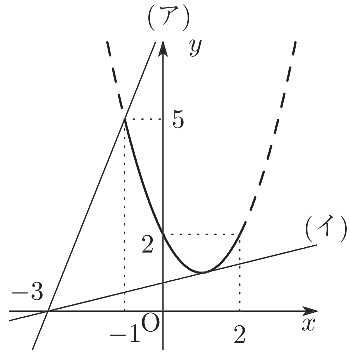
が重解をもてばよいので，判別式 D について

$$D=(2a+1)^2-4a(2a-3)=0$$
$$4a^2-16a-1=0$$
$$\therefore a=\frac{4\pm\sqrt{17}}{2}\ (\neq 0)$$

よって，$a=\boldsymbol{\dfrac{4\pm\sqrt{17}}{2}}$ **(答)**

(3) (1) より，$a=0$ は題意をみたさない．よって $a\neq 0$ であり，

$$(*)\iff x^2-\left(2+\frac{1}{a}\right)x+2-\frac{3}{a}=0$$
$$\iff x^2-2x+2=\frac{1}{a}(x+3)$$



となるので，(2) の ①，② のグラフの関係を考える.

この 2 つのグラフが $-1\leqq x\leqq 2$ の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつのは，② の傾き $\dfrac{1}{a}$ について

(ア)　$(-1,\ 5)$ を通るとき, $\dfrac{1}{a}$ は最大 (a は最小)

(イ)　①と②が接するとき, $\dfrac{1}{a}$ は最小 (a は最大)

(ア) のとき

$$5=\frac{1}{a}\cdot 2 \qquad \therefore\quad a=\frac{2}{5}$$

(イ) のとき，(2) の結果と $a>0$ であることより，$a=\dfrac{4+\sqrt{17}}{2}$

よって，求める範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2}{5}\leqq a\leqq\frac{4+\sqrt{17}}{2}}\qquad \text{(答)}$$

【5】$a=0$ のときは $f(x)=-x-1$ となり不適．よって $a \fallingdotseq 0$ である．従って，求める条件は

$$a<0 \text{ かつ } ax^2+(a-1)x+a-1=0 \text{ の判別式 } D<0$$

で，

$$\begin{aligned} D &= (a-1)^2-4a(a-1) \\ &= (a-1)\{(a-1)-4a\} \\ &= -(a-1)(3a+1) \end{aligned}$$

であるから，上の条件は

$$a<0 \text{ かつ「} a<-\frac{1}{3} \text{ または } a>1 \text{」}$$

よって求める範囲は，$\boldsymbol{a<-\frac{1}{3}}$　　(答)

【6】 $x^2+mx+m-6=0$ の解は

$$x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4m+24}}{2}\quad\cdots\cdots①$$

x が整数となるには

$m^2-4m+24=k^2$ (k は 0 以上の整数)

でなければならず

$(m-2)^2+20=k^2 \qquad \therefore\ (m-2)^2-k^2=-20$

$\therefore\ (m-2+k)(m-2-k)=-20$

$m-2+k$, $m-2-k$ は整数で $m-2+k \geqq m-2-k$ だから，これらの取り得る値の組は下のようになる.

$m-2+k$	1	2	4	5	10	20
$m-2-k$	-20	-10	-5	-4	-2	-1

ここで

$$(m-2+k)+(m-2-k)=2(m-2)=-19,-8,-1,1,8,19$$

$2(m-2)$ は偶数だから

$2(m-2)=-8,\ 8 \qquad \therefore\ m=-2,\ 6$

$m=-2$ のとき ① より $x=4,-2$

$m=6$ のとき ① より $x=0,-6$

これらは題意に適するから

$\boldsymbol{m=-2,\ 6}$ (答)

問題

【1】〔I〕

(1) 5 桁の整数の最高位の数字は 0 以外の 4 通りあり

$4 \times 4! = \mathbf{96}$ **個**　　(答)

(2) 末尾の数が 0，2，4 のいずれかであればよい．

(i) 末尾が 0 のとき，他の桁の数字の並び方は

$4! = 24$(通り)

(ii) 末尾が 2 または 4 のとき，最高位の数字は 0 以外の数字であることを考えると，その並び方は

$2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$(通り)

よって，できる偶数の個数は

$24 + 36 = \mathbf{60}$**(個)**　　**(答)**

(3) 整数の下 2 桁が 4 の倍数になればよく，0，1，2，3，4 の組合せでできるのは，

04，12，20，24，32，40

である．

(i) 下 2 桁に 0 を含むもの (04，20，40) の残りの数の並び方は，それぞれに対して 3! 通りなので，4 の倍数は

$3 \cdot 3! = 18$(個)

できる．

(ii) 下 2 桁に 0 を含まないもの (12，24，32) の残りの数の並び方は，最高位の数字に 0 が含まれないことを考えると，それぞれに対して $2 \cdot 2!$ 通りなので，4 の倍数は

$3 \cdot 2 \cdot 2! = 12$(個)

できる．

よって，できる 4 の倍数の個数は

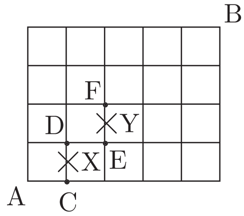
$18 + 12 = \mathbf{30}$**(個)**　　**(答)**

〔II〕

(1) 9 回の移動のうち，どの 4 回を上に行くかを選ぶ場合の数を求めればよく，

$$ {}_9\mathrm{C}_4 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{126(通り)} \quad \textbf{(答)} $$

(2) 図のように点 C，D，E，F をとる．



X を通るのは，

A → C → D → B

と移動する場合なので，その場合の数は，

$$ 1\cdot 1\cdot {}_7\mathrm{C}_3 = 35(通り) $$

これと (1) より，X を通らない経路は

$$ 126 - 35 = \mathbf{91(通り)} \qquad \textbf{(答)} $$

(3) (2) と同様に考える．

Y を通るのは，　A → E → F → B

と移動する場合なので，その場合の数は，

$$ {}_3\mathrm{C}_1\cdot 1\cdot {}_5\mathrm{C}_2 = 30(通り) $$

さらに，X も Y も通るのは，

A → C → D → E → F → B

と移動する場合なので，その場合の数は

$$ 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot {}_5\mathrm{C}_2 = 10(通り) $$

これと，(1)，(2) より，X も Y も通らない経路は，

$$ 126 - (35 + 30 - 10) = \mathbf{71(通り)} \qquad \textbf{(答)} $$

【2】 (1) 立方体の上面の色をひとつ固定すると，底面は 5 通りの塗り方があり，側面は 4 個の円順列となる．

したがって

$$ 5\times(4-1)! = \mathbf{30\ 通り} \qquad (答) $$

(2) 1 色を 2 度使い，残りの 4 色は一度ずつ使う．このとき，対面のみが同じ色で塗ってもかまわない．

したがって，上面と底面を同じ色で固定するが，この色の選び方は 5 通りあり，側面は 4 個の円順列となる．

ここで，裏返したものが同じになるので

$$ 5\times(4-1)!\times\frac{1}{2} = \mathbf{15\ 通り} \qquad (答) $$

【3】〔I〕

(1) 男子 3 人が A に入る方法は，${}_5\mathrm{C}_3$ 通りであり，残りの 6 人を B，C に入る方法は，$\dfrac{6!}{3!3!}$ 通りである．
したがって
$${}_5\mathrm{C}_3\times\frac{6!}{3!3!}=\textbf{200 通り}\qquad(\text{答})$$

(2) 1 つの部屋に入る女子の選び方は，${}_4\mathrm{C}_3$ 通りであり，部屋の選び方は ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りである．また，残りの 6 人を 3 人ずつに分けるのは，$\dfrac{6!}{3!3!}$ 通りである．
したがって
$${}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1\times\frac{6!}{3!3!}=\textbf{240 通り}\qquad(\text{答})$$

(3) 余事象で考える．
9 人を 3 人ずつに分ける方法が，$\dfrac{9!}{3!3!3!}$ 通りであるから，ここから，男子だけになる部屋ができるときを除けばよい．
これは，(1) のときが該当するが，B，C の部屋についても同様にありえるので
$$\frac{9!}{3!3!3!}-3\times200=\textbf{1080 通り}\qquad(\text{答})$$

(4) 女子の入る 2 部屋の選び方は，${}_3\mathrm{C}_2$ 通りであり，この 2 部屋に 2 人ずつ入る方法は，$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通りである．また，残りの男子 5 人を 3 人，1 人，1 人に振り分ける方法は，$\dfrac{5!}{3!1!1!}$ 通りである．
したがって
$${}_3\mathrm{C}_2\times\frac{4!}{2!2!}\times\frac{5!}{3!1!1!}=\textbf{360 通り}\qquad(\text{答})$$

〔II〕

(1) りんご 10 個を一列に並べ，そこに 2 本の仕切りを配置することを考える．
左側から最初に仕切りまでのりんごを 1 人に，その仕切りからもう一方の仕切りまでのりんごを 1 人に，それより右側にあるりんごを 1 人に分けると考えると，りんごの 10 個と仕切りの 2 個をあわせた 12 個を並べる総数に等しくなる．
したがって
$${}_{12}\mathrm{C}_2=\textbf{66 通り}\qquad(\text{答})$$

(2) あらかじめ 3 人に 2 個ずつ分配した後，残りの 4 個をどのように分配するかを考えれば，(1) と同様の議論が成り立ち，残り 4 個と仕切り 2 本とで
$${}_6\mathrm{C}_2=\textbf{15 通り}\qquad(\text{答})$$

〔III〕

(1) それぞれの果物に対して 3 通りの分け方があるので

$$3^6 = \mathbf{729(通り)} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 1 人だけに与える与え方は，3 人の子供の中から 1 人を選び，その子供に全ての果物を与える与え方で，

$${}_3C_1 \cdot 1^6 = 3(通り)$$

2 人に与えて 1 人に与えない与え方は，3 人の子供から与える 2 人を選び，それぞれの果物に対して 2 通りの分け方があることを考え，さらに，全ての果物が 1 人だけに与えられる場合を除いて，

$${}_3C_2 \cdot \left(2^6 - 2\right) = 186(通り)$$

よって，どの子供にも少なくとも 1 個は与える与え方は

$$729 - (3 + 186) = \mathbf{540(通り)} \qquad \textbf{(答)}$$

【4】「黒球が 2 回以上出る」の余事象は「黒球が出るのが 1 回または 0 回」であるので，この確率を考える．

(i) 黒球が 1 回出る確率は，

$${}_4C_1 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{12 \cdot 7^3}{10000}$$

(ii) 黒球が 1 回も出ない確率は

$$\left(\frac{7}{10}\right)^4 = \frac{7^4}{10000}$$

(i)，(ii) は排反なので，黒球が出るのが 1 回または 0 回である確率は，

$$\begin{aligned}\frac{12 \cdot 7^3}{10000} + \frac{7^4}{10000} &= \frac{7^3 \cdot (12 + 7)}{10000} \\ &= \frac{343 \cdot 19}{10000} \\ &= \frac{6517}{10000}\end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$1 - \frac{6517}{10000} = \mathbf{\frac{3483}{10000}} \qquad \textbf{(答)}$$

【5】すべての場合の数は，6^3 通りである．

(1) X が 3 で割り切れないときは，3 回のすべての試行で，1，2，4，5 が出る場合であるから

$$4^3 \text{通り}$$

よって，求める確率 p は

$$p = 1 - \frac{4^3}{6^3} = 1 - \frac{8}{27} = \mathbf{\frac{19}{27}} \quad \textbf{(答)}$$

(2) X が 4 で割り切れないのは，以下の (i)，(ii) の場合に分けられる．

(i) 3 回の試行全てで 1，3，5 の目が出る

(ii) 3 回の試行のうち 1 回は 2 または 6 の目が出て，残りの 2 回は 1，3，5 の目が出る

ここで，(i) の起こる確率は

$$\frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$$

であり，(ii) の起こる確率は

$${}_3\mathrm{C}_1 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(i)，(ii) は排反なので，X が 4 で割り切れない確率は

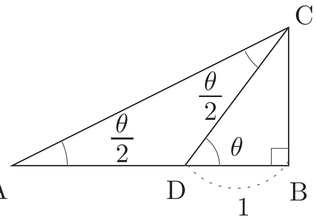
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

したがって，求める確率 q は

$$q = 1 - \frac{3}{8} = \mathbf{\frac{5}{8}} \qquad \textbf{(答)}$$

問題

【1】



(1)　直角三角形 DBC に着目して

$$\mathrm{BC} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\mathrm{DC} = \frac{1}{\cos\theta}$$

また，△ADC は，AD=DC の二等辺三角形だから，
$\mathrm{AD} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ であり

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} + \mathrm{DB} = \frac{1}{\cos\theta} + 1 = \frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}$$

すると，直角三角形 ABC に着目して

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}} = \boldsymbol{\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}} \qquad \text{(答)}$$

(2)　(1) の結果を利用して

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \boldsymbol{2-\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ より,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}\\ &= \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\ &= \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

ここで，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より，$\cos\theta \geqq 0$

よって，$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}}$ **(答)**

また,

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{15}} \quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より,

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \frac{1}{1+\tan^2\theta}\\ &= \frac{1}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\\ &= \frac{16}{25}\end{aligned}$$

よって，$\cos\theta = \pm\dfrac{4}{5}$

ここで，$\tan\theta = -\dfrac{3}{4} < 0$ より，$90^\circ < \theta < 180^\circ$ であるので，$\cos\theta < 0$

よって，$\cos\theta = \boldsymbol{-\dfrac{4}{5}}$ **(答)**

また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より,

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \tan\theta\cos\theta\\ &= -\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{3}{5}} \quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(3) $$\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$$
$$-\cos 125^\circ = \cos 55^\circ = \sin 35^\circ$$

また

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{8}}$$
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{6}{8}}$$
$$\therefore \quad \sin 45^\circ < \sqrt{\frac{5}{8}} < \sin 60^\circ$$

以上のことと

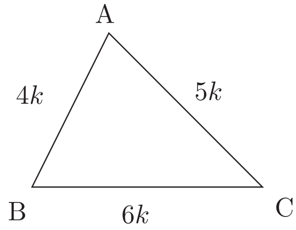
$0^\circ < \theta < 90^\circ$ において $\sin\theta$ が増加関数であること

により

$$\sin 35^\circ < \sin 40^\circ < \sin 45^\circ < \sqrt{\frac{5}{8}} < \sin 60^\circ < \sin 80^\circ$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{-\cos 125^\circ < \sin 140^\circ < \sqrt{\frac{5}{8}} < \sin 80^\circ} \qquad \text{(答)}$$

【3】 $\mathrm{BC} = a,\ \mathrm{CA} = b,\ \mathrm{AB} = c \qquad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$ とおく.

(1) $\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$ に外接円の半径 $R\ (> 0)$ を用いて，正弦定理より



$$\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} = 6 : 5 : 4$$
$$\therefore\quad a : b : c = 6 : 5 : 4$$

よって

$$a = 6k,\ b = 5k,\ c = 4k \quad (k > 0) \quad \cdots\cdots ①$$

とおける．すると余弦定理を用いて

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (4k)^2 - (6k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 4k} = \frac{5k^2}{8 \cdot 5k^2} = \boldsymbol{\frac{1}{8}} \qquad (答)$$

(2) (1) より，$\sin A > 0$ にも注意して

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

である．① を用いて，△ABC の面積に着目すると

$$\frac{1}{2} bc \sin A = 15\sqrt{7} \qquad \therefore\quad \frac{1}{2} \cdot 5k \cdot 4k \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 15\sqrt{7}$$
$$\therefore\quad k^2 = 4 \qquad \therefore\quad k = 2 \quad (\because\quad k > 0)$$

よって，① より，各辺の長さは

$$a = \mathbf{12},\ b = \mathbf{10},\ c = \mathbf{8} \qquad (答)$$

(3) 正弦定理より

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{12}{2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{16}{\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{16\sqrt{7}}{7}} \qquad (答)$$

(4) △ABC の面積は，内接円の半径 r を用いて

$$\frac{r}{2}(a + b + c) = \frac{r}{2}(12 + 10 + 8) = 15r$$

と表すことができて，これが $15\sqrt{7}$ となるのだから

$$15r = 15\sqrt{7} \qquad \therefore\quad r = \boldsymbol{\sqrt{7}} \qquad (答)$$

(5) △ABC について余弦定理を用いて

$$\cos B = \frac{8^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{27}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}$$

角の 2 等分線の定理より

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{BA} : \mathrm{AC} = 8 : 10 = 4 : 5$$

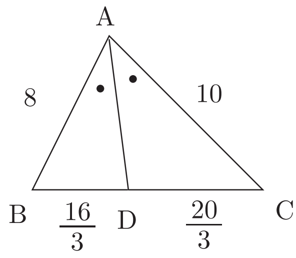
であるから

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} \times \frac{4}{9} = 12 \times \frac{4}{9} = \frac{16}{3}$$

すると，△ABD に余弦定理を用いて

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AD}^2 &= 8^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{16}{3} \cdot \cos B \\
&= 64 + \frac{256}{9} - 2 \cdot 8 \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{16} \\
&= 64 + \frac{256}{9} - 48 \\
&= \frac{400}{9}
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad \mathrm{AD} = \boldsymbol{\dfrac{20}{3}}$ 　　(答)



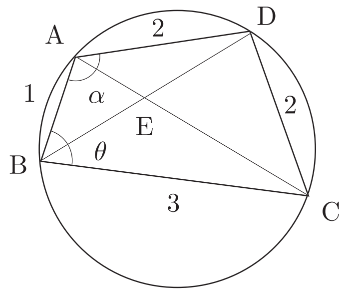
【4】(1)　△ABC と △ADC において，AC を共通底辺とみると

$$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ADC} = \mathrm{BE} : \mathrm{ED} \quad \cdots\cdots ①$$

一方，$\angle\mathrm{ABC} = \theta$ とおくと，$\angle\mathrm{ADC} = 180^\circ - \theta$ であり，$\sin\theta = \sin(180^\circ - \theta)$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{ADC} &= \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cdot \sin\theta\right) : \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin(180^\circ - \theta)\right)\\ &= 3 : 4 \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

①, ② より，$\mathrm{BE} : \mathrm{ED} = \mathbf{3 : 4}$　(答)



(2)　$\angle\mathrm{BAD} = \alpha$ とおくと，$\angle\mathrm{BCD} = 180^\circ - \alpha$ であり，$-\cos\alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$ であることに注意して △ABD, △CBD に余弦定理を用いると

$$\begin{cases}\mathrm{BD}^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos\alpha\\ \mathrm{BD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos(180^\circ - \alpha)\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\mathrm{BD}^2 = 5 - 4\cos\alpha \quad \cdots\cdots ③\\ \mathrm{BD}^2 = 13 + 12\cos\alpha \quad \cdots\cdots ④\end{cases}$$

④ − ③ より

$$16\cos\alpha + 8 = 0 \qquad \therefore\ \cos\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \alpha = 120^\circ$$

よって，$\angle\mathrm{BAD} = \mathbf{120^\circ}$　(答)

(3)　$\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ を ③ へ代入して

$$\mathrm{BD}^2 = 5 + 2 = 7 \qquad \therefore\ \mathrm{BD} = \sqrt{7}$$

すると，(1) の結果より

$$\mathrm{BE} = \sqrt{7}\cdot\frac{3}{7} = \frac{3}{\sqrt{7}}, \qquad \mathrm{ED} = \sqrt{7}\cdot\frac{4}{7} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

であり，方べきの定理より

$$\mathrm{AE}\times\mathrm{EC} = \mathrm{BE}\times\mathrm{ED} = \frac{3}{\sqrt{7}}\times\frac{4}{\sqrt{7}} = \mathbf{\frac{12}{7}} \quad \text{(答)}$$

(4)　(1) と同様に考えると

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EC} = \triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{CBD} = 1\cdot 2 : 3\cdot 2 = 1 : 3$$

とわかり，$\mathrm{AE} = x$, $\mathrm{EC} = 3x$　$(x > 0)$ とおける．これを (3) の結果に用いて

$$x\times 3x = \frac{12}{7} \qquad \therefore\ x^2 = \frac{4}{7} \qquad \therefore\ x = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7} \quad (\because\ x > 0)$$

よって，$\mathrm{AE} = \mathbf{\frac{2}{7}\sqrt{7}}$　(答)

M1T

高１難関大数学

会員番号		氏　名	