春期講習　確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

高１難関大数学Ｋ

【1】(1) ① $3a^2b^3\times 5a^2b^4=3\cdot 5\cdot a^{2+2}b^{3+4}=\boldsymbol{15a^4b^7}$ （答）

②
$$\begin{aligned}x^2yz^3(x-3y+2z)&=x^2yz^3\cdot x+x^2yz^3\cdot(-3y)+x^2yz^3\cdot 2z\\&=x^{2+1}yz^3-3x^2y^{1+1}z^3+2x^2yz^{3+1}\\&=\boldsymbol{x^3yz^3-3x^2y^2z^3+2x^2yz^4}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

(2) ①
$$\begin{aligned}(2a+b-c)^2&=(2a)^2+b^2+(-c)^2+2\cdot(2a)\cdot b+2\cdot b\cdot(-c)+2\cdot(-c)\cdot 2a\\&=\boldsymbol{4a^2+b^2+c^2+4ab-2bc-4ca}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned}(3x-2)^3&=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot(-2)+3\cdot(3x)\cdot(-2)^2+(-2)^3\\&=\boldsymbol{27x^3-54x^2+36x-8}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned}(x-1)^2(x^2+x+1)^2&=\{(x-1)(x^2+x+1)\}^2\\&=(x^3-1)^2\\&=(x^3)^2-2x^3+1\\&=\boldsymbol{x^6-2x^3+1}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)&=(x^2-1)(x^2-4)\\&=(x^2)^2-5x^2+4\\&=\boldsymbol{x^4-5x^2+4}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)&=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)\\&=\{(x^2)^2-1\}(x^4+1)\\&=(x^4-1)(x^4+1)\\&=(x^4)^2-1\\&=\boldsymbol{x^8-1}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

(3) ① $6x^2+x-2=\boldsymbol{(3x+2)(2x-1)}$ （答）

$$\begin{array}{cccccc}3 & \times & 2 & \longrightarrow & 4\\ 2 & & -1 & \longrightarrow & -3\\ \hline 6 & & -2 & & 1\end{array}$$

②
$$\begin{aligned}(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3&=\{(x^2-2x)-3\}\{(x^2-2x)+1\}\\&=(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)\\&=\boldsymbol{(x-3)(x+1)(x-1)^2}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned}8a^3+64&=8(a^3+8)\\&=\boldsymbol{8(a+2)(a^2-2a+4)}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned}a^4-5a^2-36&=(a^2)^2-5a^2-36\\&=(a^2-9)(a^2+4)\\&=\boldsymbol{(a-3)(a+3)(a^2+4)}\quad\text{（答）}\end{aligned}$$

⑤ $3x^2+5xy-2y^2-x+5y-2=3x^2+(5y-1)x-(2y^2-5y+2)$

$$\begin{array}{cccccc}2 & \times & -1 & \longrightarrow & -1\\ 1 & & -2 & \longrightarrow & -4\\ \hline 2 & & 2 & & -5\end{array}$$

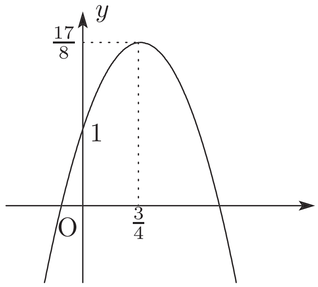
$=3x^2+(5y-1)x-(2y-1)(y-2)$

$$\begin{array}{cccccc}3 & \times & -(y-2) & \longrightarrow & -y+2\\ 1 & & 2y-1 & \longrightarrow & 6y-3\\ \hline & & & & 5y-1\end{array}$$

$=\boldsymbol{(3x-y+2)(x+2y-1)}$ （答）

【2】(1)

$$
\begin{aligned}
y &= -2x^2+3x+1\\
&= -2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+1\\
&= -2\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+1\\
&= -2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}+1\\
&= -2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}
\end{aligned}
$$



より，

頂点の座標は，$\boldsymbol{\left(\frac{3}{4},\ \frac{17}{8}\right)}$　（答）

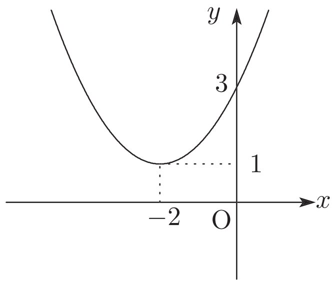
軸の方程式は，$\boldsymbol{x=\frac{3}{4}}$　（答）

である．

さらに，このグラフは，$y=-2x^2$ を，x 軸の正の方向に $\frac{3}{4}$，y 軸の正の方向に $\frac{17}{8}$ だけ平行移動したものであり，また，x^2 の係数が -2 であるから，グラフは上に凸の放物線である．したがって，グラフは右上図のようになる．　（答）

(2)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x^2+2x+3\\
&= \frac{1}{2}(x^2+4x)+3\\
&= \frac{1}{2}\left\{(x+2)^2-4\right\}+3\\
&= \frac{1}{2}(x+2)^2-2+3\\
&= \frac{1}{2}(x+2)^2+1
\end{aligned}
$$



より，

頂点の座標は，$\boldsymbol{(-2,\ 1)}$　（答）

軸の方程式は，$\boldsymbol{x=-2}$　（答）

である．

さらに，このグラフは，$y=\frac{1}{2}x^2$ を，x 軸の正の方向に -2，y 軸の正の方向に 1 だけ平行移動したものであり，また，x^2 の係数が $\frac{1}{2}$ だから，下に凸の放物線である．したがって，グラフは右上図のようになる．　（答）

【3】(1) 頂点が $(1,\ -2)$ だから，求める 2 次関数は

$$y = a(x-1)^2 - 2 \quad (a \neq 0)$$

とおける．これが $(-1,\ 10)$ を通るので，

$$\begin{aligned}
10 &= a(-1-1)^2 - 2\\
10 &= a \cdot (-2)^2 - 2\\
10 &= 4a - 2\\
12 &= 4a\\
a &= 3
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
y &= 3(x-1)^2 - 2\\
&= 3(x^2 - 2x + 1) - 2\\
&= 3x^2 - 6x + 3 - 2
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = 3x^2 - 6x + 1} \quad \text{（答）}$$

(2) x 軸と $(-3,\ 0)$ で接するから頂点は $(-3,\ 0)$ である．よって，求める 2 次関数は

$$y = a(x+3)^2 \quad (a \neq 0)$$

とおける．これが $(-1,\ -4)$ を通るので

$$\begin{aligned}
-4 &= a(-1+3)^2\\
-4 &= a \cdot 2^2\\
-4 &= 4a\\
a &= -1
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
y &= -(x+3)^2\\
&= -(x^2 + 6x + 9)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = -x^2 - 6x - 9} \quad \text{（答）}$$

(3) 求める 2 次関数を，$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ とおく．
この 2 次関数は，3 点 (0, 5)，(1, 3)，(3, 11) を通るから，

$$\begin{cases} c = 5 & \cdots ① \\ a + b + c = 3 & \cdots ② \\ 9a + 3b + c = 11 & \cdots ③ \end{cases}$$

① を，②，③ に代入して，

$$\begin{cases} a + b = -2 & \cdots ④ \\ 9a + 3b = 6 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤ ÷ 3 より，$3a + b = 2 \quad \cdots ⑤'$
④，⑤′ より，

$$\begin{array}{rrcrcr} & a & + & b & = & -2 \\ -) & 3a & + & b & = & 2 \\ \hline & -2a & & & = & -4 \end{array} \qquad \therefore\ a = 2$$

これを ④ に代入して，

$$2 + b = -2 \qquad \therefore\ b = -4$$

よって，$a = 2$，$b = -4$，$c = 5$ なので，

$\boldsymbol{y = 2x^2 - 4x + 5}$ （答）

(4) $x = 2$ のとき，最大値 7 をとることから，$a < 0$ となり，頂点は (2, 7) である．
求める 2 次関数は，

$$y = a(x-2)^2 + 7 \qquad (a < 0)$$

とおける．これが，点 (4, −1) を通るので，

$$\begin{aligned} -1 &= a(4-2)^2 + 7 \\ -1 &= 4a + 7 \\ 4a &= -8 \\ \therefore\ a &= -2\ (< 0) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} y &= -2(x-2)^2 + 7 \\ &= -2(x^2 - 4x + 4) + 7 \end{aligned}$$

$\therefore\ \boldsymbol{y = -2x^2 + 8x - 1}$ （答）

【4】

$$y = ax^2 + 2ax + a + 6 \quad \cdots ⓐ, \qquad y = x^2 + bx + 2b - 6 \quad \cdots ⓑ$$

(1)
$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 2ax + a + 6 \\ &= a(x^2 + 2x) + a + 6 \\ &= a\{(x+1)^2 - 1\} + a + 6 \\ &= a(x+1)^2 - a + a + 6 \\ &= a(x+1)^2 + 6 \end{aligned}$$

よって，求める頂点の座標は，　**$(-1,\ 6)$**　（答）

(2)
$$\begin{aligned} y &= x^2 + bx + 2b - 6 \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + 2b - 6 \end{aligned}$$

ⓑ のグラフを x 軸方向へ 1，y 軸方向へ p 平行移動したグラフの方程式は，

$$y = \left(x + \frac{b}{2} - 1\right)^2 - \frac{b^2}{4} + 2b - 6 + p$$

であり，頂点の座標は，

$$\left(-\frac{b}{2} + 1,\ -\frac{b^2}{4} + 2b - 6 + p\right)$$

このグラフが ⓐ と重なるための条件は，それぞれの放物線の方程式の 2 次の係数が等しく，頂点の座標が一致することであるから

$$\begin{cases} a = 1 & \cdots ① \\ -\dfrac{b}{2} + 1 = -1 & \cdots ② \\ -\dfrac{b^2}{4} + 2b - 6 + p = 6 & \cdots ③ \end{cases}$$

② より，$-\dfrac{b}{2} = -2 \quad \therefore\ b = 4$

これを ③ に代入して，

$$\begin{aligned} -\frac{4^2}{4} + 2 \cdot 4 - 6 + p &= 6 \\ -2 + p &= 6 \\ \therefore\ p &= 8 \end{aligned}$$

以上より，

$a = 1,\ b = 4,\ p = 8$　（答）

【5】頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，$(t,\ 2t-3)$ とおける．
また，グラフは $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものであるから，その x^2 の係数は 2 である．
よって，求める 2 次関数は，次のように表される．

$$y=2(x-t)^2+2t-3$$

このグラフが点 $(1,\ 3)$ を通るから，

$$\begin{aligned} 3&=2(1-t)^2+2t-3 \\ 2t^2-2t-4&=0 \\ t^2-t-2&=0 \\ (t+1)(t-2)&=0 \\ \therefore\ t&=-1,\ 2 \end{aligned}$$

これを $2t-3$ にそれぞれ代入すると，

$t=-1$ のとき，$2t-3=2\cdot(-1)-3=-5\ (<0)$
$t=2$ のとき，$2t-3=2\cdot 2-3=1\ (>0)$

となる．頂点の y 座標は負であるから，$t=-1$ のときが条件に適する．
よって，

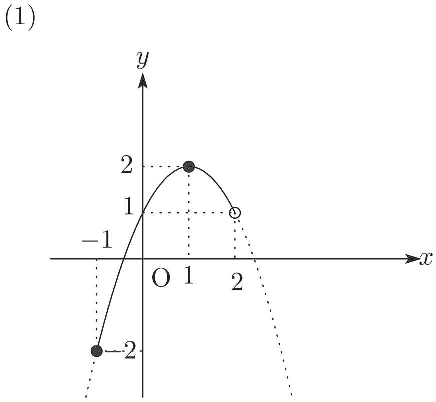
$$\begin{aligned} y&=2\{x-(-1)\}^2+2\cdot(-1)-3 \\ &=2(x+1)^2-5 \end{aligned}$$

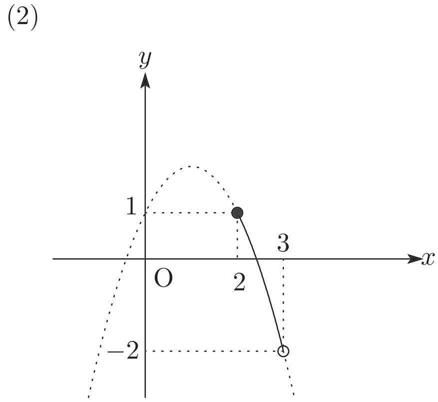
$\therefore\ \boldsymbol{y=2x^2+4x-3}$　（答）

【6】

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2x + 1 \\ &= -(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

より，(1)，(2) のグラフをかくと，次の図のようになる．





したがって，求める最大値，最小値は，次のようになる．

(1) $-1 \leqq x < 2$ のとき

最大値： **2**　　**($x = 1$ のとき)**　(答)
最小値：　**− 2**　**($x = -1$ のとき)**　(答)

(2) $2 \leqq x < 3$ のとき

最大値： **1**　　**($x = 2$ のとき)**　(答)
最小値： なし　(答)