M1TK

春期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高１難関大数学Ｋ

問題

【1】(1) $(-3x)^3 = (-3)^3 \times x^3 = \mathbf{-27x^3}$　(答)

(2) $(-2xy^2)^3 \times (-3x^2y)^2 = -8x^3y^6 \times 9x^4y^2 = \mathbf{-72x^7y^8}$　(答)

(3) $-4xy^2(x^2 + 2xy - y^2) = \mathbf{-4x^3y^2 - 8x^2y^3 + 4xy^4}$　(答)

(4)
$$\begin{aligned}(a^2 + 3ab + b^2)(2a - b) &= 2a^3 - a^2b + 6a^2b - 3ab^2 + 2ab^2 - b^3\\ &= \mathbf{2a^3 + 5a^2b - ab^2 - b^3}\end{aligned}$$
(答)

【2】(1) $(x + 3y)^2 = \mathbf{x^2 + 6xy + 9y^2}$　(答)

(2) $(4x - 3y)^2 = \mathbf{16x^2 - 24xy + 9y^2}$　(答)

(3) $(7x + 5y)(7x - 5y) = \mathbf{49x^2 - 25y^2}$　(答)

(4) $(-2 + xy)(2 + xy) = (xy - 2)(xy + 2) = \mathbf{x^2y^2 - 4}$　(答)

(5) $(x - 1)(x - 6) = \mathbf{x^2 - 7x + 6}$　(答)

(6) $(x + 3y)(x - y) = \mathbf{x^2 + 2xy - 3y^2}$　(答)

(7) $(x + y)(2x + 5y) = \mathbf{2x^2 + 7xy + 5y^2}$　(答)

(8) $(5x - 4y)(3x + 2y) = \mathbf{15x^2 - 2xy - 8y^2}$　(答)

(9) $(3x - 4y)(5x - 2y) = \mathbf{15x^2 - 26xy + 8y^2}$　(答)

(10) $(6x + y)(2x - 3y) = \mathbf{12x^2 - 16xy - 3y^2}$　(答)

【3】(1) $-3x(x - 2y - 1) = \mathbf{-3x^2 + 6xy + 3x}$　(答)

(2) $(x - 2)(x - 3) = \mathbf{x^2 - 5x + 6}$　(答)

(3) $\left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2}$　(答)

(4) $(ab - cd)^2 = \mathbf{a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2}$　(答)

(5) $(4x - yz)(4x + yz) = \mathbf{16x^2 - y^2z^2}$　(答)

(6) $\left(x - \frac{1}{2}y\right)\left(x + \frac{1}{3}y\right) = \mathbf{x^2 - \frac{1}{6}xy - \frac{1}{6}y^2}$　(答)

【4】(1) $(a+b)^3 = \boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ (答)

(2) $(a-b)^3 = \boldsymbol{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$ (答)

(3)
$$(x-3)^3 = x^3 - 3\times x^2 \times 3 + 3\times x \times 3^2 - 3^3$$
$$= \boldsymbol{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} \quad (答)$$

(4)
$$(3x+2y)^3 = (3x)^3 + 3\times(3x)^2\times 2y + 3\times 3x\times(2y)^2 + (2y)^3$$
$$= \boldsymbol{27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3} \quad (答)$$

(5)
$$\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)^3 = \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\times\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(\frac{x}{y}\right) + 3\times\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right)^3$$
$$= \boldsymbol{\frac{y^3}{x^3} - \frac{3y}{x} + \frac{3x}{y} - \frac{x^3}{y^3}} \quad (答)$$

【5】(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = \boldsymbol{a^3 + b^3}$ (答)

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = \boldsymbol{a^3 - b^3}$ (答)

(3) $(x+1)(x^2-x+1) = \boldsymbol{x^3 + 1}$ (答)

(4) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2) = \boldsymbol{x^3 - 27y^3}$ (答)

(5) $(xy+z)(x^2y^2-xyz+z^2) = \boldsymbol{x^3y^3 + z^3}$ (答)

【6】(1)

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (X+c)^2\\ &= X^2+2cX+c^2\\ &= (a+b)^2+2c(a+b)+c^2\\ &= a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2\\ &= \boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(a-b+c)^2 &= a^2+(-b)^2+c^2+2a(-b)+2(-b)c+2ca\\ &= \boldsymbol{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&(a+b+1)^2+(-a+b+1)^2+(a-b+1)^2+(a+b-1)^2\\ &= a^2+b^2+1+2ab+2b+2a+(a^2+b^2+1-2ab+2b-2a)\\ &\quad +(a^2+b^2+1-2ab-2b+2a)\\ &\quad\quad +(a^2+b^2+1+2ab-2b-2a)\\ &= \boldsymbol{4a^2+4b^2+4} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

＜別解＞

$a+b+1=X$ とおくと

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= X^2+(X-2a)^2+(X-2b)^2+(X-2)^2\\ &= X^2+X^2-4aX+4a^2+X^2-4bX+4b^2+X^2-4X+4\\ &= 4X^2-4(a+b+1)X+4a^2+4b^2+4\\ &= 4X^2-4X^2+4a^2+4b^2+4\\ &= \boldsymbol{4a^2+4b^2+4} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

【7】(1)

$$\begin{aligned}(a+2b-3c)^2 &= a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a(2b)+2(2b)(-3c)+2(-3c)a\\ &= \boldsymbol{a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ca} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(a+3b-2c)(a+3b+2c) &= (a+3b)^2-(2c)^2\\ &= \boldsymbol{a^2+6ab+9b^2-4c^2} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(3a+b-2c)(3a-b+2c) &= \{3a+(b-2c)\}\{3a-(b-2c)\}\\ &= (3a)^2-(b-2c)^2\\ &= 9a^2-(b^2-4bc+4c^2)\\ &= \boldsymbol{9a^2-b^2+4bc-4c^2} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

【8】(1)

$$\begin{aligned}(x-y+z)(x+y-z) &= \{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}\\ &= x^2-(y-z)^2\\ &= x^2-(y^2-2yz+z^2)\\ &= \boldsymbol{x^2-y^2+2yz-z^2} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(x^2-2x+2)(x^2+2x+2) &= (X-2x)(X+2x) \\
&= X^2-4x^2 \\
&= (x^2+2)^2-4x^2 \\
&= x^4+4x^2+4-4x^2 \\
&= \boldsymbol{x^4+4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) \\
&= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) \\
&= (X+4)(X+6) \\
&= X^2+10X+24 \\
&= (x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24 \\
&= x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24 \\
&= \boldsymbol{x^4+10x^3+35x^2+50x+24} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
(x+1)(x+2)(x-3)(x-4) &= (x+1)(x-3)(x+2)(x-4) \\
&= (x^2-2x-3)(x^2-2x-8) \\
&= (X-3)(X-8) \\
&= X^2-11X+24 \\
&= (x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24 \\
&= x^4-4x^3+4x^2-11x^2+22x+24 \\
&= \boldsymbol{x^4-4x^3-7x^2+22x+24} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
(x-9)(x+6)(x-6)(x+4) &= (x-9)(x+4)(x+6)(x-6) \\
&= (x^2-5x-36)(x^2-36) \\
&= (X-5x)\times X \\
&= X^2-5xX \\
&= (x^2-36)^2-5x(x^2-36) \\
&= x^4-72x^2+1296-5x^3+180x \\
&= \boldsymbol{x^4-5x^3-72x^2+180x+1296} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【9】(1)

$$(x+y)^3-(x-y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$$
$$= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3$$
$$= \mathbf{6x^2y+2y^3} \quad (答)$$

(2)

$$(x-y)^3+(x+y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$$
$$= x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$= \mathbf{2x^3+6xy^2} \quad (答)$$

【10】(1)

$$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$
$$= \{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$$
$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$= (x^3)^2-(y^3)^2$$
$$= \mathbf{x^6-y^6} \quad (答)$$

(2)

$$(pq-r)^2(p^2q^2+pqr+r^2)^2$$
$$= \{(pq-r)(p^2q^2+pqr+r^2)\}^2$$
$$= (p^3q^3-r^3)^2$$
$$= \mathbf{p^6q^6-2p^3q^3r^3+r^6} \quad (答)$$

(3)

$$(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$$
$$= x^3+(-y)^3+z^3-3x(-y)z$$
$$= \mathbf{x^3-y^3+z^3+3xyz} \quad (答)$$

(4)

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$$
$$= (x^3-y^3)(x^6+x^3y^3+y^6)$$
$$= (X-Y)(X^2+XY+Y^2)$$
$$= X^3-Y^3$$
$$= (x^3)^3-(y^3)^3$$
$$= \mathbf{x^9-y^9} \quad (答)$$

【11】(1)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
&= a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-ca^2 \\
&\qquad +a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc \\
&\qquad\quad +a^2c+b^2c+c^3-abc-bc^2-c^2a \\
&= \boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy-yz+zx) \\
&= x^3+(-y)^3+(-z)^3-3x(-y)(-z) \\
&= \boldsymbol{x^3-y^3-z^3-3xyz} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\left(p+q+\frac{1}{3}\right)\left(p^2+q^2+\frac{1}{9}-pq-\frac{1}{3}q-\frac{1}{3}p\right) \\
&= p^3+q^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3-3pq\times\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \boldsymbol{p^3+q^3+\frac{1}{27}-pq} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

問題

【1】(1) $-21x^2y^2z + 7x^2yz^2 - 14xy^2z^2 = \mathbf{-7xyz(3xy - xz + 2yz)}$　(答)

(2) $2x(a + 2b) + 6y(a + 2b) = (a + 2b)(2x + 6y) = \mathbf{2(a + 2b)(x + 3y)}$　(答)

(3) $x^2 - 4xy + 4y^2 = \mathbf{(x - 2y)^2}$　(答)

(4) $100x^2 + 180xy + 81y^2 = \mathbf{(10x + 9y)^2}$　(答)

(5) $x^2y^2 - a^2b^2c^2 = \mathbf{(xy + abc)(xy - abc)}$　(答)

(6) $16x^2 - 49 = \mathbf{(4x + 7)(4x - 7)}$　(答)

(7)
$$\begin{aligned} x^2 + 5xy - 6y^2 &= x^2 + (-y + 6y)x + (-y) \times 6y \\ &= \mathbf{(x - y)(x + 6y)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned} x^2 - 14xy + 24y^2 &= x^2 + (-2y - 12y)x + (-2y) \times (-12y) \\ &= \mathbf{(x - 2y)(x - 12y)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

【2】(1) $4x^2 + 17x + 4 = \mathbf{(4x + 1)(x + 4)}$　(答)

(2) $4x^2 - 15x - 4 = \mathbf{(4x + 1)(x - 4)}$　(答)

(3) $4x^2 + 15x - 4 = \mathbf{(4x - 1)(x + 4)}$　(答)

(4) $4x^2 - 17x + 4 = \mathbf{(4x - 1)(x - 4)}$　(答)

(5) $4x^2 - 16x + 15 = \mathbf{(2x - 5)(2x - 3)}$　(答)

(6) $4x^2 + 4x - 15 = \mathbf{(2x + 5)(2x - 3)}$　(答)

(7) $6x^2 - 7xy - 20y^2 = \mathbf{(3x + 4y)(2x - 5y)}$　(答)

(8) $20x^2 + 7xy - 6y^2 = \mathbf{(4x + 3y)(5x - 2y)}$　(答)

(9) $8x^2 + 7xy - 18y^2 = \mathbf{(8x - 9y)(x + 2y)}$　(答)

(10) $abx^2 + (a + b)x + 1 = \mathbf{(ax + 1)(bx + 1)}$　(答)

【3】(1)
$$12x^2-75y^2=3(4x^2-25y^2)$$
$$=\mathbf{3(2x+5y)(2x-5y)}\quad \text{(答)}$$

(2)
$$6x^3-30x^2+36x=6x(x^2-5x+6)$$
$$=\mathbf{6x(x-2)(x-3)}\quad \text{(答)}$$

(3)
$$(3x-2)^2-(2x-3)^2=\{(3x-2)+(2x-3)\}\{(3x-2)-(2x-3)\}$$
$$=(5x-5)(x+1)$$
$$=\mathbf{5(x-1)(x+1)}\quad \text{(答)}$$

(4)
$$(x+y)^2-8(x+y)+15=A^2-8A+15$$
$$=(A-3)(A-5)$$
$$=\mathbf{(x+y-3)(x+y-5)}\quad \text{(答)}$$

(5)
$$x^4-17x^2+16=A^2-17A+16$$
$$=(A-1)(A-16)$$
$$=(x^2-1)(x^2-16)$$
$$=\mathbf{(x+1)(x-1)(x+4)(x-4)}\quad \text{(答)}$$

(6)
$$x^2+4xy+4y^2-2(x+2y)+1=(x+2y)^2-2(x+2y)+1$$
$$=A^2-2A+1$$
$$=(A-1)^2$$
$$=\mathbf{(x+2y-1)^2}\quad \text{(答)}$$

【4】(1)
$$xy+2x+3y+6=x(y+2)+3(y+2)$$
$$=\mathbf{(x+3)(y+2)}\quad \text{(答)}$$

(2)
$$pq+p-q-1=p(q+1)-(q+1)$$
$$=\mathbf{(p-1)(q+1)}\quad \text{(答)}$$

(3)
$$x^2-9y^2-6y-1=x^2-(9y^2+6y+1)$$
$$=x^2-(3y+1)^2$$
$$=x^2-A^2$$
$$=(x-A)(x+A)$$
$$=\{x-(3y+1)\}\{x+(3y+1)\}$$
$$=\mathbf{(x-3y-1)(x+3y+1)}\quad \text{(答)}$$

(4)
$$\begin{aligned} x^2-y^2-z^2-2yz &= x^2-(y^2+z^2+2yz) \\ &= x^2-(y+z)^2 \\ &= x^2-A^2 \\ &= (x+A)(x-A) \\ &= \{x+(y+z)\}\{x-(y+z)\} \\ &= \boldsymbol{(x+y+z)(x-y-z)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2 &= a^2(x^2-y^2)-b^2(x^2-y^2) \\ &= (x^2-y^2)(a^2-b^2) \\ &= \boldsymbol{(x+y)(x-y)(a+b)(a-b)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} (x^2+3x+2)+2xy+4y &= (x+1)(x+2)+2y(x+2) \\ &= (x+1)A+2yA \\ &= A\{(x+1)+2y\} \\ &= \boldsymbol{(x+2)(x+2y+1)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

【5】(1)
$$\begin{aligned} 27x^3+1 &= (3x)^3+1^3 \\ &= (3x+1)\{(3x)^2-3x\times 1+1^2\} \\ &= \boldsymbol{(3x+1)(9x^2-3x+1)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 8x^3-125y^3 &= (2x)^3-(5y)^3 \\ &= (2x-5y)\{(2x)^2+2x\times 5y+(5y)^2\} \\ &= \boldsymbol{(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x^3y^3+z^3 &= (xy)^3+(z)^3 \\ &= (xy+z)\{(xy)^2-xy\times z+z^2\} \\ &= \boldsymbol{(xy+z)(x^2y^2-xyz+z^2)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} (x-y)^3-z^3 &= A^3-z^3 \\ &= (A-z)(A^2+Az+z^2) \\ &= (x-y-z)\{(x-y)^2+(x-y)z+z^2\} \\ &= \boldsymbol{(x-y-z)(x^2-2xy+y^2+xz-yz+z^2)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3 &= x^3+3\times x^2\times 2y+3\times x\times(2y)^2+(2y)^3 \\ &= \boldsymbol{(x+2y)^3} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} 27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3 &= (3x)^3-3\times(3x)^2\times(4y)+3\times 3x\times(4y)^2-(4y)^3 \\ &= \boldsymbol{(3x-4y)^3} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

【6】(1)

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$
$$= (x+y)\{(x+y)^2 - 3xy\}$$
$$= (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

よって

$\boxed{\text{ア}}$ **$= x + y$,** $\boxed{\text{イ}}$ **$= x^2 - xy + y^2$** (答)

(2)

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$
$$= (x-y)\{(x-y)^2 + 3xy\}$$
$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

よって

$\boxed{\text{ウ}}$ **$= x - y$,** $\boxed{\text{エ}}$ **$= x^2 + xy + y^2$** (答)

(3)

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$
$$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz$$
$$= \{(x+y)+z\}^3 - 3z(x+y)\{(x+y)+z\} - 3xy\{(x+y)+z\}$$
$$= (x+y+z)\{(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)\}$$
$$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

よって

$\boxed{\text{オ}}$ **$= x + y$,** $\boxed{\text{カ}}$ **$= x + y + z$,** $\boxed{\text{キ}}$ **$= xy + yz + zx$,**
$\boxed{\text{ク}}$ **$= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$** (答)

【7】(1)

$(x+y)^2-3(x+y)(x-y)+2(x-y)^2$

$=A^2-3AB+2B^2$ [$x+y=A,\ x-y=B$ とおく.]

$=(A-B)(A-2B)$

$=\{(x+y)-(x-y)\}\{(x+y)-2(x-y)\}$

$=2y(x+y-2x+2y)$

$=\mathbf{-2y(x-3y)}$ (答)

(2)

$(x^2+2x-1)(x^2+2x-5)+3$

$=(A-1)(A-5)+3$ [$x^2+2x=A$ とおく.]

$=A^2-6A+5+3$

$=A^2-6A+8$

$=(A-2)(A-4)$

$=\mathbf{(x^2+2x-2)(x^2+2x-4)}$ (答)

(3)

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-15$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-15$

$=(A+4)(A+6)-15$ [$x^2+5x=A$ とおく.]

$=A^2+10A+24-15$

$=A^2+10A+9$

$=(A+1)(A+9)$

$=\mathbf{(x^2+5x+1)(x^2+5x+9)}$ (答)

(4)

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)+x^2$

$=(x-1)(x-6)(x-2)(x-3)+x^2$

$=(x^2-7x+6)(x^2-5x+6)+x^2$

$=(A-7x)(A-5x)+x^2$ [$x^2+6=A$ とおく.]

$=A^2-12xA+35x^2+x^2$

$=A^2-12xA+36x^2$

$=(A-6x)^2$

$=\mathbf{(x^2-6x+6)^2}$ (答)

(5)
$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-9\\
&=(x-1)(x-7)(x-3)(x-5)-9\\
&=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-9\\
&=(A+7)(A+15)-9 \qquad [x^2-8x=A \text{ とおく.}]\\
&=A^2+22A+105-9\\
&=A^2+22A+96\\
&=(A+16)(A+6)\\
&=(x^2-8x+16)(x^2-8x+6)\\
&=\boldsymbol{(x-4)^2(x^2-8x+6)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(6)
$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x-5)(x^2-4x+6)+18\\
&=(x^2-4x-5)(x^2-4x+6)+18\\
&=(A-5)(A+6)+18 \qquad [x^2-4x=A \text{ とおく.}]\\
&=A^2+A-30+18\\
&=A^2+A-12\\
&=(A+4)(A-3)\\
&=(x^2-4x+4)(x^2-4x-3)\\
&=\boldsymbol{(x-2)^2(x^2-4x-3)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【8】(1) $x^2+(2y+3)x+2(2y+1)=\boldsymbol{(x+2)(x+2y+1)}$ (答)

(2) $x^2+(2y-1)x-2(2y+1)=\boldsymbol{(x-2)(x+2y+1)}$ (答)

(3) $x^2+x-(y^2-5y+6)=\boldsymbol{(x+y-2)(x-y+3)}$ (答)

(4) $2x^2+(-5y+1)x+(2y^2-5y-3)=\boldsymbol{(2x-y+3)(x-2y-1)}$ (答)

(5) $x^2+5xy+7x+6y^2+18y+12=\boldsymbol{(x+2y+4)(x+3y+3)}$ (答)

(6) $2x^2-3xy+3x-9y^2+9y-2=\boldsymbol{(2x+3y-1)(x-3y+2)}$ (答)

【9】(1)

$$x^6-7x^3-8$$
$$=(x^3)^2-7x^3-8$$
$$=A^2-7A-8 \qquad [x^3=A\text{ とおく.}]$$
$$=(A-8)(A+1)$$
$$=(x^3-8)(x^3+1)$$
$$=\boldsymbol{(x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$64x^6-729y^6$$
$$=(8x^3)^2-(27y^3)^2$$
$$=(8x^3+27y^3)(8x^3-27y^3)$$
$$=\boldsymbol{(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

$$64x^6-729y^6$$
$$=(4x^2)^3-(9y^2)^3$$
$$=(4x^2-9y^2)\{(4x^2)^2+(4x^2)\times(9y^2)+(9y^2)^2\}$$
$$=(4x^2-9y^2)(16x^4+36x^2y^2+81y^4)$$
$$=(4x^2-9y^2)(16x^4+72x^2y^2+81y^4-36x^2y^2)$$
$$=(4x^2-9y^2)\{(4x^2+9y^2)^2-(6xy)^2\}$$
$$=\boldsymbol{(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$(x-2y)^3-(x+2y)^3$$
$$=A^3-B^3 \qquad [A=x-2y,\ B=x+2y\text{ とおく.}]$$
$$=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$
$$=\{(x-2y)-(x+2y)\}\{(x-2y)^2+(x+2y)(x-2y)+(x+2y)^2\}$$
$$=-4y(x^2-4xy+4y^2+x^2-4y^2+x^2+4xy+4y^2)$$
$$=\boldsymbol{-4y(3x^2+4y^2)} \qquad \text{(答)}$$

(4)

$$\frac{1}{8}x^3+8y^3+\frac{1}{27}z^3-xyz$$
$$=\left(\frac{1}{2}x\right)^3+(2y)^3+\left(\frac{1}{3}z\right)^3-3\left(\frac{1}{2}x\right)(2y)\left(\frac{1}{3}z\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}x+2y+\frac{1}{3}z\right)$$
$$\times\left\{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+(2y)^2+\left(\frac{1}{3}z\right)^2-\frac{1}{2}x\times 2y-2y\times\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}z\times\frac{1}{2}x\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}x+2y+\frac{1}{3}z\right)\left(\frac{1}{4}x^2+4y^2+\frac{1}{9}z^2-xy-\frac{2}{3}yz-\frac{1}{6}zx\right)$$
$$=\frac{1}{6}(3x+12y+2z)\frac{1}{36}(9x^2+144y^2+4z^2-36xy-24yz-6zx)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{216}(3x+12y+2z)(9x^2+144y^2+4z^2-36xy-24yz-6zx)} \qquad \text{(答)}$$

(5) $x^4 + 3x^2 + 4$

$= (x^2)^2 + 4x^2 + 4 - x^2$

$= (x^2 + 2)^2 - x^2$

$= (x^2 + 2 + x)(x^2 + 2 - x)$

$= \boldsymbol{(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)}$ (答)

【10】(1) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

$= ab^2 - ac^2 + bc^2 - a^2b + a^2c - b^2c$

$= ab(b - a) + c^2(b - a) - c(b^2 - a^2)$

$= ab(b - a) + c^2(b - a) - c(b - a)(b + a)$

$= (b - a)(ab + c^2 - bc - ac)$

$= (b - a)\{a(b - c) - c(b - c)\}$

$= \boldsymbol{(b - a)(a - c)(b - c)}$ (答)

(2) $(b + c)a^2 + (c + a)b^2 + (a + b)c^2 + 2abc$

$= a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2 + abc + abc$

$= ab(a + b) + ac(a + b) + abc + ac^2 + b^2c + bc^2$

$= ab(a + b) + ac(a + b) + c^2(a + b) + bc(a + b)$

$= (a + b)(ab + ac + c^2 + bc)$

$= (a + b)\{a(b + c) + c(b + c)\}$

$= \boldsymbol{(a + b)(b + c)(c + a)}$ (答)

(3) (与式) $= (x + 1)^4 + (x - 1)^4 + 2(x^2 - 1)^2$

$a = x + 1$, $b = x - 1$ とすると

$= a^4 + b^4 + 2(ab)^2$

$= a^4 + b^4 + 2a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2$

ここで，$a = x + 1$, $b = x - 1$ を代入して

$= \{(x + 1)^2 + (x - 1)^2\}^2$

$= (2x^2 + 2)^2$

$= \boldsymbol{4(x^2 + 1)^2}$ (答)

問題

【1】(1) $f(-4) = -4 + 12 = \mathbf{8}$　　(答)

(2)
$f(q) = \boldsymbol{aq^2}$　　(答)

$f(p) = \boldsymbol{ap^2}$　　(答)

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = \frac{a(q + p)(q - p)}{q - p} = \boldsymbol{a(p + q)} \quad \text{(答)}$$

【2】(1) $y = a(x + 2)$ のグラフは，直線 $y = ax$ のグラフを x 軸方向に -2 平行移動したものである．したがって，求める定点 A は，

A(−2, 0)　　(答)

(2) $y - 3 = a(x - 3)$ は $y = a(x - 3) + 3$ と変形できる．この直線は a の値にかかわらず，$x = 3$ のとき $y = 3$ を通るので，

A(3, 3)　　(答)

(3) 傾きが 3 で，点 (7, 4) を通る直線だから，

$$y = 3(x - 7) + 4 = 3x - 17$$

$\therefore\ \boldsymbol{y = 3x - 17}$　　(答)

(4) $\boldsymbol{y = 3x^2 - 2}$　　(答)

(5)
$$\begin{aligned} y &= -2\{x - (-1)\}^2 \\ &= -2(x^2 + 2x + 1) \\ &= -2x^2 - 4x - 2 \end{aligned}$$

$\therefore\ \boldsymbol{y = -2x^2 - 4x - 2}$　　(答)

(6)
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

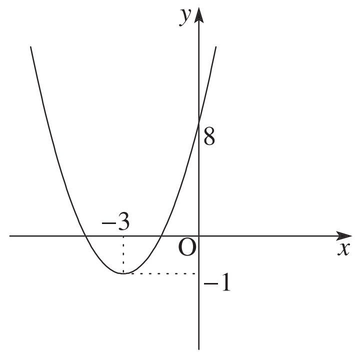
$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}}$　　(答)

(7)
$$\begin{aligned} y &= \{x - (-3)\}^2 + 6\{x - (-3)\} + 7 + 3 \\ &= (x + 3)^2 + 6(x + 3) + 7 + 3 \\ &= x^2 + 6x + 9 + 6x + 18 + 7 + 3 \\ &= x^2 + 12x + 37 \end{aligned}$$

$\therefore\ \boldsymbol{y = x^2 + 12x + 37}$　　(答)

【3】(1)

$$y = x^2 + 6x + 8$$
$$= (x^2 + 6x) + 8$$
$$= x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 8$$
$$= (x + 3)^2 - 9 + 8$$
$$\therefore\ y = (x + 3)^2 - 1$$



よって,

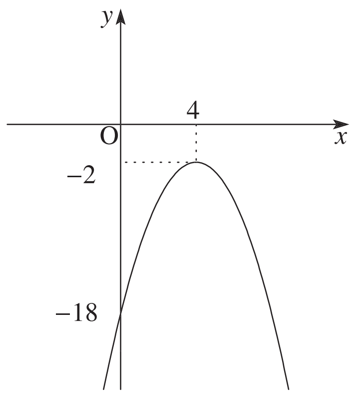
軸の方程式は, $\boldsymbol{x = -3}$,

頂点は, **(−3, −1)**　(答)

※ $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に -3, y 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ.

(2)

$$y = -x^2 + 8x - 18$$
$$= -(x^2 - 8x) - 18$$
$$= -(x^2 - 8x + 4^2 - 4^2) - 18$$
$$= -(x - 4)^2 + 16 - 18$$
$$\therefore\ y = -(x - 4)^2 - 2$$



よって,

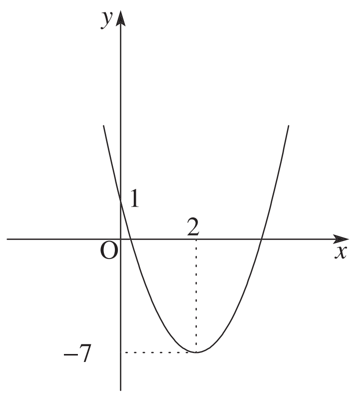
軸の方程式は, $\boldsymbol{x = 4}$,

頂点は, **(4, −2)**　(答)

※ $y = -x^2$ のグラフを x 軸方向に 4, y 軸方向に -2 だけ平行移動したグラフ.

(3)

$$y = 2x^2 - 8x + 1$$
$$= 2(x^2 - 4x) + 1$$
$$= 2(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 1$$
$$= 2(x - 2)^2 - 8 + 1$$
$$\therefore\ y = 2(x - 2)^2 - 7$$



よって,

軸の方程式は, $\boldsymbol{x = 2}$,

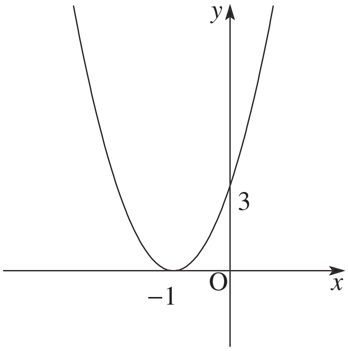
頂点は, **(2, −7)**　(答)

※ $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に -7 だけ平行移動したグラフ.

(4)

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 6x + 3 \\ &= 3(x^2 + 2x) + 3 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3 \\ &= 3(x + 1)^2 - 3 + 3 \end{aligned}$$

$$\therefore\ y = 3(x + 1)^2$$



よって,

軸の方程式は, $\boldsymbol{x = -1}$,

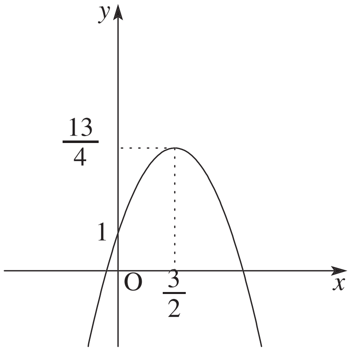
頂点は, $\boldsymbol{(-1,\ 0)}$　　(答)

※ $y = 3x^2$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ.

(5)

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 3x + 1 \\ &= -(x^2 - 3x) + 1 \\ &= -\left\{x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + 1 \\ &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore\ y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$



よって,

軸の方程式は, $\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$,

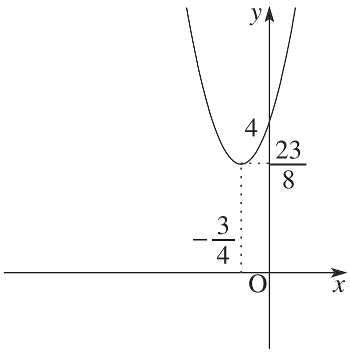
頂点は, $\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ \frac{13}{4}\right)}$　　(答)

※ $y = -x^2$ のグラフを x 軸方向に $\frac{3}{2}$, y 軸方向に $\frac{13}{4}$ だけ平行移動したグラフ.

(6)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 3x + 4 \\ &= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) + 4 \\ &= 2\left\{x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} + 4 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore\ y = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$$



よって,

軸の方程式は, $\boldsymbol{x = -\frac{3}{4}}$,

頂点は, $\boldsymbol{\left(-\frac{3}{4},\ \frac{23}{8}\right)}$　　(答)

※ $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{3}{4}$, y 軸方向に $\frac{23}{8}$ だけ平行移動したグラフ.

【4】(1)

$$y = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$$

より，この放物線の頂点は，$(-1,\ 4)$

$$y = x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2$$

より，この放物線の頂点は，$(-2,\ -2)$
平行移動により頂点が $(-1,\ 4)$ から $(-2,\ -2)$ へ移ったので，

x 軸方向に $(-2)-(-1) = -1 = a$,　y 軸方向に $(-2) - 4 = -6 = b$

平行移動したことになる．
よって，$\boldsymbol{a = -1,\ b = -6}$　(答)

(2)

$$y = -2x^2 - 8x + 1 = -2(x+2)^2 + 9$$

より，この放物線の頂点は，$(-2,\ 9)$

$$y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3$$

より，この放物線の頂点は，$(1,\ 3)$
平行移動により頂点が $(1,\ 3)$ から $(-2,\ 9)$ へ移ったので，

x 軸方向に $-2-1=-3$, y 軸方向に $9-3=6$ 平行移動したもの.　(答)

問題

【1】(1) 求める方程式は，$y = a(x-3)^2 - 2$ とおける．

点 $(4, 5)$ を通るから，$x = 4$，$y = 5$ を代入して

$$5 = a(4-3)^2 - 2 \qquad \therefore\ a = 7$$

以上より，

$$\boldsymbol{y = 7(x-3)^2 - 2} \qquad \text{(答)}$$

※特に指示のない限り，$y = ax^2 + bx + c$ の形にする必要はない．

(2) 軸の方程式が $x = -1$ より，求める方程式は，$y = a\{x-(-1)\}^2 + q$ とおける．

点 $(-2, 0)$ を通るから，$x = -2$，$y = 0$ を代入して

$$0 = a(-2+1)^2 + q \qquad \therefore\ a + q = 0 \quad \cdots①$$

点 $(1, 3)$ を通るから，$x = 1$，$y = 3$ を代入して

$$3 = a(1+1)^2 + q \qquad \therefore\ 4a + q = 3 \quad \cdots②$$

①，② を連立して解いて，$a = 1$，$q = -1$

以上より，

$$\boldsymbol{y = (x+1)^2 - 1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める方程式を，$y = ax^2 + bx + c$ とおく．

3 点 $(0, 4)$，$(-1, 3)$，$(2, 18)$ を通ることから，

$$\begin{cases} 4 = c & \cdots① \\ 3 = a - b + c & \cdots② \\ 18 = 4a + 2b + c & \cdots③ \end{cases}$$

① を ② に代入して，$a - b = -1 \quad \cdots④$

① を ③ に代入して，$4a + 2b = 14$ より，$2a + b = 7 \quad \cdots⑤$

④，⑤ を連立して解いて，$a = 2$，$b = 3$

以上より，

$$\boldsymbol{y = 2x^2 + 3x + 4} \qquad \text{(答)}$$

(4) 求める方程式を，$y = ax^2 + bx + c$ とおく．
3 点 $(-1,\ -4)$，$(1,\ -6)$，$(4,\ -24)$ を通ることから，

$$\begin{cases} -4 = a - b + c & \cdots ① \\ -6 = a + b + c & \cdots ② \\ -24 = 16a + 4b + c & \cdots ③ \end{cases}$$

③ − ① より，$-20 = 15a + 5b$ $\quad\therefore\ -4 = 3a + b$ $\cdots$ ④
② − ① より，$-2 = 2b$ $\quad\therefore\ b = -1.$
これを ④ に代入して，$3a - 1 = -4$ $\quad\therefore\ a = -1.$
これらと ② より，$c = -4.$
以上より，

$$\boldsymbol{y = -x^2 - x - 4} \qquad \text{(答)}$$

(5) 求める方程式は，x 軸と $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わるから，

$$y = a(x + 3)(x - 1)$$

とおける．点 $(-4,\ -1)$ を通るから，

$$-1 = a \times (-1) \times (-5) \qquad \therefore\ a = -\frac{1}{5}$$

以上より，

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{5}(x + 3)(x - 1)} \qquad \text{(答)}$$

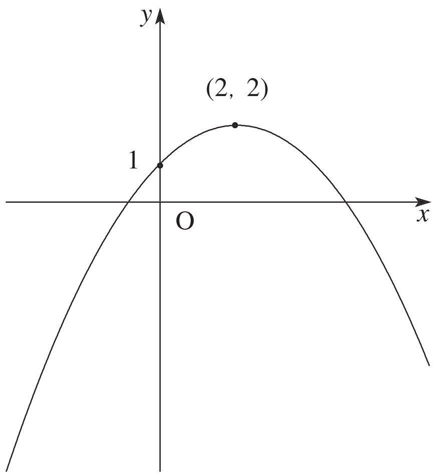
$\left(\text{右辺を展開して整理すると，} y = -\dfrac{1}{5}x^2 - \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5}\right)$

【2】(1) 求める方程式は，$y = a(x-2)^2 + 2$ とおける．
点 $(0,\ 1)$ を通るから，$x = 0$，$y = 1$ を代入して

$$1 = a(0 - 2)^2 + 2 \qquad \therefore\ a = -\frac{1}{4}$$

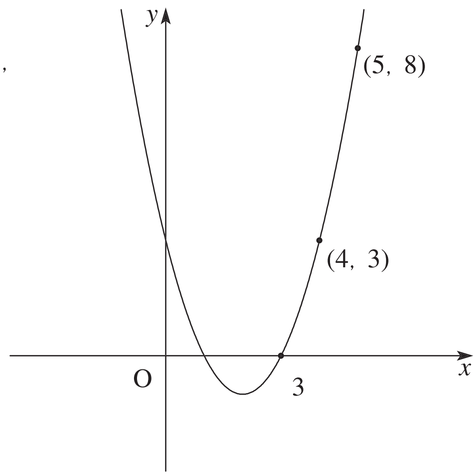
以上より，

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 2} \qquad \text{(答)}$$



(2) 求める方程式を，$y = ax^2 + bx + c$ とおく．

3 点 (3, 0)，(4, 3)，(5, 8) を通ることから，



$$\begin{cases} 0 = 9a + 3b + c & \cdots ① \\ 3 = 16a + 4b + c & \cdots ② \\ 8 = 25a + 5b + c & \cdots ③ \end{cases}$$

③ − ② より，

$$5 = 9a + b \quad \cdots ④$$

② − ① より，

$$3 = 7a + b \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ を連立して解いて，$a = 1$，$b = -4$

これらを ① に代入して，$0 = 9 - 12 + c$　　$\therefore\ c = 3$

以上より，

$$\boldsymbol{y = x^2 - 4x + 3} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1)

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x - 3 \\ &= (x^2 - 4x + 4 - 4) - 3 \\ \therefore\ y &= (x - 2)^2 - 7 \end{aligned}$$

よって，

最大値　なし，最小値 − 7 (x = 2)　　(答)

(2)

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 4x - 1 \\ &= -2(x^2 + 2x) - 1 \\ &= -2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 1 \\ &= -2(x + 1)^2 + 2 - 1 \\ \therefore\ y &= -2(x + 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

よって，

最大値 1 (x = −1)，最小値　なし　　(答)

(3)

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 11 \\ &= (x - 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

と変形できるから，$f(x) = x^2 - 6x + 11$ とおくと，

最大値は，$f(-2) = (-2)^2 - 6 \times (-2) + 11 = 27$

最小値は，$f(1) = 1^2 - 6 \times 1 + 11 = 6$

最大値は 27 (x = −2 のとき)，最小値は 6 (x = 1 のとき)　　(答)

(4) $$y = 3x^2 + 6x - 5$$
$$= 3(x+1)^2 - 8$$

と変形できるから，$f(x) = 3x^2 + 6x - 5$ とおくと，

最大値は，$f(2) = 3 \times 2^2 + 6 \times 2 - 5 = 19$

最小値は，$f(-1) = -8$

最大値は 19 ($x = 2$ のとき)，最小値は − 8 ($x = -1$ のとき) (答)

(5) $$y = 2x^2 - 5x + 2$$
$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

と変形できるから，$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ とおくと，

最大値は，$f(0) = 2$

最小値は，$f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{9}{8}$

最大値は 2 ($x = 0$ のとき)，最小値は $-\frac{9}{8}$ $\left(x = \frac{5}{4}\text{のとき}\right)$ (答)

(6) $$y = -2x^2 + 10x + 3$$
$$= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{31}{2}$$

と変形できるから，$f(x) = -2x^2 + 10x + 3$ とおくと，

最大値は，$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{31}{2}$

最小値は，$f(0) = f(5) = 3$

最大値は $\frac{31}{2}$ $\left(x = \frac{5}{2}\text{のとき}\right)$，最小値は 3 ($x = 0, 5$ のとき) (答)

【4】x 軸上の点の y 座標は 0 だから，それぞれの式に $y=0$ を代入して x を求めればよい．

(1) $y=x^2-2x-35$ に $y=0$ を代入して，$x^2-2x-35=0$

これを解いて，$(x+5)(x-7)=0$ より，$x=-5,\ 7$

よって，

$(-5,\ 0)$，$(7,\ 0)$　　(答)

(2) $y=x^2+3x-5$ に $y=0$ を代入して，$x^2+3x-5=0$

これを解いて，

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1\times(-5)}}{2\times 1}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$$

よって，

$$\boldsymbol{\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{-3+\sqrt{29}}{2},\ 0\right)}$$　　(答)

(3) $y=x^2+4x-1$ に $y=0$ を代入して，$x^2+4x-1=0$

これを解いて，

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\times(-1)}}{1}$$
$$=-2\pm\sqrt{5}$$

よって，

$(-2-\sqrt{5},\ 0)$，$(-2+\sqrt{5},\ 0)$　　(答)

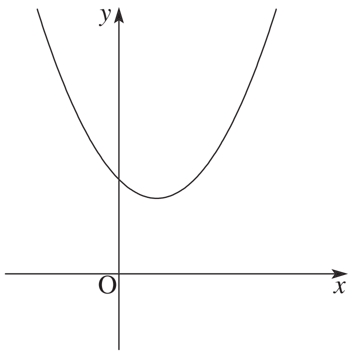
(4) $y=x^2+8x+16$ に $y=0$ を代入して，$x^2+8x+16=0$

これを解いて，$(x+4)^2=0$ より，$x=-4$（重解）

よって，

$(-4,\ 0)$　　(答)

【5】(1) ① 上に開く放物線だから，



$\boldsymbol{a > 0}$　　(答)

② 軸の方程式 $x = -\dfrac{b}{2a} > 0$
これに $-2a(< 0)$ をかけて，

$\boldsymbol{b < 0}$　　(答)

③ $x = 0$ のとき，$c = y > 0$ だから，

$\boldsymbol{c > 0}$　　(答)

④ 頂点の y 座標 $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ で，$a > 0$.

$\therefore\ \boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$　　(答)

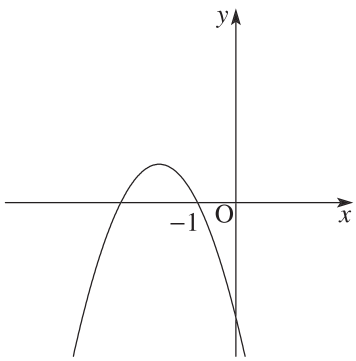
⑤ $x = 1$ に対応する $y = a + b + c > 0$ より，

$\boldsymbol{a + b + c > 0}$　　(答)

⑥ $x = -1$ に対応する $y = a - b + c > 0$ より，

$\boldsymbol{a - b + c > 0}$　　(答)

(2)



① 下に開く放物線だから，

$\boldsymbol{a < 0}$　　(答)

② 軸の方程式 $x = -\dfrac{b}{2a} < 0$
これに $-2a(> 0)$ をかけて，

$\boldsymbol{b < 0}$　　(答)

③ $x = 0$ のとき，$c = y < 0$ だから，

$\boldsymbol{c < 0}$　　(答)

④ 頂点の y 座標 $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ で，$a < 0$.

$\therefore\ \boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$　　(答)

⑤ $x = 1$ に対応する $y = a + b + c < 0$ より，

$\boldsymbol{a + b + c < 0}$　　(答)

⑥ $x = -1$ に対応する $y = a - b + c$ が 0 だから，

$\boldsymbol{a - b + c = 0}$　　(答)

【6】(1) 放物線 $y=2x^2$ を平行移動したグラフの方程式は定数 a, b を用いて,

$$y = 2x^2 + ax + b \quad \cdots (*)$$

と表せる.(∗) に $(x,\ y) = (1,\ 5),\ (3,\ 19)$ を代入して,

$$\begin{cases} 5 = 2 + a + b & \cdots ① \\ 19 = 18 + 3a + b & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② を連立させて解くと, $(a,\ b) = (-1,\ 4)$
これを (∗) に代入して, 求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y = 2x^2 - x + 4} \qquad (\text{答})$$

(2) 頂点の座標は実数 t を用いて, $(t,\ -2t-3)$ とおける. 求める放物線の方程式は, $y = x^2 + x + 1$ を平行移動させたグラフなので,

$$y = (x-t)^2 - 2t - 3 \quad \cdots (*)$$

とおける.(∗) が原点を通るので,(∗) に $(x,\ y) = (0,\ 0)$ を代入して

$$0 = t^2 - 2t - 3 \qquad \therefore t = 3,\ -1$$

(i) $t=3$ を (∗) に代入して

$$\begin{aligned} y &= (x-3)^2 - 9 \\ &= x^2 - 6x \end{aligned}$$

(ii) $t=-1$ を (∗) に代入して

$$\begin{aligned} y &= (x+1)^2 - 1 \\ &= x^2 + 2x \end{aligned}$$

(i), (ii) より, 求める放物線の方程式は,

$$\boldsymbol{y = x^2 - 6x,\quad y = x^2 + 2x} \qquad (\text{答})$$

【7】(1)

$$X = x^2 + 4x$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

よって，$-3 \leqq x \leqq 3$ における X の最大値，最小値は

最大値　21 (x = 3)
最小値　− 4 (x = −2)　　(答)

(2) (1) の X を用いて，y を X で表すと，

$$y = X^2 - 2X + 3$$
$$= (X - 1)^2 + 2$$

(1) より，$-3 \leqq x \leqq 3$ において，$-4 \leqq X \leqq 21$ であるので，y は $X = 21$ で最大，$X = 1$ で最小となる．

$X = 21$ のとき，(1) より，$x = 3$.

$X = 1$ のとき，

$$x^2 + 4x = 1 \iff x^2 + 4x - 1 = 0$$
$$\therefore\ x = -2 \pm \sqrt{5}$$

$-3 \leqq x \leqq 3$ を考え，$x = -2 + \sqrt{5}$.

以上より，

最大値　402 (x = 3)
最小値　2 ($x = -2 + \sqrt{5}$)　　(答)

【8】(1) $x^2+3x-4=0$ の判別式を D とすると

$$D=3^2-4\times1\times(-4)=25>0$$

より，共有点の個数は 2 個

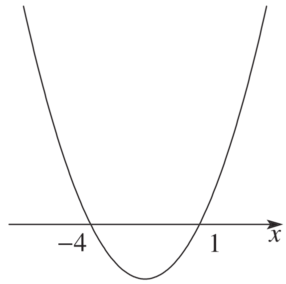
ここで，$x^2+3x-4=0$ より，

$$(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore\ x=-4,\ 1$$

以上より，

共有点は 2 個で，その座標は，$(-4,\ 0)$，$(1,\ 0)$　　(答)

(2) (1) より $y=x^2+3x-4$ のグラフは右の図のようになるから，



$y>0$ となる x の範囲は，　$\boldsymbol{x<-4,\ 1<x}$　　(答)

$y<0$ となる x の範囲は，　$\boldsymbol{-4<x<1}$　　(答)

(3) (2) より，

$x^2+3x-4>0$ の解は，　$\boldsymbol{x<-4,\ 1<x}$　　(答)

$x^2+3x-4<0$ の解は，　$\boldsymbol{-4<x<1}$　　(答)

【9】題意より，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，2 解 $x=3,\ 7$ をもつ．
解と係数の関係を用いて，

$$3+7=-\frac{b}{a} \qquad \therefore\ b=-10a$$

$$3\times 7=\frac{c}{a} \qquad \therefore\ c=21a$$

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=p(x-q)$ との交点は，2 次方程式

$$ax^2+(b-p)x+(c+pq)=0$$

の解であり，ここに $b=-10a$，$c=21a$ を代入して，

$$ax^2+(-10a-p)x+(21a+pq)=0 \qquad \cdots①$$

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=p(x-q)$ が 2 つの交点をもつことから，① の判別式を D とすると

$$D=(-10a-p)^2-4a(21a+pq)>0 \quad \cdots②$$

② の左辺は，p の値に関わらず常に正．これを p の関数 $f(p)$ と考えれば，

$$\begin{aligned} f(p) &= (-10a-p)^2-4a(21a+pq) \\ &= 100a^2+20ap+p^2-84a^2-4apq \\ &= p^2+2\times 2a(5-q)p+16a^2 \end{aligned}$$

$f(p)>0$ より，$f(p)=0$ の判別式を D' とすると，$D'<0$ であればよい．

$$\begin{aligned} D'/4 &= \{2a(5-q)\}^2-16a^2 \\ &= 4a^2(25-10q+q^2)-4a^2\times 4 \\ &= 4a^2(q^2-10q+21) \\ &= 4a^2(q-3)(q-7)<0 \end{aligned}$$

$a^2>0$ より，$(q-3)(q-7)<0$
よって，

$3<q<7$ (答)

2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の 2 解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$$

M1TK

高1難関大数学K

Z-KAI

会員番号	

氏　名	