M2JS/M2J

春期講習

解答

Z会東大進学教室

高２選抜東大数学

高２東大数学

問題

【1】(1) 与式を同値変形すると

$$\begin{aligned}\sin 2\theta + 2\sin^2\theta = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \sin 2\theta + 1 - \cos 2\theta = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff \sin 2\theta - \cos 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff \sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$-\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{7}{4}\pi$ であるから

$$2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi \qquad \therefore\quad 2\theta = \frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi$$

よって

$$\theta = \frac{5}{24}\pi,\ \frac{13}{24}\pi \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式を同値変形すると

$$\begin{aligned}\cos\theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) > 0 &\iff \cos\theta + \sin\theta\cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} > 0\\ &\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{3}{2}\cos\theta > 0\\ &\iff \sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) > 0\end{aligned}$$

$-\pi \leqq \theta < \pi$ より，$-\frac{2}{3}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi$ であるから

$$0 < \theta + \frac{\pi}{3} < \pi \qquad \therefore\quad -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi \qquad \text{(答)}$$

【2】$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおく.

$$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \iff \frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$$

に注意すると

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

よって

$$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

また

$$\begin{aligned} & t^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta = 1 + 2\cos\theta\sin\theta \\ \iff \quad & 2\cos\theta\sin\theta = t^2 - 1 \end{aligned}$$

よって

$$f(\theta) = (t^2 - 1) - 3t = t^2 - 3t - 1 \quad (-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$$

と表される. ここで

$$f(\theta) = g(t) = t^2 - 3t - 1 \quad (-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$$

とおくと

$$g(t) = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

と変形され, $\dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$ であるから, $g(t)$ は区間 $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ において, 単調減少関数となる.

したがって

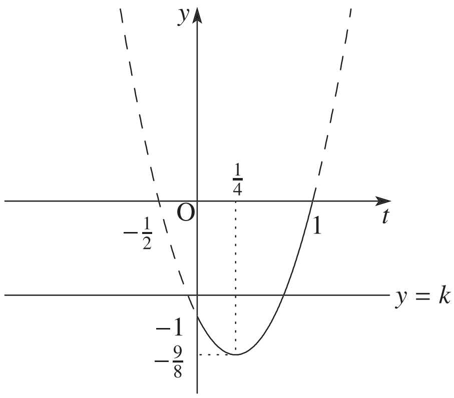
$$\begin{cases} 最大値 : g(-1) = 3 \\ 最小値 : g(\sqrt{2}) = 1 - 3\sqrt{2} \end{cases} \qquad (答)$$

【3】$\sin x = t$ とおく．$0 \leqq x < \pi$ より $0 \leqq t \leqq 1$ である．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &\iff 1 - 2\sin^2 x + \sin x + k = 0 \\
&\iff 2\sin^2 x - \sin x - 1 = k \\
&\iff 2t^2 - t - 1 = k \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

$y = 2t^2 - t - 1 (0 \leqq t \leqq 1)$ と $y = k$ の共有点の t の値を考える．

図 1.1



(i) $k < -\dfrac{9}{8}$, $0 < k$ のとき

①は解なし．

よって，与方程式も解なし．

(ii) $k = -\dfrac{9}{8}$ のとき

①は $t = \dfrac{1}{4}$ を解にもつ．

このとき，$\sin x = t$ をみたす x は 2 つ存在する．

(iii) $-\dfrac{9}{8} < k < -1$ のとき

①は区間 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に異なる 2 解をもつ．

このとき，$\sin x = t$ をみたす x は 4 つ存在する．

(iv) $k = -1$ のとき

①は $t = 0,\ \dfrac{1}{2}$ を解にもつ．

このとき，$\sin x = t$ をみたす x は 3 つ存在する．

(v) $-1 < k < 0$ のとき

①は区間 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ に 1 解をもつ．

このとき，$\sin x = t$ をみたす x は 2 つ存在する．

(vi) $k=0$ のとき

①は $t=1$ を解にもつ.

このとき, $\sin x=t$ をみたす x は 1 つ存在する.

よって, k の値と与方程式の解の個数の関係は

k	$\cdots$	$-\frac{9}{8}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
解の個数	0	2	4	3	2	1	0

(答)

【4】与えられた条件を

$$\begin{cases} \sin y = |\sin 4x| \\ \cos y = |\cos 4x| \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \cdots (*)$$

とおく.

(i) $0 \leqq 4x \leqq \dfrac{\pi}{2} \iff 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{8}$ のとき

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = \sin 4x \\ \cos y = \cos 4x \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\therefore \quad y = 4x$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq 4x \leqq \pi \iff \dfrac{\pi}{8} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = \sin 4x \\ \cos y = -\cos 4x \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = \sin(\pi - 4x) \\ \cos y = \cos(\pi - 4x) \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\therefore \quad y = \pi - 4x$

(iii) $\pi \leqq 4x \leqq \dfrac{3}{2}\pi \iff \dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{8}\pi$ のとき

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = -\sin 4x \\ \cos y = -\cos 4x \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = \sin(4x - \pi) \\ \cos y = \cos(4x - \pi) \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

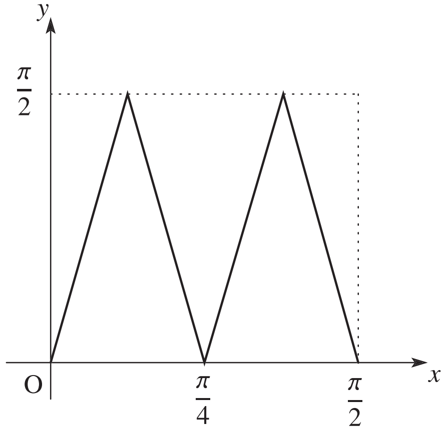
$\therefore \quad y = 4x - \pi$

(iv) $\dfrac{3}{2}\pi \leqq 4x \leqq 2\pi \iff \dfrac{3}{8}\pi \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = -\sin 4x \\ \cos y = \cos 4x \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = \sin(2\pi - 4x) \\ \cos y = \cos(2\pi - 4x) \\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\therefore \quad y = 2\pi - 4x$

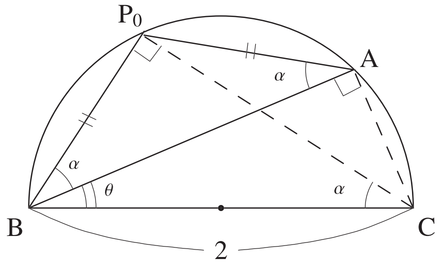
以上より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において (*) を図示すると



（答）

【5】$\triangle$PBA の面積が最大となるのは，点 P が弦 AB から最も遠いとき，すなわち，点 P が弧 AB の中点 P_0 にあるときである (図 1.2 参照).

図 1.2



このとき，$\angle P_0BA = \alpha$ とおくと

$$\angle BAP_0 = \alpha$$
$$\angle BCP_0 = \alpha \quad (\because \text{ 弧 } BP_0 \text{ の円周角})$$
$$\angle BP_0C = \frac{\pi}{2} \quad (\because \text{ BC が直径})$$

である．4 点 P_0, B, C, A が同一円周上にあるから

$$\angle P_0BC + \angle P_0AC = \pi$$
$$\therefore \quad \alpha + \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$$
$$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

よって

$$BP_0 = BC \sin \angle BCP_0 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$BA = BC\cos\theta = 2\cos\theta$$

から

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BP_0 \cdot \sin \angle P_0BA \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\cos\theta \cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos\theta \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{2} \qquad (\because \text{ 半角公式}) \\ &= \cos\theta(1 - \sin\theta) \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

問題

【1】(1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$ の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{100} = 100(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) = -17.61$$

$$\therefore \quad 10^{-18} < \left(\frac{2}{3}\right)^{100} < 10^{-17}$$

よって，小数第 18 位にはじめて 0 でない数字が現れる．　　(答)

(2) 7^x が 15 桁の整数であることから

$$10^{14} \leqq 7^x < 10^{15}$$
$$\therefore \quad 14 \leqq x \log_{10} 7 < 15$$
$$\therefore \quad \frac{14}{0.8451} \leqq x < \frac{15}{0.8451}$$
$$\therefore \quad 16.\cdots \leqq x < 17.\cdots$$
$$\therefore \quad x = 17$$

また，7^x の 1 の位の数字は

$$7,\ 9,\ 3,\ 1,\ 7,\ 9,\ 3,\ 1,\ \ldots$$

のように，周期 4 で変化するので

$$7^{17} = 7^{4\cdot 4+1}$$

から，7^{17} の 1 の位の数字は 7.　　(答)

また，$17 \log_{10} 7 = 14.3667$ より

$$7^{17} = 10^{14.3667}$$

である．ここで

$$\log_{10} 2 < 0.3667 < \log_{10} 3$$
$$\therefore \quad \log_{10} 10^{14} + \log_{10} 2 < \log_{10} 10^{14} + \log_{10} 10^{0.3667} < \log_{10} 10^{14} + \log_{10} 3$$
$$\therefore \quad \log_{10} 2 \cdot 10^{14} < \log_{10} 10^{14.3667} < \log_{10} 3 \cdot 10^{14}$$
$$\therefore \quad 2 \cdot 10^{14} < 10^{14.3667} < 3 \cdot 10^{14}$$

したがって，7^{17} の最高位の数字は 2.　　(答)

【2】$\log_2 x = t$ とおくと

$$\log_2 8x = \log_2 2^3 + \log_2 x = t + 3$$
$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x} = -\frac{1}{2}\log_2 2x = -\frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 x) = -\frac{1}{2}(t+1)$$

と表されることから

$$\begin{aligned} f(x) &= (t+3)^2 - 2\left\{-\frac{1}{2}(t+1)\right\} \\ &= t^2 + 7t + 10 \end{aligned}$$

となる．ここで

$$f(x) = g(t) = t^2 + 7t + 10$$

とおくと

$$\frac{1}{16} \leqq x \leqq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 \leqq \log_2 x \leqq 0$$

であるから，$f(x)$ のとり得る値の範囲は，$g(t)$ の $-4 \leqq t \leqq 0$ における値域に一致する．

$$g(t) = \left(t + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad (-4 \leqq t \leqq 0)$$

と変形されることから

$$-\frac{9}{4} \leqq g(t) \leqq 10$$

左辺等号成立は $t = -\frac{7}{2} \ \Leftrightarrow \ \log_2 x = -\frac{7}{2} \ \Leftrightarrow \ x = 2^{-\frac{7}{2}}$ のとき．
右辺等号成立は $t = 0 \ \Leftrightarrow \ \log_2 x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1$ のとき．
よって

$$-\frac{9}{4} \leqq f(x) \leqq 10 \qquad (答)$$

【3】$2^x + 2^{-x} = t$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\left\{(2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}\right\} - 20\,(2^x + 2^{-x}) + 9 \\ &= 3\left(t^2 - 2\right) - 20t + 9 \\ &= 3t^2 - 20t + 3 \end{aligned}$$

$2^x > 0,\ 2^{-x} > 0$ だから，相加相乗平均の関係から

$$t = 2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号成立は $2^x = 2^{-x}$ つまり $x = 0$ のときである.
ここで

$$f(x) = g(t) = 3t^2 - 20t + 3$$

とおくと

$$\begin{aligned} g(t) = 3t^2 - 20t + 3 &= 3\left(t^2 - \frac{20}{3}t\right) + 3 \\ &= 3\left(t - \frac{10}{3}\right)^2 + 3 - \frac{100}{3} = 3\left(t - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{91}{3} \end{aligned}$$

$t \geqq 2$ であることに注意すると，$g(t)$ は $t = \dfrac{10}{3}$ のとき，最小値 $g\left(\dfrac{10}{3}\right) = -\dfrac{91}{3}$ をとる.
このとき，$t = 2^x + 2^{-x} = \dfrac{10}{3}$ であるから

$$3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{-x} = 10$$

ここで，$2^x = p$ とおくと，$p > 0$ で

$$3p^2 - 10p + 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3p - 1)(p - 3) = 0$$

よって

$$p = 2^x = \frac{1}{3},\ 3$$

これより

$$x = \log_2 \frac{1}{3},\ \log_2 3 \qquad \therefore\ x = \pm\log_2 3$$

よって

$$x = \pm\log_2 3 \text{ のとき，最小値} -\frac{91}{3} \qquad \text{(答)}$$

【4】真数条件と底の条件から

$$0 < x < 1,\ 1 < x,\ 0 < y < 1,\ 1 < y$$

このとき，与えられた不等式は $\log_x y > \dfrac{1}{\log_x y}$ となる. つまり

$$\frac{(\log_x y)^2 - 1}{\log_x y} > 0 \quad \cdots ①$$

ここで，$\log_x y$ の正負で場合分けをする.

(i) $\log_x y > 0$ のとき, ①の両辺に $\log_x y$ をかけて

$$(\log_x y + 1)(\log_x y - 1) > 0 \qquad \therefore \quad \log_x y > 1$$

(ii) $\log_x y < 0$ のとき, (i) と同様にして

$$(\log_x y + 1)(\log_x y - 1) < 0 \qquad \therefore \quad -1 < \log_x y < 0$$

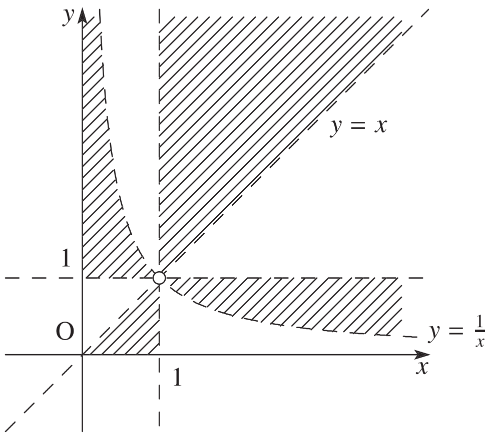
(i), (ii) より

$$-1 < \log_x y < 0,\ 1 < \log_x y$$
$$\therefore \quad \log_x x^{-1} < \log_x y < \log_x 1,\ \log_x x < \log_x y$$

したがって

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \text{ のとき} & x^{-1} > y > 1,\ x > y \\ 1 < x \text{ のとき} & x^{-1} < y < 1,\ x < y \end{cases}$$

これを図示すると，下図のようになる. ただし，境界線を除く. （答）



【5】(1) $2^{10} > 10^3$ より

$$\log_{10} 2^{10} > \log_{10} 10^3$$
$$\therefore\quad 10\log_{10} 2 > 3$$
$$\therefore\quad \log_{10} 2 > 0.3 \qquad \text{(証明終)}$$

(2) $M > 0,\ N > 0$ より，相加・相乗平均の関係から

$$\frac{M+N}{2} \geqq \sqrt{MN}$$
$$\therefore\quad \log_{10}\frac{M+N}{2} \geqq \log_{10}\sqrt{MN}$$
$$\therefore\quad \log_{10}(M+N) - \log_{10} 2 \geqq \frac{1}{2}\log_{10} MN$$
$$\therefore\quad \log_{10}(M+N) \geqq \frac{1}{2}(\log_{10} M + \log_{10} N) + \log_{10} 2 \qquad \text{(証明終)}$$

(3) (2) の式で $(M,\ N) = (5,\ 8)$ とすると

$$\begin{aligned}\log_{10}(5+8) &\geqq \frac{1}{2}(\log_{10} 5 + \log_{10} 8) + \log_{10} 2\\ &= \frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{10}{2} + \log_{10} 2^3\right) + \log_{10} 2\\ &= \frac{1}{2}(1 + 2\log_{10} 2) + \log_{10} 2\\ &= \frac{1}{2} + 2\log_{10} 2\\ &> 0.5 + 2 \times 0.3 \quad (\because\ (1))\end{aligned}$$

すなわち

$$\log_{10} 13 > 1.1 \qquad \text{(証明終)}$$

問題

【1】$\triangle$ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{-3+1+3}{3},\ \frac{0+4+0}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)\qquad (答)$$

また，垂心は各頂点から各辺へ下ろした垂線同士の交点である．ここで，B から AC に下ろした垂線の方程式は

$$x=1\ \cdots\cdots ①$$

C から AB に下ろした垂線の方程式は，直線 AB の傾きが 1 であることから

$$y=-(x-3)\qquad \therefore\ y=-x+3\ \cdots\cdots ②$$

①，② の交点が $\triangle$ABC の垂心に他ならないので，①，② より

$$y=2$$

よって，求める垂心の座標は

$$(1,\ 2)\qquad (答)$$

また，$\triangle$ABC の外心を P(x, y) とおくと，PA = PB = PC より

$$(x+3)^2+y^2=(x-1)^2+(y-4)^2=(x-3)^2+y^2$$

すなわち

$$\begin{cases}(x+3)^2+y^2=(x-1)^2+(y-4)^2\\(x+3)^2+y^2=(x-3)^2+y^2\end{cases}$$

それぞれ整理して

$$\begin{cases}8x+8y-8=0\\12x=0\end{cases}$$

これを解いて

$$x=0,\ y=1$$

よって，求める外心の座標は

$$(0,\ 1)\qquad (答)$$

【2】（1）$\ell_1,\ \ell_2$ が 1 点で交わることと，$\ell_1,\ \ell_2$ が平行でないことは同値であるから，求める条件は

$$\begin{aligned} \ell_1,\ \ell_2\text{が 1 点で交わる} &\iff \ell_1,\ \ell_2\text{が平行でない} \\ &\iff a_1 : b_1 \neq a_2 : b_2 \\ &\iff a_1 b_2 \neq a_2 b_1 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

（2）$\ell_1,\ \ell_2$ の交点がただ 1 つ存在するので，それを点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とすると

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0,\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0$$

(#) の左辺に $(x,\ y) = (x_0,\ y_0)$ を代入すると

$$p(a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1) + q(a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2) = p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0$$

より，(#) が表す直線はすべて点 P を通る．

また，座標平面上の P と異なる点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ について，(#) の左辺に $(x,\ y) = (X,\ Y)$ を代入すると

$$p(a_1 X + b_1 Y + c_1) + q(a_2 X + b_2 Y + c_2)$$

となる．いま

$$(p,\ q) = \big(a_2 X + b_2 Y + c_2,\ -(a_1 X + b_1 Y + c_1)\big)$$

とおけば

$$p(a_1 X + b_1 Y + c_1) + q(a_2 X + b_2 Y + c_2) = 0$$

となる．

よって, 任意の点 Q について (#) が直線 PQ を表すような $p,\ q$ (ただし，$(p,\ q) \neq (0,\ 0)$) が存在する．

以上から，題意は示された．〔証明終〕

（3）$\ell_1,\ \ell_2$ が 1 点で交わらないとき

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2$$

であるから

$$\ell_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad \ell_2 : a_1 x + b_1 y + c_2 = 0$$

として一般性を失わない．また，このとき，次の 2 つの場合を考えれば十分．

(i) $\ell_1,\ \ell_2$ が一致するとき

$$\begin{aligned} \text{(\#)} &\iff p(a_1 x + b_1 y + c_1) + q(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0 \\ &\iff (p+q)(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0 \end{aligned}$$

すなわち，$p \neq -q$ のとき，(#) は $\ell_1(\ell_2)$ そのものを表す．

なお，$p = -q$ のとき，(#) は任意の $x,\ y$ について成立するから，(♯) は平面全体を表す．

(ii) ℓ_1, ℓ_2 が平行である (一致しない) とき

$$\begin{aligned}(\#) \quad &\Longleftrightarrow \quad p(a_1x+b_1y+c_1)+q(a_1x+b_1y+c_2)=0\\ &\Longleftrightarrow \quad (p+q)(a_1x+b_1y)+pc_1+qc_2=0\end{aligned}$$

すなわち，$p \neq -q$ のとき，(#) は $\ell_1(\ell_2)$ に平行な直線を表す.

なお，$p=-q$ かつ $pc_1+qc_2=0$ のとき，(#) は任意の x, y について成立するから，(♯) は平面全体を表し，$p=-q$ かつ $pc_1+qc_2 \neq 0$ のとき，(#) はつねに不成立であるから，何も表さない.

【3】(1) ①，②の交点を通る直線の方程式は

$$x^2+y^2+x-2y-5+k(x^2+y^2-5x-5y+10)=0$$

と表せる．これが直線を表すためには，$k=-1$ でなければならない． よって

$$6x+3y-15=0$$
$$\therefore 2x+y-5=0 \qquad \text{(答)}$$

(2) ①，②の交点を通る円の方程式は

$$(x^2+y^2+x-2y-5)+k(x^2+y^2-5x-5y+10)=0$$

と表せる. これが $(0,\ -1)$ を通るから

$$1+2-5+k(1+5+10)=0$$
$$\therefore k=\frac{1}{8}$$

よって， 求める円の方程式は

$$3x^2+3y^2+x-7y-10=0 \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 円の方程式は

$$(x-3)^2+(y-2)^2=25$$

円上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1-3)(x-3)+(y_1-2)(y-2)=25$$

これが $(-2,\ 12)$ を通るので

$$\begin{aligned}&(x_1-3)(-2-3)+(y_1-2)(12-2)=25\\ \Longleftrightarrow\ &-(x_1-3)+2(y_1-2)=5\end{aligned}$$

ここで，$(x_1,\ y_1)$ は円上の点なので

$$(x_1-3)^2+(y_1-2)^2=25$$

ここに，$x_1-3=2(y_1-2)-5$ を代入して

$$\begin{aligned}&4(y_1-2)^2-20(y_1-2)+25+(y_1-2)^2=25\\ \Longleftrightarrow\ &(y_1-2)^2-4(y_1-2)=0\\ \Longleftrightarrow\ &(y_1-2)\{(y_1-2)-4\}=0\end{aligned}$$

よって

$$y_1-2=0,\ 4$$

このとき

$$x_1-3=-5,\ 3$$

なので，求める接線の方程式は

$$\begin{cases}-5(x-3)=25\\ 3(x-3)+4(y-2)=25\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x=-2\\ 3x+4y=42\end{cases}\qquad\text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned}&x^2+y^2=4 &\cdots①\\ &(x-5)^2+y^2=25 &\cdots②\end{aligned}$$

とおく.

求める接線の方程式を $y=mx+n$ とおくと

$$mx-y+n=0\quad\cdots③$$

円の中心と接線との距離は半径に等しい.

①，③より

$$\frac{|n|}{\sqrt{1+m^2}}=2\quad\cdots④$$

②，③より

$$\frac{|5m+n|}{\sqrt{1+m^2}}=5\quad\cdots⑤$$

よって，④，⑤より

$$|5m+n| = \frac{5}{2}|n|$$
$$5m+n = \pm\frac{5}{2}n$$
$$\therefore m = \frac{3}{10}n,\ -\frac{7}{10}n$$

(i) $m = \dfrac{3}{10}n$ のとき，④より

$$4(1+m^2) = n^2$$
$$4\left(1+\frac{9}{100}n^2\right) = n^2$$
$$\frac{16}{25}n^2 = 4$$
$$\therefore n = \pm\frac{5}{2},\ m = \pm\frac{3}{4} \quad \text{(複号同順)}$$

よって共通接線の方程式は③より

$$\pm\frac{3}{4}x - y \pm \frac{5}{2} = 0$$
$$\therefore 3x \pm 4y + 10 = 0$$

(ii) $m = -\dfrac{7}{10}n$ のとき，④より

$$4(1+m^2) = n^2$$
$$4\left(1+\frac{49}{100}n^2\right) = n^2$$
$$\frac{24}{25}n^2 = -4$$

これは不適.

以上より，求める接線の方程式は

$$3x \pm 4y + 10 = 0 \qquad \text{(答)}$$

【5】 I. 原点から $y = x + 1$ に下ろした垂線の足を H とし，$y = x + 1$ と $x^2 + y^2 = a^2$ の交点のうち x 座標の大きい方を A とすると，3 平方の定理より

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{AH}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$\mathrm{OA} = a, \quad \mathrm{OH} = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathrm{AH} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

だから①より

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{7}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$a > 0$ より

$$a = 2 \qquad \text{(答)}$$

II. 与えられた円は, $(x + 2)^2 + y^2 = 1$ より, 中心は $(-2,\ 0)$ である. $x + y = 1$ に関する中心との対称点を (α, β) とすると

$$\begin{cases} \dfrac{-2 + \alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 1 \\ \dfrac{\beta}{\alpha + 2} \cdot (-1) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \beta = \alpha + 2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad (\alpha, \beta) = (1,\ 3)$$

よって, 求める円の方程式は

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1 \quad \iff \quad x^2 - 2x + y^2 - 6y + 9 = 0 \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$\mathrm{AP}:\mathrm{PO}=1:1$ より

$$\mathrm{PO}=\mathrm{AP}$$
$$\mathrm{PO}^2=\mathrm{AP}^2$$

ここで

$$\mathrm{PO}^2=x^2+y^2$$
$$\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+y^2$$

これらを代入すると

$$x^2+y^2=(x-a)^2+y^2$$
$$-2ax+a^2=0$$

$a>0$ だから

$$x=\frac{a}{2}$$

よって，求める点 P の軌跡は

線分 OA の垂直二等分線.　　(答)

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$\mathrm{AP}:\mathrm{PO}=2:1$ より

$$2\mathrm{PO}=\mathrm{AP}$$
$$4\mathrm{PO}^2=\mathrm{AP}^2$$

ここで

$$\mathrm{PO}^2=x^2+y^2$$
$$\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+y^2$$

これらを代入すると

$$4(x^2+y^2)=(x-a)^2+y^2$$
$$3x^2+3y^2+2ax-a^2=0$$
$$\therefore \left(x+\frac{a}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}a^2$$

よって，点 P の軌跡は

中心 $\left(-\frac{a}{3},\ 0\right)$，半径 $\frac{2}{3}a$ の円　　(答)

【2】

$$\begin{cases} x + ay - 1 = 0 & \cdots ① \\ ax - y - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② × a より

$$(1 + a^2)x = a + 1 \qquad \therefore \quad x = \frac{a+1}{a^2+1}$$

したがって

$$y = ax - 1 = \frac{a^2 + a}{a^2 + 1} - 1 = \frac{a-1}{a^2+1}$$
$$\therefore x - y = \frac{2}{a^2+1} > 0$$
$$\therefore \frac{x}{x-y} = \frac{a+1}{2}$$

これから

$$a = \frac{2x}{x-y} - 1 = \frac{x+y}{x-y}$$

$x + \dfrac{x+y}{x-y} \cdot y - 1 = 0$ より

$$x^2 - xy + xy + y^2 - x + y = 0$$
$$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

ただし，$x - y > 0$ より，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ を除く.

よって，求める軌跡は

$$円 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (ただし，点\ (0,\ 0)\ を除く) \qquad (答)$$

【3】点 $(X,\ Y)$ が，求める通過領域内の点であるとすると

$$
\begin{aligned}
&(X, Y) \text{ が通過領域の点} \\
\iff &\text{ある実数 } t_0 \text{ があって } t_0X + Y - {t_0}^2 = 0 \text{ となる．} \\
\iff &tX + Y - t^2 = 0 \text{ が } t \text{ の 2 次方程式として実数解をもつ．} \\
\iff &t^2 - Xt - Y = 0 \text{ より，} D = X^2 + 4Y \geqq 0 \\
\iff &Y \geqq -\frac{1}{4}X^2
\end{aligned}
$$

よって，求める領域は

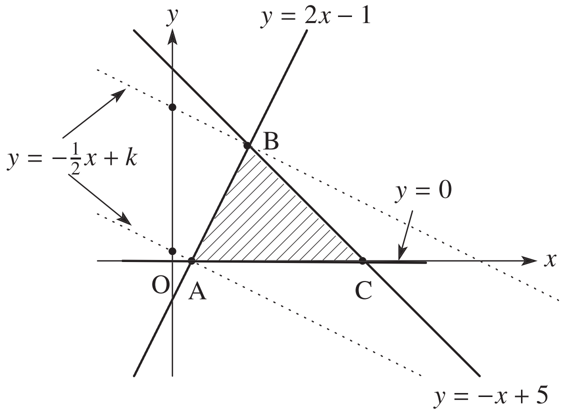
$$y \geqq -\frac{1}{4}x^2 \qquad \text{(答)}$$

【4】　I. 題意の領域は

$$\begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq -x+5 \\ y \leqq 2x-1 \end{cases}$$

各交点を図 4.1 のように A，B，C とおくと

図 4.1



$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{B}(2,\ 3),\ \mathrm{C}(5,\ 0)$$

となり，不等式をみたす領域は，図 4.1 の斜線部分となる (境界含む).
$k=\dfrac{1}{2}x+y$ とおくと

$$y=-\frac{1}{2}x+k \quad \cdots ①$$

①は y 切片 k，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線である.
よって，①が斜線部分との共有点をもつような k の範囲を調べる.
図 4.1 より，点 B を通るときから，点 A を通るときまでなので

(i) 点 B を通るとき

$$k=\frac{1}{2}\cdot 2+3=4$$

(ii) 点 A を通るとき

$$k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0=\frac{1}{4}$$

よって求める k の最大値，最小値は

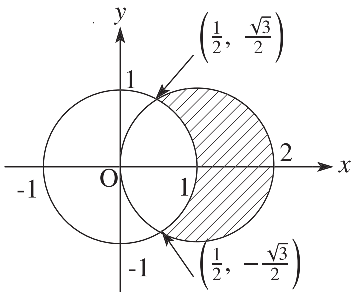
$$最大値\ 4,\quad 最小値\ \frac{1}{4} \qquad (答)$$

II. (1)

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 1 \\ x^2+y^2 \leqq 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 \geqq 1 \\ (x-1)^2+y^2 \leqq 1 \end{cases}$$

より，図 4.2 の斜線部分が求める領域である (境界は含む).

図 4.2



(2) この領域では，$x \neq -2$ であるので

$$k = \frac{y+2}{x+2} \iff y = k(x+2)-2$$

であり，これは $(-2,\ -2)$ を通る傾き k の直線である．以下，この直線を ℓ とする.

ℓ が円 $(x-1)^2+y^2=1$ に接するとき

$$\begin{aligned} &x^2+\{k(x+2)-2\}^2-2x=0 \\ &x^2+k^2(x+2)^2-4k(x+2)+4-2x=0 \\ \therefore\ &(1+k^2)x^2+2(2k^2-2k-1)x+4k^2-8k+4=0 \end{aligned}$$

判別式 D をとると

$$\begin{aligned} D/4 &= (2k^2-2k-1)^2-(k^2+1)(4k^2-8k+4) \\ &= -8k^2+12k-3 = 0 \end{aligned}$$

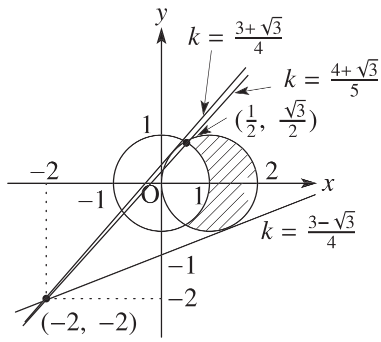
$$\therefore \quad k = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$$

また，ℓ が $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通るとき

$$k = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2}{\dfrac{1}{2}+2} = \frac{4+\sqrt{3}}{5}$$

であるから，ℓ と (1) の領域の位置関係は図 4.3 のようになる.

図 4.3



よって

$$\text{最大値}: \frac{4+\sqrt{3}}{5} \qquad \text{最小値}: \frac{3-\sqrt{3}}{4} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 与式を同値変形して

$$(\text{与式}) \iff (x-t)^2+(y-t)^2=2t^2-at+4 \ \cdots ①$$

任意の実数 t について C が円となるためには，任意の実数 t について①の右辺が正となることが必要十分条件である．

すなわち，t の 2 次方程式 $2t^2-at+4=0$ の判別式を D とすると，求める条件は

$$D=a^2-32<0$$

$$\therefore \quad -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2} \qquad (\text{答})$$

(2) $a=4$ のとき

$$(\text{与式}) \iff x^2+y^2-4-2t(x+y-2)=0$$

(1) より，任意の t について C は円となるから，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ が求める領域内の点であるとすると

$$\text{ある実数 } t_0>0 \text{ が存在して } X^2+Y^2-4-2t_0(X+Y-2)=0 \ \cdots (\#)$$

(i) $X+Y-2=0$ のとき

$X^2+Y^2-4=0$ が必要．逆にこのとき，任意の $t_0\ (>0)$ について (#) をみたす．

よって，求める条件は

$$X^2+Y^2-4=0$$

このとき

$$X^2+(-X+2)^2-4=0$$
$$\therefore \quad X^2-2X=0$$
$$\therefore \quad X=0,\ 2$$

すなわち

$$(X,\ Y)=(2,\ 0),\ (0,\ 2)$$

(ii) $X+Y-2\neq 0$ のとき

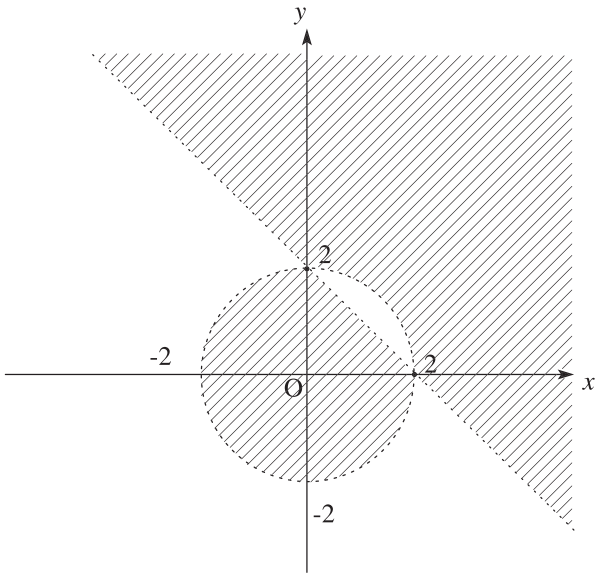
$t_0>0$ より，求める条件は

$$t_0=\frac{X^2+Y^2-4}{2(X+Y-2)}>0$$
$$\therefore \quad (X^2+Y^2-4)(X+Y-2)>0$$
$$\therefore \quad \begin{cases} X^2+Y^2>4 \\ X+Y>2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} X^2+Y^2<4 \\ X+Y<2 \end{cases}$$

以上より，求める領域は

$$(x,\ y)=(2,\ 0),\ (0,\ 2) \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2+y^2>4 \\ x+y>2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2+y^2<4 \\ x+y<2 \end{cases}$$

図示すると下図の斜線部分．ただし，境界は点 $(2,\ 0)$, $(0,\ 2)$ のみ含む．



(3) $a = 6$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{与式}) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4 - 2t(x + y - 3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x - t)^2 + (y - t)^2 = 2t^2 - 6t + 4\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}2t^2 - 6t + 4 > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2(t - 1)(t - 2) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad t < 1,\ 2 < t\end{aligned}$$

ここで，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ が求める領域内の点であるとすると

ある実数 $0 < t_0 < 1,\ 2 < t_0$が存在して $X^2 + Y^2 - 4 - 2t_0(X + Y - 3) = 0 \ \cdots$ (b)

(i) $X + Y - 3 = 0$ のとき

$X^2 + Y^2 - 4 = 0$ が必要．しかしこのとき

$$\begin{aligned}&X^2 + Y^2 - 4 = 0 \\ \therefore \quad &X^2 + (-X + 3)^2 - 4 = 0 \\ \therefore \quad &2X^2 - 6X + 5 = 0\end{aligned}$$

であり，X の 2 次方程式 $2X^2 - 6X + 5 = 0$ の判別式を D とすると

$$D/4 = 3^2 - 2 \cdot 5 = -1 < 0$$

より X は実数でないので，不適．

(ii) $X + Y - 3 \neq 0$ のとき

$0 < t_0 < 1,\ 2 < t_0$ より

$$0 < \frac{X^2 + Y^2 - 4}{2(X + Y - 3)} < 1,\ 2 < \frac{X^2 + Y^2 - 4}{2(X + Y - 3)}$$

以下，$X + Y - 3$ の正負によって場合を分ける．

(a) $X+Y-3>0$ のとき

$$0<X^2+Y^2-4<2(X+Y-3),\ X^2+Y^2-4>4(X+Y-3)$$

$$\therefore\quad \begin{cases} X^2+Y^2>4 \\ (X-1)^2+(Y-1)^2<0 \end{cases} \quad \text{または} \quad (X-2)^2+(Y-2)^2>0$$

$$\therefore\quad (X-2)^2+(Y-2)^2>0$$

(b) $X+Y-3<0$ のとき

$$0>X^2+Y^2-4>2(X+Y-3),\ X^2+Y^2-4<4(X+Y-3)$$

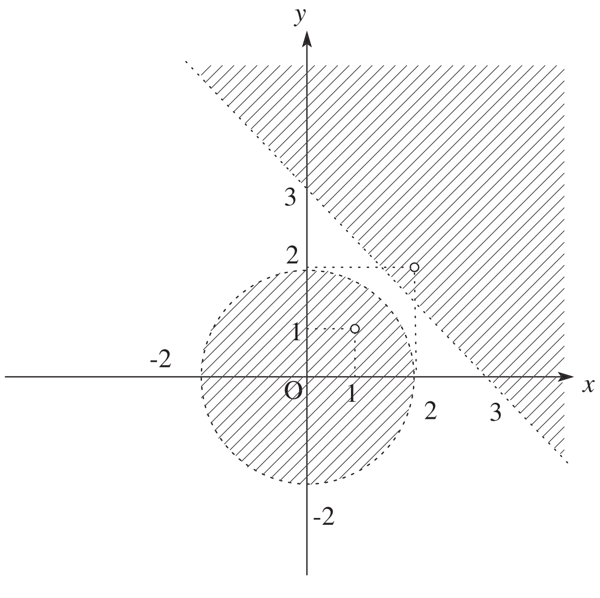
$$\therefore\quad \begin{cases} X^2+Y^2<4 \\ (X-1)^2+(Y-1)^2>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad (X-2)^2+(Y-2)^2<0$$

$$\therefore\quad \begin{cases} X^2+Y^2<4 \\ (X-1)^2+(Y-1)^2>0 \end{cases}$$

以上より，求める領域は

$$\begin{cases} x+y-3>0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+y-3<0 \\ x^2+y^2<4 \\ (x-1)^2+(y-1)^2>0 \end{cases}$$

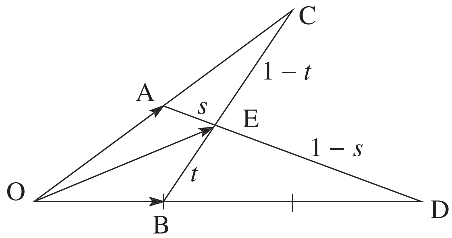
図示すると下図の斜線部分．ただし，境界は含まず，また，点 (1, 1), (2, 2) を除く．



問題

【1】AE : ED $= s : 1 - s$, BE : EC $= t : 1 - t$ とおく.

図 5.1



点 E は線分 AD 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OD}} \\ &= (1-s)\vec{a} + 3s\vec{b}\end{aligned}$$

また，点 E は線分 BC 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= 2t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

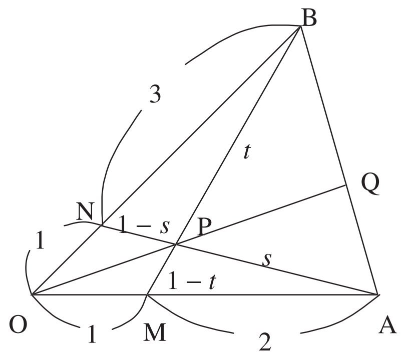
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから

$$\begin{cases} 1 - s = 2t \\ 3s = 1 - t \end{cases} \quad \therefore \quad s = \frac{1}{5},\ t = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) BP : PM = t : $(1-t)$, AP : PN = s : $(1-s)$ とおく.

図 5.2



点 P は線分 BM 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OM} + (1-t)\overrightarrow{OB}\\ &= \frac{t}{3}\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また，点 P は線分 AN 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{ON} + (1-s)\overrightarrow{OA}\\ &= \frac{s}{4}\overrightarrow{OB} + (1-s)\overrightarrow{OA} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

① − ②より

$$\left(\frac{t}{3} + s - 1\right)\overrightarrow{OA} + \left(1 - t - \frac{s}{4}\right)\overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

ここで，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{t}{3} + s - 1 = 0 \quad かつ \quad 1 - t - \frac{s}{4} = 0$$

$$\therefore \quad s = \frac{8}{11},\ t = \frac{9}{11}$$

よって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{11}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{11}\overrightarrow{OB} \qquad (答)$$

(2) O，P，Q は同一直線上にあることから

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP} \quad (k \text{ は実数})$$

と表すことができる．これに (1) の結果を代入すると

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{11}k\overrightarrow{OA} + \frac{2}{11}k\overrightarrow{OB} \quad \cdots ③$$

ここで，点 Q は直線 AB 上にあるから

$$\frac{3}{11}k + \frac{2}{11}k = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{11}{5}$$

これを③に代入すると

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 与式より

$$-2\overrightarrow{AO} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) + 4(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{9}(3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}) = \frac{7}{9} \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{7}$$

$\overrightarrow{AP} = \dfrac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{7}$ とすると，P は BC 上にあるので OA と BC の交点である．

P は線分 BC を 4 : 3 に内分する．　(答)

(2) $2\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}$ より

$$4 = |3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC}|^2 = 9 + 16 + 24\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{7}{8}$$

よって

$$\triangle OBC = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{16} \qquad \text{(答)}$$

(3) (1) より，$\overrightarrow{AP} = \dfrac{9}{7}\overrightarrow{AO} = -\dfrac{9}{7}\overrightarrow{OA}$ なので

$$|\overrightarrow{AP}| = \left|-\frac{9}{7}\overrightarrow{OA}\right| = \frac{9}{7} \qquad \text{(答)}$$

また

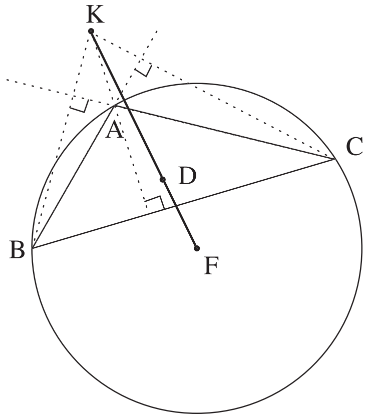
$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|^2 = 1 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 1 = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{15}{4}$$

よって

$$|\overrightarrow{BC}| = \frac{\sqrt{15}}{2} \qquad \text{(答)}$$

【4】$\overrightarrow{\mathrm{FK}} = 3\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ をみたす点 K を考える (図 5.3). これが点 E と一致すること，すなわち AK ⊥ BC，BK ⊥ CA を示せば十分.

図 5.3



D は重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{FA}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}} + \overrightarrow{\mathrm{FC}})$$

F は外心であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{FA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{FB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{FC}}|$$

$\overrightarrow{\mathrm{FK}} = 3\overrightarrow{\mathrm{FD}} = \overrightarrow{\mathrm{FA}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}} + \overrightarrow{\mathrm{FC}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{FK}} - \overrightarrow{\mathrm{FA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{FC}} - \overrightarrow{\mathrm{FB}}) \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{FB}} + \overrightarrow{\mathrm{FC}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{FC}} - \overrightarrow{\mathrm{FB}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{FC}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{FB}}|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{BK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$ より

$$\mathrm{AK} \perp \mathrm{BC},\ \mathrm{BK} \perp \mathrm{CA}$$

ゆえに，D は EF を 2 : 1 に内分する. 〔証明終〕

＜別解＞

$\overrightarrow{\mathrm{EK}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ をみたす点 K を考える.

これが点 F と一致すること，すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{KA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{KB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{KC}}|$ を示せば十分.

D は重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{ED}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{EK}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{ED}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}})$$

また

$$|\overrightarrow{\mathrm{KA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{KB}}|^2 = (\overrightarrow{\mathrm{KA}} + \overrightarrow{\mathrm{KB}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{KA}} - \overrightarrow{\mathrm{KB}}) = (\overrightarrow{\mathrm{KA}} + \overrightarrow{\mathrm{KB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

さらに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{KA}} + \overrightarrow{\mathrm{KB}} &= \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{EK}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} - 2 \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{EA}} + \overrightarrow{\mathrm{EB}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}}) \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{EC}}\end{aligned}$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{KA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{KB}}|^2 = -\overrightarrow{\mathrm{EC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} = 0 \quad (\because\ \text{E は垂心より，EC} \perp \text{BA})$$

$$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{KA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{KB}}|$$

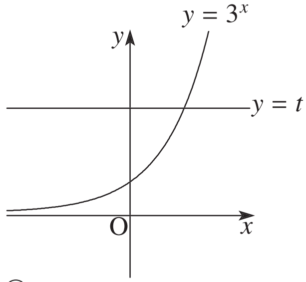
同様に

$$|\overrightarrow{\mathrm{KB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{KC}}| \quad \therefore |\overrightarrow{\mathrm{KA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{KB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{KC}}|$$

〔証明終〕

添削課題

【1】 $3^x = t$ とおく. 右図より, $0 < t$ のとき x が 1 つ対応し, $t \leqq 0$ のときには x は存在しない. $\cdots\cdots(*)$



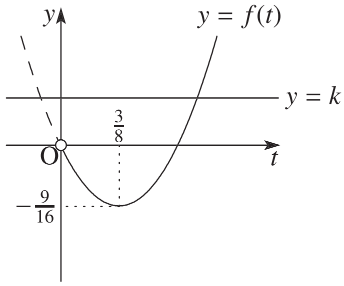
与えられた方程式を, $3^x = t$ を用いて t の方程式とすると

$$
\begin{aligned}
& 4 \cdot 9^x - 3^{x+1} - k = 0 \\
\iff\quad & 4 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - k = 0 \\
\iff\quad & 4t^2 - 3t - k = 0 \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

$(*)$ より, 題意は, t の方程式①が $0 < t$ の範囲にもつ解の個数を求めるのと同値である. また, 方程式 ① の解は, 放物線 $y = f(t) = 4t^2 - 3t$ と直線 $y = k$ の共有点の t 座標である.

$$f(t) = 4\left(t - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

より, $y = f(t)$ のグラフは右図のようになる.



したがって, 求める答え ($0 < t$ における交点の数) は,

$$
\begin{cases}
k \geqq 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\
-\dfrac{9}{16} < k < 0 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\
k = -\dfrac{9}{16} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\
k < -\dfrac{9}{16} \text{ のとき} & 0 \text{ 個}
\end{cases}
\quad \text{(答)}
$$

M2JS/M2J
高２選抜東大数学
高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	