M2TK

春期講習

解答

Z会東大進学教室

高 2 難関大数学 K

問題

【1】 $$y = f(x) = x^2 - 2ax$$
$$= (x-a)^2 - a^2 \cdots\cdots ①$$

とおく．

(1) ① より，

$\boldsymbol{x = a}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-a^2}$ **(答)**

をとる．

(2) $y = f(x)$ は $x = a$ を軸にもつ下に凸の放物線だから，

(i) $a \leqq -1$ のとき，

$$m(a) = f(-1) = 1 + 2a$$

(ii) $-1 \leqq a \leqq 2$ のとき，

$$m(a) = f(a) = -a^2$$

(iii) $a \geqq 2$ のとき，

$$m(a) = f(2) = 4 - 4a$$

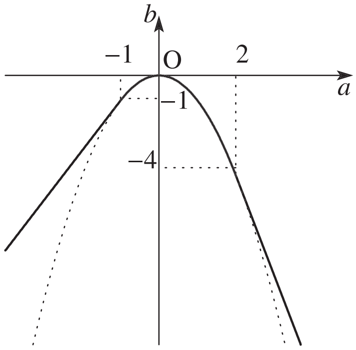
以上をまとめて，

$$m(a) = \begin{cases} \boldsymbol{1 + 2a} & \boldsymbol{(a \leqq -1)} \\ \boldsymbol{-a^2} & \boldsymbol{(-1 \leqq a \leqq 2)} \\ \boldsymbol{4 - 4a} & \boldsymbol{(a \geqq 2)} \end{cases} \quad \textbf{(答)}$$

(3) (2) の結果より，$b = m(a)$ のグラフは，右図の太線部分のようになる．よって，$m(a)$ が最大になるのは，

$\boldsymbol{a = 0}$ **のとき　(答)**

である．



《コメント》$b = -a^2$ と $b = 1 + 2a$ は

点 $(-1, -1)$ で接し，

$b = -a^2$ と $b = 4 - 4a$ は

点 $(2, -4)$ で接する

【2】

$$\left|x^2-x-6\right|=4x+c$$
$$\iff \left|x^2-x-6\right|-4x=c$$

より,

$$f(x)=\left|x^2-x-6\right|-4x$$

とおくと，与方程式の実数解の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=c$ との異なる共有点の個数に等しい.

ここで,

$$x^2-x-6 \geqq 0$$
$$\iff (x+2)(x-3) \geqq 0$$
$$\therefore \quad x \leqq -2,\ 3 \leqq x$$

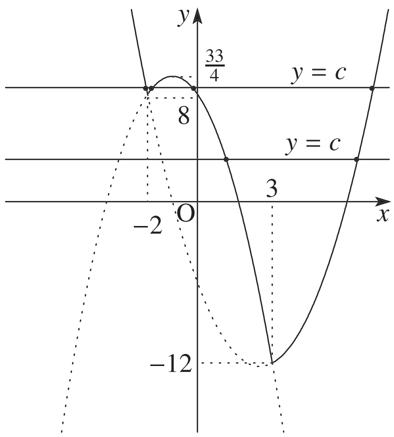
より,

(i) $x \leqq -2,\ 3 \leqq x$ のとき,

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= (x^2-x-6)-4x \\ &= x^2-5x-6 \\ &= \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{49}{4} \end{aligned}$$

(ii) $-2 \leqq x \leqq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= -(x^2-x-6)-4x \\ &= -x^2-3x+6 \\ &= -\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{33}{4} \end{aligned}$$



であるから，$y=f(x)$ と $y=c$ の位置関係は右上図のようになる.

したがって，求める共有点の個数，すなわち，方程式の異なる実数解の個数は,

$$\begin{cases} \boldsymbol{c < -12} \text{ のとき, } \mathbf{0} \text{ 個} \\ \boldsymbol{c = -12} \text{ のとき, } \mathbf{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{-12 < c < 8,\ \dfrac{33}{4} < c} \text{ のとき, } \mathbf{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{c = 8,\ \dfrac{33}{4}} \text{ のとき, } \mathbf{3} \text{ 個} \\ \boldsymbol{8 < c < \dfrac{33}{4}} \text{ のとき, } \mathbf{4} \text{ 個} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) (左辺)$= f(x)$ とおくと

$$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}a^2$$

であるから，題意を満たすための条件は，

$$\begin{cases} -\dfrac{9}{4}a^2 \leqq 0 & (\text{頂点の } y \text{ 座標}) & \cdots\cdots ① \\ -\dfrac{a}{2} \leqq 1 & (\text{軸}) & \cdots\cdots ② \\ f(1) \geqq 0 & (\text{端点の } y \text{ 座標}) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が同時に成り立つことである．よって，

①は常に成り立つ．

$$② \iff a \geqq -2 \cdots\cdots ②'$$

$$③ \iff -2a^2 + a + 1 \geqq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1 \cdots\cdots ③'$$

②$'$ と ③$'$ の共通部分をとって

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1} \qquad \textbf{(答)}$$

《コメント》本問においては，$f(0) = -2a^2 \leqq 0$ であるので，

$$f(1) \geqq 0$$

が満たされればよい．

(2) (左辺)$= f(x) = (x+1)^2 + a - 9$

とおく．$y = f(x)$ は，軸が $x = -1$ である放物線であるから，これが $-2 \leqq x \leqq 2$ で少なくとも 1 回は x 軸と共有点をもつためには，

$$\begin{cases} a - 9 \leqq 0 \\ f(2) = a \geqq 0 \end{cases}$$

が同時に成り立てばよい．この 2 式より，

$$\boldsymbol{0 \leqq a \leqq 9} \qquad \textbf{(答)}$$

【4】(1) 与式を平方完成すると

$$f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 3$$
$$= (x-m)^2 - m^2 + 2m + 3$$

であるから，$f(x)$ は $x = m$ で最小値 $-m^2 + 2m + 3$ をとる．
全ての実数 x で $f(x) > 0$ が成立するためには，$f(m) > 0$ が必要十分．すなわち

$$-m^2 + 2m + 3 > 0$$
$$(m+1)(m-3) < 0$$

これを解いて，

$\boldsymbol{-1 < m < 3}$　　(答)

(2) 題意より

「$0 \leqq x \leqq 4$ で $f(x) > 0$」
$\iff$「$0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最小値が正」

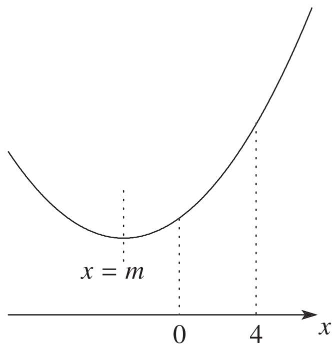
であるから，$y = f(x)$ の軸 $x = m$ の位置によって場合を分ける．

(i) $m \leqq 0$ のとき．
最小値は $x = 0$ のときであり，

$$f(0) > 0$$
$$2m + 3 > 0$$
$$\therefore \quad m > -\frac{3}{2}$$

$m \leqq 0$ とあわせて

$$-\frac{3}{2} < m \leqq 0 \cdots\cdots ①$$

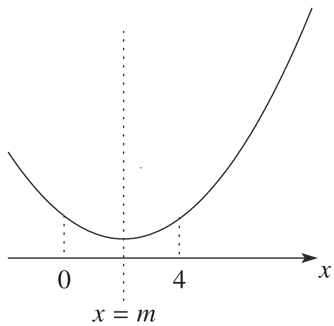


(ii) $0 < m < 4$ のとき．
最小値は $x = m$ のときであり，

$$f(m) > 0$$
$$-m^2 + 2m + 3 > 0$$
$$(m+1)(m-3) < 0$$
$$-1 < m < 3$$

$0 < m < 4$ とあわせて

$$0 < m < 3 \cdots\cdots ②$$

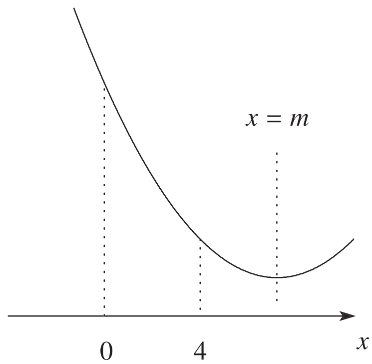


(iii) $m \geqq 4$ のとき

最小値は $x = 4$ のときであり，

$$f(4) > 0$$
$$19 - 6m > 0$$
$$m < \frac{19}{6}$$

$m \geqq 4$ であるから，これをみたす m は存在しない……③



以上，①，②，③ より

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2} < m < 3} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $C : y = \dfrac{9}{4}x^2 + ax + b$ が

(i) 点 $(0,\ 4)$ を通るから，

$$\boldsymbol{b = 4} \qquad \text{(答)}$$

(ii) さらに，点 $(2,\ k)$ を通るから，

$$k = \frac{9}{4}\cdot 2^2 + 2a + 4 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = \frac{k-13}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より，C の方程式は k を用いて

$$y = \frac{9}{4}x^2 + \frac{k-13}{2}x + 4$$

と表される．これが x 軸と接するとき，x の 2 次方程式

$$\frac{9}{4}x^2 + \frac{k-13}{2}x + 4 = 0$$

$$\iff \quad 9x^2 + 2(k-13)x + 16 = 0 \cdots ①$$

が重解をもつから，判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = (k-13)^2 - 9\cdot 16 = 0$$

$$(k-13)^2 = 12^2$$

$$k - 13 = \pm 12$$

すなわち

$$\boldsymbol{k = 1,\ 25} \qquad \text{(答)}$$

接点の x 座標は，これらを ① に代入して解いて，それぞれ

$$\boldsymbol{x = \frac{4}{3}\ (k = 1\ \text{のとき}),\ -\frac{4}{3}\ (k = 25\ \text{のとき})} \quad \text{(答)}$$

(3) ① の 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$ としたとき，

$$\beta - \alpha \geqq 2 \cdots\cdots ②$$

であればよい．② の両辺はともに明らかに正なので，両辺を平方して

$$(\beta - \alpha)^2 \geqq 4 \iff (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \geqq 4 \cdots\cdots ③$$

① において解と係数の関係から，

$$\alpha + \beta = -\frac{2(k-13)}{9}, \quad \alpha\beta = \frac{16}{9}$$

これらを ③ に代入して，

$$\frac{4(k-13)^2}{81} - \frac{4\cdot 16}{9} \geqq 4$$

$$\iff \quad (k-13)^2 - 9\cdot 16 \geqq 81$$

$$\iff \quad (k-13)^2 \geqq 9(9+16) = 9\cdot 25 = 3^2\cdot 5^2 = 15^2$$

$$\therefore \quad k - 13 \leqq -15,\ 15 \leqq k - 13$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{k \leqq -2,\ 28 \leqq k} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{A} &= \frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}\\ &= \frac{10^2+9^2-17^2}{2\cdot 9\cdot 10}\\ &= -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

ゆえに $0° < \angle\mathrm{A} < 180°$ であることから

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{A} &= \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{A}}\\ &= \boldsymbol{\frac{4}{5}} \quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$S = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{A} = \mathbf{36} \quad \textbf{(答)}$$

(3) $\triangle$ABC の外接円の半径を R とおくと,

$$\begin{aligned}2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{17}{\frac{4}{5}} &= \frac{85}{4}\\ \therefore \boldsymbol{R = \frac{85}{8}} &\quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

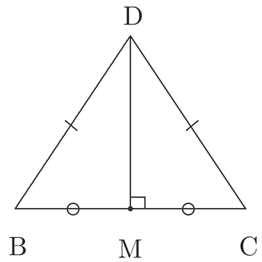
(4) $\triangle$ABC の内接円の半径を r とおくと,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{r}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB}) = \frac{r}{2}\cdot 36 &= 36\\ \therefore \boldsymbol{r = 2} &\quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1) $\triangle$ABC は $\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ の直角 2 等辺 3 角形なので,

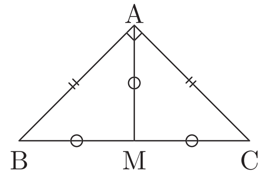
$$\begin{aligned}\mathrm{BC} &= \sqrt{3^2+3^2}\\ &= \mathbf{3\sqrt{2}} \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2) $\triangle$BCD は BD=CD の 2 等辺 3 角形なので，中線 DM は線分 BC の垂直 2 等分線である.
よって，$\mathrm{DM} \perp \mathrm{BC}$
これより,



$$\begin{aligned}\mathrm{DM} &= \sqrt{\mathrm{BD}^2 - \mathrm{BM}^2}\\ &= \sqrt{7 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{5}{2}}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}} \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

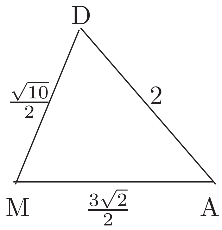
(3) $\triangle$ABC は AB=AC の直角 2 等辺 3 角形なので



$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{DAM} &= \frac{\mathrm{AM}^2 + \mathrm{AD}^2 - \mathrm{DM}^2}{2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AD}}\\ &= \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot 2}\\ &= \frac{6}{6\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$



$0^\circ < \angle\mathrm{DAM} < 180^\circ$ より，$\angle\mathrm{DAM} = \mathbf{45^\circ}$ **(答)**

(4) $\mathrm{AM} \perp \mathrm{BC}$, $\mathrm{DM} \perp \mathrm{BC}$ より,

$$\mathrm{BC} \perp \triangle\mathrm{AMD}$$

よって,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot\mathrm{BM}\cdot\triangle\mathrm{AMD}+\frac{1}{3}\cdot\mathrm{CM}\cdot\triangle\mathrm{AMD} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\mathrm{BM}\cdot\triangle\mathrm{AMD} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45^\circ \\ &= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \qquad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

【3】BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$

とし，△ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理より，

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

これと，余弦定理より，与えられた等式は，

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin C-\sin B}{2}=(\cos B-\cos C)\sin A\\
\Longleftrightarrow&\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2R}-\frac{b}{2R}\right)=\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\cdot\frac{a}{2R}\\
\Longleftrightarrow&bc(c-b)=b(c^2+a^2-b^2)-c(a^2+b^2-c^2)\\
\Longleftrightarrow&bc(c-b)=\{(c+b)^2-a^2\}(c-b)\\
\Longleftrightarrow&(c^2+bc+b^2-a^2)(c-b)=0
\end{aligned}$$

このとき，

(i) $c=b$ のとき，AB=AC の二等辺三角形

(ii) $c^2+bc+b^2-a^2=0$ のとき，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$$

よって，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ の三角形

以上から，△ABC は

AB = AC の二等辺三角形，または，∠BAC = 120°である三角形　(答)

【4】1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える (下図)

ここで，線分 AB の中点を M とすると，正四面体の対称性より，O から △ABC に下ろした垂線は，△OMC において O から辺 CM に下ろした垂線と一致する．よって，△ABC を底面としたときの正四面体 OABC の高さは，△OMC の O から辺 CM に下ろした垂線 OH の長さに等しい．

$\mathrm{OM}=\mathrm{CM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{OC}=1$ より，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{OMC} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

よって，$\sin\angle\mathrm{OMC}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

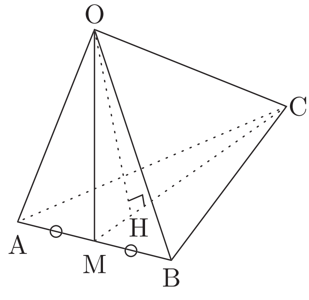
ゆえに，

$$\begin{aligned}\mathrm{OH} &= \mathrm{OM}\sin\angle\mathrm{OMC} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

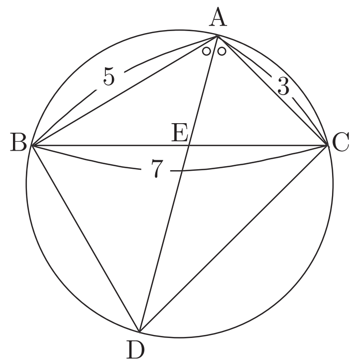
また，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

よって，正四面体 OABC の体積 V は

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}} \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$



【5】(1) 余弦定理より,



$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot5\cdot3} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{BAC} = \mathbf{120^\circ}\quad \textbf{(答)}$$

(2) 外接円の半径を R とすれば,正弦定理より

$$2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$$

より

$$2R = \frac{7}{\sin 120^\circ} = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{7\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}\quad \textbf{(答)}$$

(3) $\angle\mathrm{BAE} = \angle\mathrm{CAE} = 60^\circ$ より,$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を 2 通りで表すと,

$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ = \frac{1}{2}\cdot5\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin60^\circ + \frac{1}{2}\cdot3\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin60^\circ$$

$$15 = 8\mathrm{AE}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AE} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}}\quad \textbf{(答)}$$

(4) 条件と円周角の定理より

$$\angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{DAC} = 60^\circ$$
$$\angle\mathrm{DCB} = \angle\mathrm{DAB} = 60^\circ$$

であるから,$\triangle\mathrm{BDC}$ は 1 辺の長さが 7 の正三角形となる.また,BE:EC$= 5:3$ だから,

$$\mathrm{BE} = \frac{35}{8},\ \mathrm{CE} = \frac{21}{8}$$

ここで,$\triangle\mathrm{DCE}$ に余弦定理を用いると,

$$\mathrm{DE}^2 = \left(\frac{21}{8}\right)^2 + 7^2 - 2\cdot\frac{21}{8}\cdot7\cdot\cos60^\circ$$
$$= \frac{7^2}{8^2}(3^2+8^2-24)$$
$$= \frac{49^2}{8^2}$$
$$\therefore \mathrm{DE} = \frac{49}{8}$$

よって,

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AE} + \mathrm{ED} = \frac{15}{8} + \frac{49}{8} = \mathbf{8}\quad \textbf{(答)}$$

(5) $\triangle\mathrm{ABD}$ に余弦定理を用いて

$$\cos\angle\mathrm{DBA} = \frac{7^2+5^2-8^2}{2\cdot7\cdot5} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\quad \textbf{(答)}$$

【6】(1) (a) $\triangle$BCA に余弦定理を適用すると，

$$x^2 = \boldsymbol{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} \quad \cdots\cdots ①\textbf{(答)}$$

(b) $\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{CDA} = 180^\circ$ であることから，$\triangle$DAC に余弦定理を適用すると，

$$\begin{aligned} x^2 &= d^2 + c^2 - 2dc\cos(180^\circ - \theta) \\ &= \boldsymbol{d^2 + c^2 + 2dc\cos\theta} \quad \cdots\cdots ②\textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2) ① $\times\, dc +$ ② $\times\, ab$ より，

$$\begin{aligned} (ab+cd)x^2 &= dc(a^2+b^2) + ab(d^2+c^2) \\ &= (ad+bc)(ac+bd) \\ \therefore x &= \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} (= \mathrm{AC}) \end{aligned}$$

同様にして，BD を a，b，c，d を用いて表すと，

$$\mathrm{BD} = \sqrt{\frac{(dc+ab)(db+ac)}{da+bc}}$$

よって，

$$\begin{aligned} \mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD} &= \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}\cdot\frac{(dc+ab)(db+ac)}{da+bc}} \\ &= \sqrt{(ac+bd)^2} \\ &= ac+bd \quad (\ ac+bd > 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

ゆえに，題意は示された． 〔証明終〕

問題

【1】(1) 隣接する 2 整数 n, $n+1$ のいずれか一方は偶数であるから，その積 $n(n+1)$ も偶数である． 〔証明終〕

(2) 隣接する 3 整数 n, $n+1$, $n+2$ のうち少なくとも 1 つは偶数であり，いずれか 1 つは 3 の倍数であるから，その積 $n(n+1)(n+2)$ は偶数かつ 3 の倍数である．すなわち，6 の倍数である． 〔証明終〕

【2】(1)

$$\begin{array}{ccccccc} 100 & = & 31\times 3 & + & 7 & & \cdots\cdots① \\ 31 & = & 7\times 4 & + & 3 & & \cdots\cdots② \\ 7 & = & 3\times 2 & + & 1 & & \cdots\cdots③ \end{array}$$

より

$$\begin{aligned} 1 &= 7-3\times 2 \qquad (③\text{より}) \\ &= 7-(31-7\times 4)\times 2 \qquad (②\text{より}) \\ &= 9\times 7-2\times 31 \\ &= 9\times(100-3\times 31)-2\times 31 \qquad (①\text{より}) \\ &= 9\times 100-29\times 31 \end{aligned}$$

よって，求める整数の組の 1 つとして

$$(x,\ y)=\mathbf{(9,\ -29)} \qquad (\text{答})$$

を得る．

(2) (1) より

$$100\times 9=31\times 29+1$$

両辺に 19 をかけて

$$100\times 9\times 19=31\times 29\times 19+19$$

これより

100×171 を 31 で割った余りが 19 である

から，求める自然数の 1 つとして

$$x=\mathbf{171} \qquad (\text{答})$$

を得る．

【3】(1) 与式を変形して

$$y = \frac{7x-1}{5} = x + \frac{2x-1}{5}$$

x, y がともに整数であるから, $\dfrac{2x-1}{5}$ も整数であり, k を整数として

$$\frac{2x-1}{5} = k \qquad \therefore x = \frac{5k+1}{2}$$

とおける. これを上式に代入して

$$y = \frac{7k+1}{2}$$

よって, k が奇数のとき, 与えられた方程式をみたす整数 x, y が存在する.

$$(x,\ y) = \left(\boldsymbol{\frac{5k+1}{2},\ \frac{7k+1}{2}}\right) \quad (\boldsymbol{k}\ \text{は奇数}) \qquad \text{(答)}$$

(2) $23 \cdot 23 + 48 \cdot (-11) = 529 - 528 = 1$ である. そこで

$$23x + 48y = 1, \quad 23 \cdot 23 + 48 \cdot (-11) = 1$$

の辺々の差をとると

$$23(x-23) + 48(y+11) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 23(23-x) = 48(y+11)$$

そして, 23 と 48 は互いに素だから, $23 - x$ は 48 の倍数となる. よって

$$23 - x = 48k, \quad y + 11 = 23k \quad (k\ \text{は整数})$$

よって

$$x = -48k + 23, \quad y = 23k - 11 \quad (k\ \text{は整数}) \qquad \text{(答)}$$

【4】$m,\ n$ を整数とすると

$$11m+3=15n+7 \quad \Longleftrightarrow \quad 11m=15n+4 \quad \cdots ①$$

$(m,\ n)=(-1,\ -1)$ は①をみたすので

$$11\times(-1)=15\times(-1)+4 \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$11(m+1)=15(n+1) \quad \cdots ③$$

11 と 15 は互いに素だから，③をみたす最小の整数 m $(m \geqq 0)$ は

$$m+1=15 \quad \Longleftrightarrow \quad m=14$$

よって，求める整数は

$$11m+3=157 \qquad (答)$$

【5】(1) 題意より，

$$n+5=3p, \quad n+3=5q \ (p,\ q \text{ は自然数}) \quad \cdots ①$$

とおけるから，

$$\begin{cases} n+8=3p+3=3(p+1) \\ n+8=5q+5=5(q+1) \end{cases}$$

これより，

$n+8$ は 3 の倍数かつ 5 の倍数 $\Longleftrightarrow$ $n+8$ は 15 の倍数

したがって，$n+8$ を 15 で割った余りは 0 である．　(答)

(2) (1) の結果から，

$$n+8=15r \ (r \text{ は自然数})$$

とおけるから，求める最小の自然数 n は，

$$n+8=15\cdot 1 \qquad \therefore \quad n=7 \qquad (答)$$

【6】題意より,

$$\begin{cases} 5n+9=ka & \cdots ① \\ 11n+14=kb & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす正の整数 $k,\ a,\ b$ (ただし, $k>1$) が存在する. ①× 11 − ②× 5 より,

$$29=11ka-5kb \iff (11a-5b)k=29 \cdots ③$$

ここで 29 が素数であることに注意すると, $k>1$ より,

$$k=29 \quad \cdots ④$$

このとき, ③より,

$$11a-5b=1 \quad \cdots ⑤$$

これをみたす自然数 $a,\ b$ を小さいものから順に求めると,

$$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (6,\ 13),\ (11,\ 24),\ \cdots$$

ところで, 題意より $n \leqq 60$ であるから, ①④より,

$$29a=5n+9 \leqq 5\cdot 60+9=309 \qquad \therefore \quad a \leqq 10$$

したがって, 題意をみたす a の値は,

$$a=1,\ 6 \quad \cdots ⑥$$

④⑥を ①代入して, n の値を求めると,

$$n=4,\ 33 \qquad \text{(答)}$$

【7】$n^3,\ n+1$ の最大公約数を $d(\geqq 1)$ とおくと

$$n^3 = kd,\ n+1 = ld \quad (k,\ l \text{ は互いに素な整数})$$

と表すことができる. ここで, n^3 を $n+1$ で割ることにより

$$n^3 = (n+1)(n^2-n+1)-1$$

を得るので, 上式を代入すれば,

$$kd = ld(n^2-n+1)-1$$

$$\therefore \quad \{l(n^2-n+1)-k\}d = 1$$

そして, $l(n^2-n+1)-k,\ d$ はいずれも整数であるから

$$d = 1$$

すなわち, $n^3,\ n+1$ は互いに素である. （証明終）

問題

【1】(1) 12 人の生徒を A 組 6 人，B 組 3 人，C 組 3 人に分ける分け方は，

$${}_{12}C_6 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3$$

であり，B 組，C 組の入れかえを考えると，求める分け方は全部で

$$\frac{{}_{12}C_6 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3}{2!} = \mathbf{9240}$$ **通り**　**(答)**

(2) それぞれの生徒が，A 組に入るか，B 組に入るか 2 通りの選び方があるので，8 人の生徒の分け方は全部で

$$2^8 = 256$$ 通り

ある．ここで，全員が A 組に入る．または，全員が B 組に入る分け方は題意をみたさないので，求める分け方は全部で

$$256 - 2 = \mathbf{254}$$ **通り**　**(答)**

(3) みかんを a 個，りんごを b 個，なしを c 個取り出すとすると，a，b，c は非負整数で，

$$a + b + c = 7 \quad \cdots(*)$$

をみたす $(a,\ b,\ c)$ の組の総数を求めればよい．

$(*)$ をみたす $(a,\ b,\ c)$ の組の総数は，○ 7 個と｜ 2 本を一列に並べる並べ方の総数に等しいので，求める場合の数は

$$\frac{9!}{7!2!} = \mathbf{36}$$ **通り**　　**(答)**

【2】(1) 求める場合の数は，○ 8 個と｜ 2 本を並べる並べ方と等しいので，

$$\frac{10!}{8!2!} = \mathbf{45} \quad \textbf{(答)}$$

(2) $x \leqq y \leqq z$ より，

$$8 = x + y + z \geqq x + x + x = 3x$$

よって，$x \leqq \dfrac{8}{3}$ であるので，$x = 0,\ 1,\ 2$

(i) $x = 0$ のとき，$y + z = 8$ より，

$$(y,\ z) = (0,\ 8),\ (1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4)$$

の 5 通り

(ii) $x = 1$ のとき，$y + z = 7$ より，

$$(y,\ z) = (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)$$

の 3 通り．

(iii) $x = 2$ のとき，$y + z = 6$ より，

$$(y,\ z) = (2,\ 4),\ (3,\ 3)$$

の 2 通り．

以上より，求める非負整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の総数は

$$5 + 3 + 2 = \mathbf{10} \quad \textbf{(答)}$$

【3】(1) 目の和の出方は右の表 1 の通りである.
この 36 通りは同様に確からしいので，求める確率は,

$$\mathbf{\frac{5}{36}}\quad \textbf{(答)}$$

小＼大	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

表 1

(2) 同様に右の表 1 より,

$$\frac{10}{36} = \mathbf{\frac{5}{18}}\quad \textbf{(答)}$$

(3) 差の絶対値の出方は右の表 2 の通りである.
この 36 通りは同様に確からしいので，求める確率は,

$$\frac{24}{36} = \mathbf{\frac{2}{3}}\quad \textbf{(答)}$$

小＼大	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

表 2

(4) 目の積の出方は右の表 3 の通りである.
この 36 通りは同様に確からしいので，求める確率は,

$$\mathbf{\frac{19}{36}}\quad \textbf{(答)}$$

小＼大	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

表 3

【4】(1) 箱 A と箱 B からのカードの選び方は 20×25 通りで，それらは同様に確からしい．
また，そのうちで，箱 A と箱 B から取り出される数字が同じになるのは，(A，B)= (1，1)，(2，2)，……(20，20) の 20 通りである．
ゆえに，求める確率は，

$$\frac{20}{20 \times 25} = \mathbf{\frac{1}{25}} \quad \textbf{(答)}$$

(2) 積が 3 の倍数になるためには，3 の倍数のカードが少なくとも 1 枚出ればよい．この余事象は，2 枚のカードのいずれも 3 の倍数でないことである．ここで

箱 A に入っている 3 の倍数のカードは，3，6，9，12，15，18 の 6 枚
箱 B に入っている 3 の倍数のカードは，3，6，9，12，15，18，21，24 の 8 枚

である．
よって，求める確率は，

$$\begin{aligned}1-&\frac{(20-6)\times(25-8)}{20\times 25}\\ &= 1-\frac{14\times 17}{20\times 25}\\ &= \frac{250-119}{250}\\ &= \mathbf{\frac{131}{250}} \quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(3) 積が 4 の倍数になるのは．
(i) 4 の倍数のカードが少なくとも 1 枚出る
(ii) 4 の倍数でない偶数のカードが 2 枚出る
のいずれかの場合である．(i) が起こる確率は，(2) 同様余事象を考えて，

$$\begin{aligned}1-&\frac{(20-5)\times(25-6)}{20\times 25}\\ &= 1-\frac{15\times 19}{20\times 25}\\ &= \frac{100-57}{100} = \frac{43}{100}\end{aligned}$$

(ii) が起こる確率は，箱 A，箱 B に入っている 4 の倍数でない偶数のカードの枚数を考えることにより，

$$\frac{5\times 6}{20\times 25} = \frac{3}{50}$$

(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{43}{100} + \frac{3}{50} = \mathbf{\frac{49}{100}} \quad \textbf{(答)}$$

【5】(1) さいころを 5 回投げたとき，3 の倍数の目が n 回出た $(0 \leqq n \leqq 5)$ とすると，3 の倍数ではない目は $5-n$ 回出るので，点 P の到達する座標は

$$(n, 2(5-n))$$

である．これが $(4, 2)$ と一致すればよく

$$\begin{cases} 4 = n \\ 2 = 2(5-n) \end{cases}$$

より，$n = 4$ のとき，点 $(4, 2)$ に到達する．
さいころを 1 回投げて 3 の倍数の目が出る確率は $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ であることより，求める確率は

$${}_5\mathrm{C}_4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{10}{243}} \qquad \text{（答）}$$

(2) (1) において $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ のとき，点 P の到達する座標は，それぞれ

$$(0, 10),\ (1, 8),\ (2, 6),\ (3, 4),\ (4, 2),\ (5, 0)$$

であり，下図により題意を満たすのは

$$(0, 10),\ (1, 8),\ (2, 6),\ (3, 4)$$

に到達する場合である．
この余事象を考えると，求める確率は

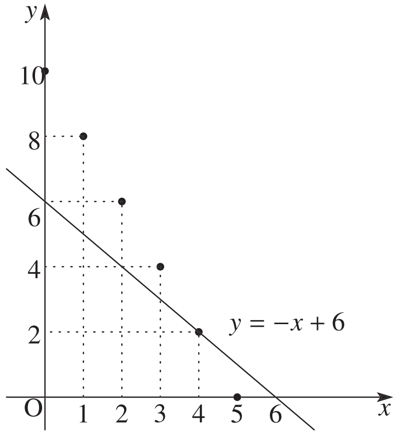
$$1 - ((4, 2) \text{ または } (5, 0) \text{ に到達する確率})$$

となり，点 $(5, 0)$ に到達する確率は，さいころを 5 回ふって，5 回とも 3 の倍数の目が出る確率に等しく，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

であり，(1) の結果も合わせると，求める確率は

$$1 - \left(\frac{10}{243} + \frac{1}{243}\right) = \boldsymbol{\frac{232}{243}} \qquad \text{（答）}$$



【6】(1) 出た目全てが 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかであればよいので,

$$(\text{求める確率})=\left(\frac{5}{6}\right)^4=\mathbf{\frac{625}{1296}}\quad\textbf{(答)}$$

(2) 出た目全てが 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかである場合から, 出た目全てが 1, 2, 3, 4 である場合を引けばよいので,

$$(\text{求める確率})=\left(\frac{5}{6}\right)^4-\left(\frac{4}{6}\right)^4$$
$$=\frac{625-256}{1296}=\mathbf{\frac{41}{144}}\quad\textbf{(答)}$$

(3) 出た目全てが 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである場合から, 出た目全てが 3, 4, 5, 6 である場合を引けばよいので,

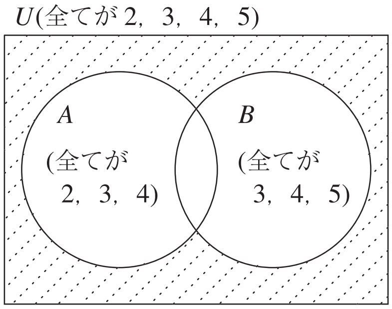
$$(\text{求める確率})=\left(\frac{5}{6}\right)^4-\left(\frac{4}{6}\right)^4$$
$$=\frac{625-256}{1296}=\mathbf{\frac{41}{144}}\quad\textbf{(答)}$$

(4) 全ての目が 2 以上 5 以下であり, 2 も 5 も少なくとも一個は出る確率を求めればよいので,

U : (出た目全てが 2, 3, 4, 5)
A : (出た目全てが 2, 3, 4)
B : (出た目全てが 3, 4, 5)

として図示すれば, 求める確率は下図の点線部分にあたる. よって
(出た目全てが 2, 3, 4, 5 である確率) − {(出た目全てが 2, 3, 4 である確率)
+ (出た目全てが 3, 4, 5 である確率) − (出た目全てが 3, 4 である確率)}
より,

$$(\text{求める確率})=\left(\frac{4}{6}\right)^4-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^4+\left(\frac{3}{6}\right)^4-\left(\frac{2}{6}\right)^4\right\}$$
$$=\frac{256-81-81+16}{1296}$$
$$=\mathbf{\frac{55}{648}}\quad\textbf{(答)}$$



問題

【1】(1)

$$(3+2i)(x+yi)=12-5i$$
$$\Longleftrightarrow (3x-2y)+(2x+3y)i=12-5i$$

x，y は実数なので，

$$\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 2x+3y=-5 \end{cases}$$

これを連立して解けば，$\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ -3)}$ **(答)**

(2)

$$(i-1)x^2-(4i-3)x+(3i-2)=0$$
$$\Longleftrightarrow (-x^2+3x-2)+(x^2-4x+3)i=0$$

x は実数なので，

$$\begin{cases} -x^2+3x-2=0 \cdots\cdots ① \\ x^2-4x+3=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① の解は $x=1,\ 2$，② の解は $x=1,\ 3$ であるので，

①，② をともに満たす x の値は $\boldsymbol{x=1}$ **(答)**

【2】(1) $z=-1+\sqrt{3}i$, $\bar{z}=-1-\sqrt{3}i$ より,

$$z+\bar{z}=-2,\ z\bar{z}=(-1)^2+(\sqrt{3})^2=4$$

①
$$\begin{aligned} z^2+\bar{z}^2 &= (z+\bar{z})^2-2z\bar{z} \\ &= (-2)^2-2\cdot 4 \\ &= 4-8=\mathbf{-4} \quad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} z^3+\bar{z}^3 &= (z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z}) \\ &= (-2)^3-3\cdot 4\cdot(-2) \\ &= -8+24=\mathbf{16} \quad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} z^4+\bar{z}^4 &= (z^2+\bar{z}^2)^2-2\cdot(z\bar{z})^2 \\ &= (-4)^2-2\cdot 4^2 \\ &= 16-32=\mathbf{-16} \quad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2) $x^2-12x+k=0$ の 2 つの解を α, β とおくと,
解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=12 & \cdots\cdots(*) \\ \alpha\beta=k & \cdots\cdots(**) \end{cases}$$

① 2 つの解を α, $\alpha+2$ とおくと, $(*)$ より,

$$\alpha+(\alpha+2)=12$$
$$\therefore \quad \alpha=5$$

これを $(**)$ に代入して

$$\alpha(\alpha+2)=5\cdot 7=k$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{k=35} \quad \textbf{(答)}$$

② 2 つの解を α, α^2 とおくと, $(*)$ より,

$$\alpha+\alpha^2=12$$
$$\alpha^2+\alpha-12=0$$
$$(\alpha-3)(\alpha+4)=0$$
$$\therefore \quad \alpha=3,\ -4$$

(i) $\alpha=3$ のとき, これを $(**)$ に代入して

$$\alpha\cdot\alpha^2=3\cdot 9=k$$
$$\therefore \quad k=27$$

(ii) $\alpha=-4$ のとき, これを $(**)$ に代入して

$$\alpha\cdot\alpha^2=-4\cdot 16=k$$
$$\therefore \quad k=-64$$

(i), (ii) より, $\boldsymbol{k=27,\ -64}$ **(答)**

【3】(1) 与えられた方程式は $x = \pm 1$ なる解を持つので，

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 2x - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x-1)^3(x+1) = 0 \end{aligned}$$

よって

$\boldsymbol{x = \pm 1}$　（答）

(2) 与えられた方程式は $x = 5$ なる解をもつので，

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 4 \cdot 3 \cdot 2$$
$$(x-1)(x-2)(x-3) - 24 = 0$$
$$(x-5)(x^2 - x + 6) = 0$$

$x^2 - x + 6 = 0$ の解は，

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2} \end{aligned}$$

以上より，方程式の解は

$\boldsymbol{x = 5,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}}$　（答）

(3) $x = 0$ は方程式の解でないのは明らかなので，与えられた方程式を x^2 で割ると，

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0 \cdots (*) \end{aligned}$$

$(*)$ において，$t = x + \dfrac{1}{x}$ とすれば，

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \qquad \therefore \quad t = 3,\ -1$$

(i) $t = 3$ のとき，

$$\begin{aligned} & x + \frac{1}{x} = 3 \\ \Longleftrightarrow & x^2 - 3x + 1 = 0 \\ & x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

(ii) $t = -1$ のとき，

$$\begin{aligned} & x + \frac{1}{x} = -1 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + x + 1 = 0 \\ & x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，

$$\boldsymbol{x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}}\quad \textbf{(答)}$$

【4】条件より，$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots\cdots$ ①

(1) ① より，$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$

$$\therefore \quad \omega^3 - 1 = 0$$

$$\omega^3 = \mathbf{1}\quad \textbf{(答)}$$

(2)

$$1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2}$$

$$= \mathbf{0}\quad \textbf{(答)}$$

(3)

$$\omega^{20} = (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{10} = (\omega^3)^3 \cdot \omega = \omega$$

これより，

$$\omega^{20} + \omega^{10} + 1 = \omega^2 + \omega + 1$$

$$= \mathbf{0}\quad \textbf{(答)}$$

(4) $\omega^3 = 1$ より，ω^{2n}，ω^n のいずれも ω^2，ω，1 のいずれかに等しい．ここで，n を 3 で割ったときの余りが 0，1，2 である場合についてそれぞれ考える．

(i) $n = 3k$(k は正の整数) のとき

$$\omega^{2n} = \omega^{2\cdot 3k} = (\omega^3)^{2k} = 1$$

$$\omega^n = \omega^{3k} = (\omega^3)^k = 1$$

よって，$\omega^{2n} + \omega^n + 1 = 3$

(ii) $n = 3k + 1$(k は 0 以上の整数) のとき

$$\omega^{2n} = \omega^{2(3k+1)} = (\omega^3)^{2k} \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^n = \omega^{3k+1} = (\omega^3)^k \cdot \omega = \omega$$

よって，$\omega^{2n} + \omega^n + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$

(iii) $n = 3k + 2$(k は 0 以上の整数) のとき

$$\begin{aligned}\omega^{2n} = \omega^{2(3k+2)} &= (\omega^3)^{2k+1} \cdot \omega \\ &= \omega \\ \omega^n = \omega^{3k+2} &= (\omega^3)^k \cdot \omega^2 \\ &= \omega^2\end{aligned}$$

よって，　$\omega^{2n} + \omega^n + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$

(i)〜(iii) をまとめると，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n = 3k}\ (\boldsymbol{k}\ \text{は正の整数) のとき，}\mathbf{3} \\ \boldsymbol{n = 3k + 1},\ \boldsymbol{n = 3k + 2}\ (\boldsymbol{k}\ \text{は}\ \mathbf{0}\ \text{以上の整数) のとき，}\mathbf{0} \end{cases}$$ (答)

【5】(1) $x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$ の 3 つの解が α，β，γ であることから，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \mathbf{3} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \mathbf{-4} \\ \alpha\beta\gamma = \mathbf{-6} \end{cases}$$ **(答)**

(2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} &= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-4}{-6} = \mathbf{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$ **(答)**

(3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{-6} = \mathbf{\frac{13}{9}}\end{aligned}$$ **(答)**

【6】$x^2 = t$ とおくと ($t \geqq 0$)，与式は

$$t^2 - pt + p^2 - p - 2 = 0 \quad (t \geqq 0)$$

となる．

もとの方程式が 4 つの異なる実数解を持つためには，上の t の 2 次方程式が 2 つの異なる正の実数解を持たなくてはならない．

$f(t) = t^2 - pt + p^2 - p - 2$ とおくと，$f(t) = 0$ が $t > 0$ なる 2 つの異なる実数解を持つためには，

$$\begin{cases} \text{判別式} \quad D > 0 \\ f(0) > 0 \\ \text{軸} \quad t = \dfrac{p}{2} > 0 \end{cases}$$

であればよく，

(i) $D > 0$ より，

$$\begin{aligned} D &= (-p)^2 - 4(p^2 - p - 2) \\ &= -3p^2 + 4p + 8 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \ \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} < p < \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}$$

(ii) $f(0) > 0$ より，

$$\begin{aligned} f(0) &= p^2 - p - 2 \\ &= (p - 2)(p + 1) > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \ p < -1,\ 2 < p$$

(iii) 軸 $t = \dfrac{p}{2} > 0$ より，$p > 0$

(i)，(ii)，(iii) をともにみたす p の値の範囲は

$$\boldsymbol{2 < p < \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}} \qquad \text{（答）}$$

添削課題

【1】

$$2n^3-3n^2+n=n(n-1)(2n-1) \quad \cdots\cdots(*)$$

より

$n,\ n-1$ のいずれか一方は偶数である　……①

(i) $n=3m$ (ただし，m は整数) のとき

(∗) は 3 の倍数である．

(ii) $n=3m+1$ (ただし，m は整数) のとき

$$n-1=3m$$

より

(∗) は 3 の倍数である．

(iii) $n=3m+2$ (ただし，m は整数) のとき

$$2n-1=3(2m+1)$$

より

(∗) は 3 の倍数である．

(i), (ii), (iii) と ① より，(∗) は 2 の倍数かつ 3 の倍数であるから

$2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数である．　〔証明終〕

＜別解＞

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n&=n(n-1)(2n-1)\\&=n(n-1)\{(n+1)+(n-2)\}\\&=(n-1)n(n+1)+(n-2)(n-1)n\end{aligned}$$

より，連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数であることから

$2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数である．　〔証明終〕

M2TK

高２難関大数学Ｋ

Z-KAI

会員番号		氏　名	