M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

春期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

問題

【1】〔I〕

もし，任意の正整数 n について正整数 N が $f(n)$ を割り切るならば，N は特に $f(1), f(2), f(3)$ を割り切ることが必要である．

$f(1), f(2), f(3)$ の値を求めてみると，

$f(1) = 1 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2,$

$f(2) = 2 \cdot 3 \cdot 11,$

$f(3) = 3 \cdot 4 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$

となり，N がこれらを割り切るから，$f(n)$ のすべてを割り切る最大の正整数の必要条件として 6 を得る．

以下，$f(n)$ のすべてを割り切る最大の正整数が 6 であることが十分条件でもあることを示す．そのために，n を 6 で割った余りに着目して，正整数全体を 6 個のグループに分割する．k を負でない整数とする．

- $n = 6k$ のとき，明らかに $f(n)$ は 6 で割り切れる．
- $n = 6k+1$ のとき，
  $f(6k+1) = (6k+1)(6k+2)(12k+9) = 6(6k+1)(3k+1)(4k+3)$
  であるから，このとき $f(n)$ は 6 で割り切れる．
- $n = 6k+2$ のとき，
  $f(6k+2) = (6k+2)(6k+3)(12k+11) = 6(3k+1)(2k+1)(12k+11)$
  であるから，このときも成立．
- $n = 6k+3$ のとき，
  $f(6k+3) = (6k+3)(6k+4)(12k+13) = 6(2k+1)(3k+2)(12k+13)$
  であるから，成立．
- $n = 6k+4$ のとき，
  $f(6k+4) = (6k+4)(6k+5)(12k+15) = 6(3k+2)(6k+5)(4k+5)$
  であるから，成立．
- $n = 6k+5$ のとき，
  $f(6k+5) = (6k+5)(6k+6)(12k+17) = 6(6k+5)(k+1)(12k+17)$
  より成立．

したがって，任意の正整数 n について，$f(n)$ は 6 で割り切れることが示された．よって $f(n)$ のすべてを割り切る最大の正整数が 6 であることは題意の成立に十分でもある．

以上より求める最大の正整数は **6** である．　　(答)

〔II〕

$n=1$，2 の場合を調べると

$$\begin{aligned} a_1 =& 19+2=21=3\cdot 7, \\ a_2 =& 19^2-2^{8-3}=361-32=329=7\cdot 47 \end{aligned}$$

だから，7 以外は題意をみたさず

「7 で a_n をすべて割り切ること」 $\cdots\cdots(*)$

を示せば十分である．

ここで

$$\begin{aligned} a_n =& 19^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^{4n-3} \\ =& 19^n+(-1)^{n-1}\cdot 16^{n-1}\cdot 2 \\ =& (21-2)^n+(-1)^{n-1}\cdot (14+2)^{n-1}\cdot 2 \end{aligned}$$

であり，この第 1 項，第 2 項を，二項定理を用いて展開すれば，K，L をある正整数として

$$\begin{aligned} (21-2)^n &= 21^n+{}_n\mathrm{C}_1 21^{n-1}\cdot(-2)+{}_n\mathrm{C}_2 21^{n-2}\cdot(-2)^2 \\ &\quad +\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}21^2\cdot(-2)^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}21\cdot(-2)^{n-1}+(-2)^n \\ &= 21K+(-2)^n, \\ (14+2)^{n-1} &= 14^{n-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_1 14^{n-2}\cdot 2+{}_{n-1}\mathrm{C}_2 14^{n-3}\cdot 2^2 \\ &\quad +\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3}14^2\cdot 2^{n-3}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}14\cdot 2^{n-2}+2^{n-1} \\ &= 14L+2^{n-1} \end{aligned}$$

と表される．したがって

$$\begin{aligned} a_n =& 21K+(-2)^n+2\cdot(-1)^{n-1}(14L+2^{n-1}) \\ =& 21K+(-2)^n+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot 14L+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1} \\ =& 7\left\{3K+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot 2L\right\}+(-2)^n+2\cdot(-2)^{n-1} \\ =& 7\left\{3K+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot 2L\right\}+(-2)^n-(-2)\cdot(-2)^{n-1} \\ =& 7\left\{3K+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot 2L\right\}+(-2)^n-(-2)^n \\ =& 7\left\{3K+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot 2L\right\} \end{aligned}$$

これは 7 で割り切れる．よって $(*)$ は示された．

したがって，求める素数は

7 (答)

である．

【2】(1) 任意の整数 a は，整数 m を用いて $a=3m$ または $a=3m\pm1$ と表せる．

$a=3m$ のとき，$a^2=9m^2$となり，a^2 は 3 で割り切れる．$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

$a=3m\pm1$ のとき，$a^2=3(3m^2\pm2m)+1$ となり，

a^2 を 3 で割った余りは 1 となる．

以上より示された．　〔証明終〕

(2) a^2，b^2 は (1) より 3 で割った余りが 0 か 1 であるから，a^2+b^2 が 3 の倍数となるのは，a^2，b^2 がともに 3 の倍数のときである．

(1) の① より，a^2，b^2 が 3 の倍数のとき，a，b はともに 3 の倍数である．

以上より示された．　〔証明終〕

(3) $a^2+b^2=c^2$ ならば，(1) より，a^2+b^2 は 3 の倍数か，3 で割って余りは 1 である．

a^2+b^2 が 3 の倍数ならば，(2) より，a，b はともに 3 の倍数である．

a^2+b^2 が 3 で割って 1 余る数ならば, a^2，b^2 の片方が 3 で割って 1 余る数，もう片方が 3 の倍数である．

よって，(1) の①より，a, b のどちらかは 3 の倍数である．

以上より示された．　〔証明終〕

(4) a，b の偶奇の組み合わせで場合分けして考えることにする．

$a^2+b^2=c^2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

とすると

(i) a，b が偶数のとき

明らかに ab は 4 の整数倍

(ii) a，b の一方が偶数，他方が奇数のとき

② より，c^2 は奇数，すなわち，c は奇数であるから，p，q，r を自然数として，$a=2p$，$b=2q-1$，$c=2r-1$ とおける．これを ② に代入して

$$4(p^2+q^2-q)+1=4(r^2-r)+1,$$

$$\therefore\quad p^2+q^2-q=r^2-r,$$

$$\therefore\quad p^2=(r-q)(r+q-1).$$

$r-q$ と $r+q$ の偶奇は一致するから，$r-q$ と $r+q-1$ は一方が偶数，他方が奇数である．よって

$$p^2=(\text{偶数})\times(\text{奇数})=(\text{偶数})$$

であるから，p は偶数であり，$a=2p=2\times(\text{偶数})$ は 4 の整数倍である．したがって ab は 4 の整数倍である．

(iii) a，b が奇数のとき

② より，c^2 は偶数，すなわち，c は偶数だから，p，q，r を自然数として，$a=2p-1$，$b=2q-1$，$c=2r$ とおける．これを ② に代入して

$$4(p^2-p+q^2-q)+2=4r^2.$$

左辺は 4 の倍数ではなく，右辺は 4 の倍数であるから，上式をみたす p，q，r は存在しない．すなわち，題意をみたす a，b，c は存在しない．

(i)，(ii)，(iii) より題意は示された．　〔証明終〕

【3】〔I〕

(1) 与式は

$$xy-2x-3y+6=6 \iff (x-3)(y-2)=6$$

と変形できる．$x-3$ と $y-2$ は整数であり，その組は

$$(x-3,\ y-2)=\begin{cases}(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1),\\ (-1,\ -6),\ (-2,\ -3),\ (-3,\ -2),\ (-6,\ -1)\end{cases}$$

の 8 通りが考えられるから，求める $x,\ y$ の組は

$$(x,\ y)=\begin{cases}\mathbf{(4,\ 8),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (9,\ 3)}\\ \mathbf{(2,\ -4),\ (1,\ -1),\ (0,\ 0),\ (-3,\ 1)}\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式は

$$4xy-2x-2y-62=0 \iff 4xy-2x-2y+1=63 \iff (2x-1)(2y-1)=63$$

と変形できる．$2x-1,\ 2y-1$ は整数であり，その組は

$$(2x-1,\ 2y-1)=\begin{cases}(1,\ 63),\ (3,\ 21),\ (7,\ 9),\ (9,\ 7),\\ (21,\ 3),\ (63,\ 1),\ (-1,\ -63),\ (-3,\ -21),\\ (-7,\ -9),\ (-9,\ -7),\ (-21,\ -3),\ (-63,\ -1)\end{cases}$$

の 12 通りが考えられるから求める $x,\ y$ の組は

$$(x,\ y)=\begin{cases}\mathbf{(1,\ 32),\ (2,\ 11),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),}\\ \mathbf{(11,\ 2),\ (32,\ 1),\ (0,\ -31),\ (-1,\ -10),}\\ \mathbf{(-3,\ -4),\ (-4,\ -3),\ (-10,\ -1),\ (-31,\ 0)}\end{cases} \qquad \text{(答)}$$

〔II〕

与えられた条件式は，x, y, z について対称である．したがって，もし $(x,\ y,\ z)=(\alpha,\ \beta,\gamma)$ が条件をみたすならば，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を任意に並べ替えた 3 項列，例えば

$$(x,\ y,\ z)=(\beta,\alpha,\gamma)$$

も条件をみたす．

そこで，特に $x \geqq y \geqq z$ として，与式をみたす正整数 x, y, z を求める．

$x \geqq y \geqq z$ だから

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{z}$$

が成り立つ．よって

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=\frac{3}{z}, \qquad \therefore \quad \frac{5}{6} \leqq \frac{3}{z}$$

である．これより

$$z \leqq \frac{18}{5}$$

となるので

$$z=1,\ 2,\ 3.$$

(i) $z=1$ のとき，$\dfrac{1}{z}=1$ だから

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1>\frac{5}{6}$$

となり，不適．

(ii) $z=2$ のとき

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$$

となる．これを

$$(x-3)(y-3)=9$$

と変形すると，$x \geqq y \geqq z = 2$ より $x-3 \geqq y-3 \geqq -1$ なので

$(x-3,\ y-3) = (9,\ 1),\ (3,\ 3) \qquad \therefore \quad (x,\ y) = (12,\ 4),\ (6,\ 6)$

を得る．

(iii) $z = 3$ のとき

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

となる．これを

$(x-2)(y-2) = 4$

と変形すると，$x \geqq y \geqq z = 3$ より $x-2 \geqq y-2 \geqq 1$ なので

$(x-2,\ y-2) = (4,\ 1),\ (2,\ 2) \qquad \therefore \quad (x,\ y) = (6,\ 3),\ (4,\ 4)$

以上より $x \geqq y \geqq z$ のもとで，

$(x,\ y,\ z) = (12,\ 4,\ 2),\ (6,\ 6,\ 2),\ (6,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 3)$

を得る．よって求める 3 項列 $(x,\ y,\ z)$ の個数は，これらを任意に並べ替えてできる 3 項列の個数である．

それぞれ

- $(12,\ 4,\ 2)$ の並べ替えは $3! = 6$（個），
- $(6,\ 6,\ 2), (6,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 3)$ の並べ替えは，それぞれ $\dfrac{3!}{2} = 3$（個）である．

したがって，求める個数は

$6 + 3 \cdot 3 = \mathbf{15}$ **(個)** 　(答)

【4】 (1) 与えられた不定方程式を

$4m + 6n = 7 \quad \cdots\cdots①$

とする．整数 $m,\ n$ に対し，① の左辺は偶数だから，① をみたす整数 $m,\ n$ は存在しない．

〔証明終〕

(2) 同様に

$3m + 5n = 2 \quad \cdots\cdots②$

とすると，$(m,\ n) = (-1,\ 1)$ は

$3 \times (-1) + 5 \times 1 = 2 \quad \cdots\cdots③$

より，②をみたす．

ここで②と③の差を求めると

$3(m+1) + 5(n-1) = 0$

$\therefore \quad 3(m+1) = -5(n-1)$

であり，$m+1$ は 5 の倍数であるから，

$m+1 = 5k,\ n-1 = -3k$ (k は整数)

と表せる．よって，③のすべての整数解は，k を整数として

$(m,\ n) = \boldsymbol{(5k-1,\ -3k+1)}$ **(k は整数)** 　(答)

(3) $k \neq l$ のとき，

$1 \leqq k < l \leqq b-1 \quad \cdots\cdots④$

として考えてよい．④のもとで，

$1 \leqq l-k \leqq b-2$

だから，$l-k$ は b の倍数ではない．また，$a,\ b$ は互いに素だから，$a(l-k)$ も b の

倍数ではない．よって，ak，al を b で割った余りは異なるから

$r(k) \neq r(l)$　　〔証明終〕

(4) a，b は互いに素だから，$(b-1)$ 個の整数 $a \times 1$，$a \times 2$，$\cdots$，$a \times (b-1)$ はいずれも b の倍数ではない．よって b で割った余り $r(1)$，$r(2)$，$\cdots$，$r(b-1)$ はいずれも 0 ではない．

また，(3) より，これら $(b-1)$ 個の余りは互いに異なる．

よって，集合として，1，2，$\cdots$，$b-1$ 全体と一致する．したがって，$r(p)=1$，$1 \leqq p \leqq b-1$ をみたす整数 p があり，ap を b で割った商を q とすると，

$ap = bq + 1$　　　$\therefore$　$ap + b(-q) = 1$

が成り立つ．これより，

$am + bn = 1$

をみたす整数 m，n として，$m = p$，$n = -q$ が存在する．　　〔証明終〕

【5】(1) $$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^a=\boldsymbol{e^a}\qquad\text{(答)}$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}\right\}^{\frac{1}{a}}=\boldsymbol{e^{\frac{1}{a}}}\qquad\text{(答)}$$

(3) $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}\\&=\frac{1}{e}\cdot 1\\&=\boldsymbol{\frac{1}{e}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【6】(1)
$$\begin{aligned}&\sqrt{3x^2+4x+7}-(ax+b)\\=&\frac{3x^2+4x+7-(ax+b)^2}{\sqrt{3x^2+4x+7}+(ax+b)}\\=&\frac{(3-a^2)x^2+(4-2ab)x+7-b^2}{\sqrt{3x^2+4x+7}+ax+b}\\=&\frac{(3-a^2)x+(4-2ab)+\dfrac{7-b^2}{x}}{\sqrt{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}}\quad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

この式の $x\to\infty$ としたときの極限値が定数になるためには

$3-a^2=0$

が必要.

ここで，$a<0$ とすると与式の左辺は

$\infty+\infty$

で発散するから $a>0$ が必要.

よって

$a=\sqrt{3}$

このとき ① は

$$\frac{\left(4-2\sqrt{3}b\right)+\dfrac{7-b^2}{x}}{\sqrt{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}+\sqrt{3}+\dfrac{b}{x}}$$

だから，$x\to\infty$ とすると

$$\frac{4-2\sqrt{3}b}{2\sqrt{3}}$$

これが 0 に等しいから

$$4-2\sqrt{3}b=0\qquad\therefore\quad b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

このとき，確かに与式は成立する.

よって

$$\boldsymbol{a = \sqrt{3},\quad b = \frac{2\sqrt{3}}{3}} \qquad (答)$$

(2) $x \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos x \to 0$ だから，与式が成り立つには

$$\frac{\pi}{2}a + b = 0 \qquad \therefore\quad b = -\frac{\pi}{2}a$$

が必要.

このとき

$$\frac{ax+b}{\cos x} = a \cdot \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x} = -a \cdot \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

であり，$x \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \to 1$$

だから，与式より

$$-a = \frac{2}{3} \qquad \therefore\quad a = -\frac{2}{3},\quad b = \frac{\pi}{3}$$

このとき，確かに与式は成り立つ.

よって

$$\boldsymbol{a = -\frac{2}{3},\quad b = \frac{\pi}{3}} \qquad (答)$$

【7】 (1) $a_k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \sin\dfrac{2}{3}k\pi$ とおくと，$i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$a_{3i-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3i-2} \sin\left(2i - \frac{4}{3}\right)\pi \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{3i-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{i-1}$$

$$a_{3i-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3i-1} \sin\left(2i - \frac{2}{3}\right)\pi \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{3i-1} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{i-1}$$

$$a_{3i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3i} \sin 2i\pi \ = \ 0$$

よって，

$$S_{3m} = \sum_{k=1}^{3m} a_k \ = \ \sum_{i=1}^{m}(a_{3i-2} + a_{3i-1} + a_{3i})$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{i-1} - \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{i-1}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m}{1-\frac{1}{8}} \;=\; \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}} \qquad \text{(答)}$$

そして

$$S_{3m-1} = S_{3m} - a_{3m} \;=\; \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}} \qquad \text{(答)}$$

$$\begin{aligned} S_{3m-2} &= S_{3m-1} - a_{3m-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\} - \left\{-\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{7} + \left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^m \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{6\sqrt{3}}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) $\left|\frac{1}{8}\right| < 1$ であるから,

$$\lim_{m\to\infty} S_{3m} = \frac{\sqrt{3}}{7}, \quad \lim_{m\to\infty} S_{3m-1} = \frac{\sqrt{3}}{7}, \quad \lim_{m\to\infty} S_{3m-2} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{7}} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) $\alpha = \sqrt{\alpha+2} \cdots\cdots ①$ とすると

$$\alpha^2 = \alpha + 2 \iff \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$$\iff (\alpha+1)(\alpha-2) = 0$$

$\alpha = -1$ は ① を満たさないので

$\alpha = \mathbf{2}$ 　(答)

(2)

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - 2| &= \left|\sqrt{a_n+2} - \sqrt{2+2}\right| \\ &= \left|\frac{a_n - 2}{\sqrt{a_n+2}+\sqrt{2+2}}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}|a_n-2| \leqq \frac{1}{2}|a_n-2| \\ &(\because \quad \sqrt{a_n+2} > 0) \qquad \text{(証明終)} \end{aligned}$$

(3) (2) より

$$0 \leqq |a_n - 2| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 2| \to 0$$

よって，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - 2| = 0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2 \qquad \text{(証明終)}$$

【9】(1)

$$\begin{aligned}a_{n+3} &= 3a_{n+2} - 7a_{n+1}\\ &= 3(3a_{n+1} - 7a_n) - 7a_{n+1}\\ &= 2(a_{n+1} - 11a_n) + a_n\end{aligned}$$

よって，a_n と a_{n+3} の偶奇は一致する．

さらに，$a_1 = 1$，$a_2 = 3$ より，$a_3 = 3 \cdot 3 - 7 \cdot 1 = 2$ であるから，a_n が偶数になるのは，n が 3 の倍数のときに限ることが示された．　〔証明終〕

(2) a_n が 5 の倍数になる必要十分条件を求める．

$a_4 = -15$ から推測して，(1) と同様に，a_{n+4} を調べる．

$$\begin{aligned}a_{n+4} &= 3a_{n+3} - 7a_{n+2}\\ &= 3(3a_{n+2} - 7a_{n+1}) - 7a_{n+2}\\ &= 2a_{n+2} - 21a_{n+1}\\ &= 2(3a_{n+1} - 7a_n) - 21a_{n+1}\\ &= -15(a_{n+1} + a_n) + a_n\end{aligned}$$

よって，a_n と a_{n+4} を 5 で割った余りは一致する．

a_1，a_2，a_3，a_4 の中で 5 の倍数は a_4 のみである．

これは，a_n が 5 の倍数になるのは，n が 4 の倍数のときに限ることを示している．

これと (1) とより

a_n が 10 の倍数になる必要十分条件は，**n が 12 の倍数となること** である．

(答)

問題

【1】〔I〕(1) A，B，C に入る学生をこの順に決めていけばよいから
$_9C_3 \times {}_6C_3 = \mathbf{1680}$**(通り)**　　(答)

(2) (1) の場合で組の区切りをなくせばよいから
$1680 \div 3! = \mathbf{280}$**(通り)**　　(答)

(3) はじめに組を区別して分け，そのあとで 2 人の組の区別をなくせばよいから
$\dfrac{_9C_2 \times {}_7C_2}{2!} = \mathbf{378}$**(通り)**　　(答)

〔II〕(1) 品物 1 個につきもらえる人は 3 通りであるから
$3^8 = \mathbf{6561}$**(通り)**　　(答)

(2) 1 人が全部もらうときは，A，B，C の誰がもらうかで 3 通り．また，A，B の 2 人だけが全部もらうとき，品物の行き先は 1 個につき 2 通りであるが，1 人が独占する場合を除くので，$2^8 - 2$(通り)．B，C の 2 人だけ，C，A の 2 人だけの場合も同様である．

よって，(1) から上のすべてを除いた
$3^8 - 3 - 3(2^8 - 2) = \mathbf{5796}$**(通り)**　　(答)

【2】z，y，x の順に値を決めていくと，

$$(z,\ y,\ x) = \begin{cases} (4,\ 2,\ 4),\ (4,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 2),\ (4,\ 5,\ 1),\ (4,\ 6,\ 0), \\ (5,\ 2,\ 3),\ (5,\ 3,\ 2),\ (5,\ 4,\ 1),\ (5,\ 5,\ 0), \\ (6,\ 2,\ 2),\ (6,\ 3,\ 1),\ (6,\ 4,\ 0), \\ (7,\ 2,\ 1),\ (7,\ 3,\ 0), \\ (8,\ 2,\ 0) \end{cases}$$

の **15個**　　(答)

＜別解＞

$y = Y + 2$，$z = Z + 4$ とおくと条件式は，
$x + Y + Z = 4$，$x \geqq 0$，$Y \geqq 0$，$Z \geqq 0$

となる．これは，4 つの同じものと 2 本の仕切り線の順列の数に等しいから，
$\dfrac{6!}{4!2!} = \mathbf{15}$**(個)**　　(答)

【3】10 枚のカードから同時に 3 枚とり出す方法は $_{10}C_3 = 120$(通り) で，これらは同様に確からしい．

順位 2 のカードの番号が k 以下の確率を $P(k)$ で表す．

(1) 順位 2 のカードの番号が k 以下であるのは

(i)　1 枚が k より大きく，他の 2 枚が k 以下

(ii)　3 枚とも k 以下

の 2 つの場合がある．

$P(1) = 0$ であることは明らかであり，また，順位 2 のカードが 2 であるのは，3 以

上のカードから 1 枚と，1，2 のカードをとり出したときであるから，

$$P(2)=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

次に，$k \geqq 3$ のときは，(i)，(ii) の場合があるから

$$P(k)=\frac{(10-k)\cdot {}_k\mathrm{C}_2+{}_k\mathrm{C}_3}{120}=\frac{k(k-1)(14-k)}{360}$$

これは，$k=1$，2 を代入しても，$P(1)$，$P(2)$ と一致するので

$$P(k)=\boldsymbol{\frac{k(k-1)(14-k)}{360}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $k \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}P(k)-P(k-1)&=\frac{k(k-1)(14-k)}{360}-\frac{(k-1)(k-2)(15-k)}{360}\\&=\frac{(k-1)(10-k)}{120}\\&=-\frac{k^2-11k+10}{120}\\&=-\frac{1}{120}\left\{\left(k-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{81}{4}\right\}\end{aligned}$$

また，$P(1)=0$ であるから，確率が最大となるのは，$k=\mathbf{5,\ 6}$ (答)

【4】(1) 1 回の試行後に袋 A の赤玉の個数が変わらないのは，袋 A と袋 B から取り出される玉の色が同じときであるから

$$p_1=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad \text{(答)}$$

1 回の試行後に袋 A の赤玉の個数が 1 個増えるのは，袋 A から白玉を取り出し，袋 B から赤玉を取り出すときであるから

$$q_1=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{6}} \qquad \text{(答)}$$

$p_1+q_1+r_1=1$ より

$$r_1=1-p_1-q_1=\boldsymbol{\frac{1}{6}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $(n+1)$ 回の試行が終わった後，袋 A 内の赤玉が 1 個の場合は次の 3 つである．

(i) n 回目終了時点で，赤玉が 1 個で $(n+1)$ 回目に赤玉の個数が変わらない．

(ii) n 回目終了時点で，赤玉が 2 個で $(n+1)$ 回目に赤玉が 1 個減る．

(iii) n 回目終了時点で，赤玉が 0 個で $(n+1)$ 回目に赤玉が 1 個増える．

よって，

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{2}{3}+q_n\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+r_n\times\frac{3}{3}\times\frac{2}{4}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n} \qquad \text{(答)}$$

p_{n+1} の場合と同様に考えて

$$q_{n+1}=p_n\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+q_n\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{4}\right)+r_n\times 0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{q_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{2}q_n} \qquad \text{(答)}$$

また

$$r_{n+1}=p_n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+q_n\times 0+r_n\times\frac{3}{3}\times\frac{2}{4}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{2}r_n} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) より

$$q_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{2}(q_n-r_n)$$

よって，数列 $\{q_n-r_n\}$ は初項 $q_1-r_1=0$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$q_n-r_n=0$ $\qquad\qquad\therefore\quad q_n=r_n$ 〔証明終〕

(4) (2) より

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n$$

また

$$p_n+q_n+r_n=1$$

これらに $q_n=r_n$ を代入して

$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+q_n$ ……①，$\quad p_n+2q_n=1$ ……②

② より

$$q_n=\frac{1}{2}(1-p_n)$$

これを ① に代入して

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{2}(1-p_n)$$

$\therefore\quad p_{n+1}=\dfrac{1}{6}p_n+\dfrac{1}{2}$

これを変形して

$$p_{n+1}-\frac{3}{5}=\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{3}{5}\right)$$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{3}{5}\right\}$ は初項 $p_1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{15}$，公比 $\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{3}{5}=\frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$\therefore\quad p_n=\boldsymbol{\dfrac{1}{15}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}+\dfrac{3}{5}}$ (答)

② から

$q_n=\dfrac{1}{2}(1-p_n)=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{30}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}}$ (答)

$r_n=q_n$ より

$r_n=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{30}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}}$ (答)

【5】(1)

$$f'(x)=\frac{4(x^2+1)-2x(4x-a)}{(x^2+1)^2}=-2\cdot\frac{2x^2-ax-2}{(x^2+1)^2}$$

であり，方程式 $2x^2-ax-2=0$ は a の値に関係なく相異なる 2 実数解をもつ．そこで，これを $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とおけば，$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x		α		β	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，$f(x)$ の極大値は $f(\beta)$ である．ここで，

$2\beta^2-a\beta-2=0$

であり, かつ,

$$f(\beta)=\frac{4\beta-a}{\beta^2+1}=1 \iff \beta^2-4\beta+1=-a$$

この 2 式から a を消去すると,

$$\begin{aligned}2\beta^2+\beta(\beta^2-4\beta+1)-2&=\beta^3-2\beta^2+\beta-2\\&=(\beta^2+1)(\beta-2)=0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \beta=2$$

そして,

$$a=-(\beta^2-4\beta+1)=3$$

すると, このとき,

$$f'(x)=\frac{-2(2x^2-3x-2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

であるから, 確かに $x=2$ で極大となる. したがって,

$a=\mathbf{3}$ 　　(答)

(2) (1) の考察より, 極小値は,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}=-4$$

そして,

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

なので, $f(x)$ の値域は,

$\boldsymbol{\{y\mid -4\leqq y\leqq 1\}}$ 　　(答)

【6】(1)

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{-(x-1)^2+(x-3)^2}{(x-3)^2(x-1)^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{-4(x-2)}{(x-3)^2(x-1)^2}}\qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より, $f(x)$ の増減は下表のようになる.

x		1		2		3	
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↗		↗	極大	↘		↘

これより, $f(x)$ は $x=2$ のとき極大値

$$f(2)=\frac{1}{2-3}-\frac{1}{2-1}=\mathbf{-2}\qquad \text{(答)}$$

をとる. そして,

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

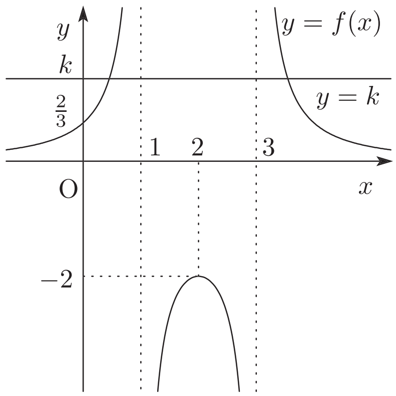
および, 複号同順で,

$$\lim_{x\to1\pm0}f(x)=\mp\infty$$

$$\lim_{x\to3\pm0}f(x)=\pm\infty$$

となるので, $f(x)$ のグラフは

右図のようになる. 　　(答)



(3) 方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は, 座標平面上の曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点の個数に他ならない. したがって, (1) のグラフより, 求める実数解の個数は,

$k<-2,\ 0<k$ のとき, 2 個
$k=-2$ のとき, 1 個 (答)
$-2<k \leqq 0$ のとき, なし

【7】(1) $f(x)=e^x-ex$ とおくと,

$$f'(x)=e^x-e$$

より, $f(x)$ の増減は下表のようになる.

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗

よって, $f(x)$ は $x=1$ のとき極小かつ最小となり, 最小値は,

$$f(1)=0$$

であるから,

$$f(x) \geqq 0 \iff e^x \geqq ex \qquad \text{(証明終)}$$

(2) $g(x)=x-\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3 x$ とおくと,

$$g'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}+\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$=\tan^2 x\left(-1+\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \tan^4 x$$
$$\therefore\quad g'(x)>0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

よって, この範囲で $g(x)$ は単調に増加し, かつ,

$$g(0)=0$$

であるから,

$$g(x)>g(0)=0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\iff x>\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(証明終)}$$

【8】

$$x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}} \quad \cdots①$$

$x>0,\ a>0$ だから ((①の両辺) >0)

$$① \iff \sqrt{a}\log x \leqq \sqrt{x}\log a \iff \frac{\log x}{\sqrt{x}} \leqq \frac{\log a}{\sqrt{a}} \quad \cdots②$$

$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ とおき, これにおける $f(x)$ の最大値を M とする.

$f(x) \leqq M$ だから

$$② \iff M \leqq \frac{\log a}{\sqrt{a}}=f(a)$$

したがって, $f(a)=M$ より, $f(x)$ が最大となる a の値を求める.

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\log x}{x}=-\frac{\log x-2}{2x\sqrt{x}}$$

$f'(x)=0$ より

$x=e^2$

これより, 増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

$M=f(e^2)=\dfrac{2}{e}$

よって, 求める条件は

$a=\mathbf{e^2}$　　(答)

問題

【1】(1) $S_1 = a_1 = 2$，数列 $\{S_n\}$ の公比を r とおくと

$$S_n = 2 \cdot r^{n-1} \quad \cdots\cdots (*)$$

と表されて，$(*)$ および，数列 $\{S_n\}$ の定義より

$$S_2 = a_1 - a_2 = 2r$$

$$\therefore \quad 2 - a_2 = 2r \ \cdots\cdots ①$$

同様に

$$S_3 = a_1 - a_2 + a_3 = 2r^2 \qquad \therefore \quad 2 - a_2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 2r^2$$

$$\therefore \quad \frac{3}{2} - a_2 = 2r^2 \ \cdots\cdots ②$$

①，② より

$$r = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = 1$$

よって

$$S_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$S_n - S_{n-1} = (-1)^{n-1} a_n$$

$$\therefore \quad (-1)^{n-1} a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$\therefore \quad a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

これに $n = 1$ を代入すると

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

となり，a_1 と一致しない．

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_n = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n} & \textbf{(}\boldsymbol{n \geqq 2}\ \textbf{のとき)} \\ \boldsymbol{a_1 = 2} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $a_1 = S_1 = -1 + 21 + 65 = 85$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^3 + 21n^2 + 65n - \left\{-(n-1)^3 + 21(n-1)^2 + 65(n-1)\right\} \\ &= -3n^2 + 45n + 43 \end{aligned}$$

$n = 1$ を代入すると

$$-3 + 45 + 43 = 85$$

となり，a_1 と一致する．

したがって，

$$a_n = \boldsymbol{-3n^2 + 45n + 43} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_n > 151$ より

$$-3n^2+45n+43>151$$

$\therefore\quad 3n^2-45n+108<0$

$\therefore\quad 3(n-12)(n-3)<0$

$\therefore\quad 3<n<12$

したがって，

$\boldsymbol{4 \leqq n \leqq 11}$ 　　(答)

(3) 求める和は $S_{11}-S_3$ である．

$$\begin{aligned} S_n &= -n^3+21n^2+65n \\ &= -n(n-11)(n-10)+5^2\cdot 7\cdot n \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} S_{11}-S_3 &= 5^2\cdot 7\cdot 11-\{(-3)\cdot(-8)\cdot(-7)+5^2\cdot 7\cdot 3\} \\ &= 5^2\cdot 7\cdot 11+2^3\cdot 3\cdot 7-3\cdot 5^2\cdot 7 \\ &= 5^2\cdot 7\cdot(11-3)+2^3\cdot 3\cdot 7 \\ &= 2^3\cdot 7\cdot(5^2+3) \\ &= \mathbf{1568} \end{aligned}$$

(答)

【3】(1) (i) $n=1$，2 のとき，

$$x+y,\quad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

はいずれも偶数である．

(ii) $n=k$，$k+1$ のとき題意が成り立つと仮定すると

$$x^k+y^k=2m,\quad x^{k+1}+y^{k+1}=2n \qquad (\text{ただし，}m,\ n\text{ は整数})$$

と表せる．

$$(x+y)\left(x^{k+1}+y^{k+1}\right)=x^{k+2}+y^{k+2}+x^{k+1}y+xy^{k+1}$$

であるから

$$\begin{aligned} x^{k+2}+y^{k+2} &= (x+y)\left(x^{k+1}+y^{k+1}\right)-xy\left(x^k+y^k\right) \\ &= (x+y)\cdot 2n-xy\cdot 2m \\ &= 2\{n(x+y)-mxy\} \end{aligned}$$

$n(x+y)-mxy$ は整数であるから，$x^{k+2}+y^{k+2}$ は偶数である．

よって，$n=k+2$ のときも題意は成り立つ．

以上から，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して x^n+y^n は偶数である．

〔証明終〕

(2) $x+y=2p$，$xy=2q$ (ただし，p，q は整数) とすると，x，y は t の 2 次方程式

$$t^2-2pt+2q=0$$

の 2 つの実数解である．

ただし，

$$p^2-2q>0 \quad \cdots\cdots(*)$$

をみたし，この条件下で

$$t=p\pm\sqrt{p^2-2q}$$

となり，この 2 数が x，y である．

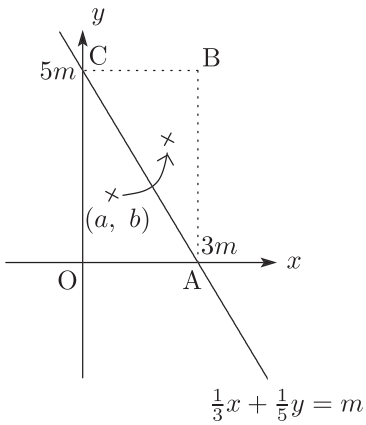
$(*)$ をみたす $p,\ q$ の組として

$(p,\ q)=(2,\ 1)$

とすると

$$(x,\ y)=\left(\mathbf{2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}}\right)\qquad (答)$$

【4】(1) $\mathrm{A}(3m,\ 0)$, $\mathrm{B}(3m,\ 5m)$, $\mathrm{C}(0,\ 5m)$ とおく.



$\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{5}y\leqq m$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ をみたす領域は $\triangle$ OAC の内部及び辺上の点である.

辺 AC 上をのぞく $\triangle$ OAC に含まれる格子点 $(a,\ b)$ に対し，点 $(3m-a,\ 5m-b)$ は $\triangle$ ABC 内の格子点で，$\triangle$ OAC (辺 AC 上をのぞく) 内に含まれる格子点と $\triangle$ ABC (辺 AC 上をのぞく) に含まれる格子点の間に 1 対 1 の対応がつく.

よって，両方の格子点の個数は等しく，この個数を N とおく.

辺 AC は直線 $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{5}y=m$，すなわち，$y=-\dfrac{5}{3}x+5m$ 上にあるから AC 上の格子点の x 座標は 3 の倍数，したがって，0 から $3m$ までの $m+1$ 個ある.

よって，格子点も $m+1$ 個ある.

一方，長方形 OABC（各辺を含む）内に含まれる格子点の総数は，$(3m+1)(5m+1)$ 個である.

したがって

$$2N+(m+1)=(3m+1)(5m+1)=15m^2+8m+1$$

$$\therefore\quad N=\frac{1}{2}(15m^2+7m)$$

ゆえに求める格子点の個数は

$$N+(m+1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}(15m^2+9m+2)}\qquad (答)$$

(2) $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{5}y+z\leqq n$ において $z=k$ とおくと，$k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n$ で $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{5}y\leqq n-k$ である.

これをみたす格子点の個数を N_k とおくと N_k は (1) より

$$\begin{aligned}N_k&=\frac{1}{2}\{15(n-k)^2+9(n-k)+2\}\\&=\frac{1}{2}\{15n^2+9n+2+15k^2-(30n+9)k\}\end{aligned}$$

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}N_k$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(15n^2+9n+2)(n+1)+15\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(30n+9)\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)^2(5n+2)}\qquad (答)$$

【5】2 曲線の共有点の x 座標を α とおく. このとき,

$$y=\log x \implies y'=\frac{1}{x}$$

$$y=ax^2 \implies y'=2ax$$

であるから, 2 曲線が $x=\alpha$ において接線を共有するための条件は,

$$\begin{cases} \log\alpha = a\alpha^2 & \cdots ① \\ \dfrac{1}{\alpha}=2a\alpha & \cdots ② \end{cases}$$

②より,

$$a\alpha^2=\frac{1}{2}$$

これを ①に代入して,

$$\log\alpha=\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \alpha=\sqrt{e}$$

よって,

$$a=\frac{1}{2\alpha^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2e}} \qquad \text{(答)}$$

そして,

$$\log\alpha=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

なので, 共通接線の方程式は,

$$y=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})+\frac{1}{2} \iff \boldsymbol{y=\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ だから

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\boldsymbol{0} \qquad \text{(答)}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ だから

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\boldsymbol{1} \qquad \text{(答)}$$

(2) 底 e の対数をとると

$$\log f(x)=-\frac{1}{x}$$

x で微分すると, $\displaystyle\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{1}{x^2}$ だから

$$f'(x)=\boldsymbol{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}} \quad \cdots ① \qquad \text{(答)}$$

①の両辺の底 e の対数をとると

$$\log f'(x)=-2\log x-\frac{1}{x}$$

x で微分すると, $\displaystyle\frac{1}{f'(x)}\cdot f''(x)=-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=-\frac{2x-1}{x^2}$ だから

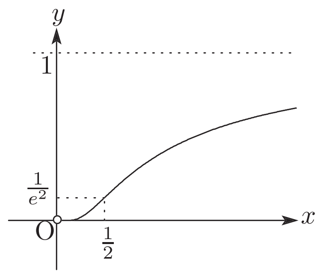
$$f''(x)=\boldsymbol{-\frac{2x-1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $f''(x)=0$ より, $x=\dfrac{1}{2}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\cup$	変曲点	$\cap$

よって, 変曲点は

$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{\frac{1}{e^2}}\right)$　　(答)



$f'(x)>0$ より, $f(x)$ は単調増加であるから,

(1) の結果より, $y=f(x)$ のグラフは**図の実線 (ただし, 点 (0, 0) は除く)**.　　(答)

(4) $(t,\ f(t))\ (t>0)$ における接線の式は, $y=\dfrac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}(x-t)+e^{-\frac{1}{t}}$ だから, 条件より

$$1\cdot e^{\frac{1}{t}}=\frac{1}{t^2}(a-t)+1 \qquad \therefore\quad a=t^2e^{\frac{1}{t}}-t^2+t \quad \cdots ②$$

②の右辺 $=g(t)$ とおくと, 求める条件は

“②が正の解を唯 1 つもつ”　$\cdots(*)$

$$g'(t)=2te^{\frac{1}{t}}+t^2\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)e^{\frac{1}{t}}-2t+1=(2t-1)(e^{\frac{1}{t}}-1)=(2t-1)\{1-f(t)\}e^{\frac{1}{t}}$$

$y=f(x)$ のグラフより, $t>0$ のとき, $1-f(t)>0$

したがって, $g'(t)=0$ より, $t=\dfrac{1}{2}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

極小値 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(e^2+1)$

$$\lim_{t\to+0}g(t)=\infty,\quad \lim_{t\to\infty}g(t)=\infty$$

$(*)\quad\Longleftrightarrow\quad$ “$z=g(t)$ と $z=a$ とが $t>0$ で共有点を唯 1 つもつ”

よって

$a=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(e^2+1)}$　　(答)

【7】 $f(x)=e^x\sin x$ とすると,

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^x\sin x+e^x\cos x\\ &=e^x(\sin x+\cos x)\\ &=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

(i) $\alpha<\beta$ のとき

$f(x)$ は区間 $[\alpha,\beta]$ で連続, 区間 (α,β) で微分可能であるから, 平均値の定理より

$$f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(c),\alpha<c<\beta$$

となる c がある. したがって, ① より

$$\left|e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha\right|=\sqrt{2}e^c\left|\beta-\alpha\right|\left|\sin\left(c+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

ここで, $\alpha<\beta,\left|\sin\left(c+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqq 1$, $c<\beta$ なので

$$\left|e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha\right|\leqq\sqrt{2}(\beta-\alpha)e^c<\sqrt{2}(\beta-\alpha)e^\beta$$

(ii) $\alpha=\beta$ のとき

$$\left|e^\beta\sin\beta-e^\alpha\sin\alpha\right|=0,\sqrt{2}(\beta-\alpha)e^\beta=0$$

$\therefore\ \ \left|e^{\beta}\sin\beta - e^{\alpha}\sin\alpha\right| = \sqrt{2}(\beta-\alpha)e^{\beta}$

(i),(ii) より

$\left|e^{\beta}\sin\beta - e^{\alpha}\sin\alpha\right| \leqq \sqrt{2}(\beta-\alpha)e^{\beta}$　　(証明終)

【8】(1) $x \to +0$ を考えるので，$x > 0$ で考えればよく，この範囲では，$f(x) = x - \sin x$ とすると

$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$

かつ，$f(0) = 0$ より

$f(x) > 0$　　　$\therefore\ \ x > \sin x$

ここで $g(t) = e^t$ とすると，これは $-\infty < t < \infty$ で微分可能，連続だから，平均値の定理より

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = g'(c) = e^c,\quad \sin x < c < x$$

をみたす c が存在する．

そして，$x \to +0$ のとき，$\sin x \to +0$ であり，$c \to +0$ となり

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{c\to+0} e^c = \mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x \to \infty$ を考えるので，$x > 0$ のときを考えればよい．$f(x) = \log x$ とすると，平均値の定理より

$$\frac{\log(2x+1) - \log 2x}{(2x+1) - 2x} = f'(c) = \frac{1}{c},\quad 2x < c < 2x+1$$

が成り立つ c が存在する．

ここで

$$\frac{1}{2x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{2x} \qquad \therefore\ \ \frac{1}{2+\frac{1}{x}} < \frac{x}{c} < \frac{1}{2}$$

であり，$x \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{2+\frac{1}{x}} \to \frac{1}{2}$$

だから，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{\log(2x+1) - \log 2x}{(2x+1) - 2x} = \lim_{x\to\infty} x\left\{\log(2x+1) - \log 2x\right\} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【9】(1) $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ より

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3} &= (2+\sqrt{3})^{n+1} \\
&= (2+\sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) \\
&= (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1} は整数なので

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad \cdots\cdots(*)$$

また，$n=1$ のとき，$2+\sqrt{3} = a_1 + b_1\sqrt{3}$ より

$$a_1 = 2, \qquad b_1 = 1$$

ここで，$(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ を数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$a_1 = 2$，$b_1 = 1$ より成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき

$$(2-\sqrt{3})^k = a_k - b_k\sqrt{3}$$

が成り立つとする．このとき

$$
\begin{aligned}
(2-\sqrt{3})^{k+1} &= (2-\sqrt{3})(a_k - b_k\sqrt{3}) \\
&= (2a_k + 3b_k) - (a_k + 2b_k)\sqrt{3} \\
&= a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{3} \qquad (\because \ (*))
\end{aligned}
$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する．

以上，(i)，(ii) より，すべての正の整数 n に対して

$$(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$$ 〔証明終〕

(2) $$(a_n + b_n\sqrt{3})(a_n - b_n\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n$$

$$\therefore \quad {a_n}^2 - 3{b_n}^2 = 1$$

$$\therefore \quad {a_n}^2 - 1 = 3{b_n}^2$$

よって，示された．　〔証明終〕

(3)
$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})^n &= a_n + b_n\sqrt{3} \\
&= \sqrt{{a_n}^2} + \sqrt{3{b_n}^2} \\
&= \sqrt{3{b_n}^2} + \sqrt{3{b_n}^2 + 1} \qquad (\because \ (2))
\end{aligned}
$$

$A = 3{b_n}^2$ とすれば題意をみたす．　〔証明終〕

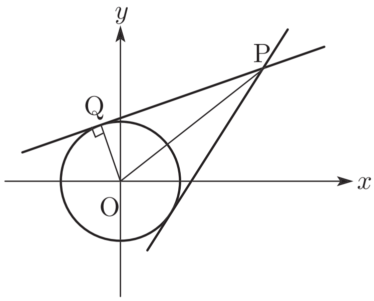
問題

【1】〔I〕

(1) まず，与えられた円の方程式を

$x^2+y^2=4$ ………①

とする．



上図より, 接線は y 軸に平行でないから, その方程式は,

$y=m(x-5)+3$ ………②

とおける．②より,

$mx-y-5m+3=0.$

これが①に接することから,

$$\frac{|-5m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \iff 21m^2-30m+5=0$$

$$\iff m=\frac{15\pm2\sqrt{30}}{21}$$

これを②に代入して, 求める接線の方程式は,

$$\boldsymbol{y=\frac{15\pm2\sqrt{30}}{21}(x-5)+3.}\qquad \text{(答)}$$

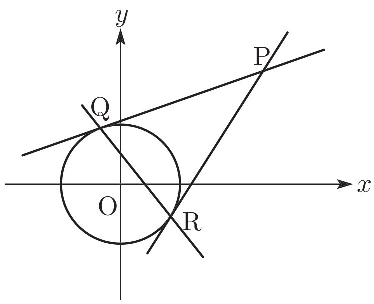
(2) 一方の接点を Q とおく．このとき, 三平方の定理より,

$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2-\mathrm{OQ}^2=34-4=30.$

よって, 求める接線の長さは,

$\mathrm{PQ}=\boldsymbol{\sqrt{30}}$　(答)

(3) 2 つの接点をそれぞれ Q, R とする．下図を参照のこと．



いま, これらの座標を $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$ とおくと, 2 本の接線の方程式は,

$$x_1x + y_1y = 4, \quad x_2x + y_2y = 4$$

である．これらはともに点 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ を通るから,

$$5x_1 + 3y_1 = 4, \quad 5x_2 + 3y_2 = 4. \quad \cdots\cdots\cdots③$$

さて, いま直線

$$5x + 3y = 4 \quad \cdots\cdots\cdots④$$

を考えると, ③より④は 2 点 Q, R を通ることがわかる．また, 2 点 Q, R を通る直線は 1 本しか存在しないから, ④ が求める直線である.

したがって, 求める直線の方程式は,

$\boldsymbol{5x + 3y = 4}$.　　(答)

〔II〕

(1) C_2 は中心 $\mathrm{K}(k,\ 2k)$，半径 2 の円であり，中心 K は

$$y = 2x$$

上にある.

原点 O と K の距離は

$$\mathrm{OK} = \sqrt{k^2 + (2k)^2} = \sqrt{5}|\,k\,|$$

だから，2 円 C_1，C_2 の位置関係は次のように場合分けされる：

▼ OK > (半径の和)，すなわち

$$\sqrt{5}|\,k\,| > 3 \iff |\,k\,| > \frac{3}{\sqrt{5}}$$

の場合，分離.

▼ OK = (半径の和)，すなわち

$$\sqrt{5}|\,k\,| = 3 \iff |\,k\,| = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

の場合，外接.

▼ |(半径の差)| < OK < (半径の和)，すなわち

$$1 < \sqrt{5}|\,k\,| < 3 \iff \frac{1}{\sqrt{5}} < |\,k\,| < \frac{3}{\sqrt{5}}$$

の場合，2 点で交わる.

▼ OK = |(半径の差)|，すなわち

$$\sqrt{5}|\,k\,| = 1 \iff |\,k\,| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

の場合，内接.

▼ OK < |(半径の差)|，すなわち

$$\sqrt{5}|\,k\,| < 1 \iff |\,k\,| < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

の場合，内包.

以上より，$k > 0$ に注意して，2 円 C_1, C_2 が共有点をもつのは

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}} \leqq k \leqq \frac{3}{\sqrt{5}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) まず C_2 が点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通るから，C_2 の方程式に $x = 1,\ y = 0$ を代入して

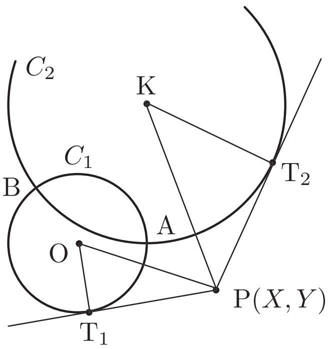
$$(1 - k)^2 + 4k^2 = 4 \iff (5k + 3)\,(k - 1) = 0$$

となるから，$k>0$ より $k=1$．したがって，円 C_2 は

$$C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=4 \iff x^2+y^2-2x-4y+1=0$$

となるから，このとき C_2 は中心 K(1, 2) を中心とし，半径 2 の円である．

$k=1$ は (1) で求めた結果をみたすから，2 円 C_1 と C_2 は 2 点で交わる．その一方は A(1，0) である．他方を点 B とする．次の図を参照のこと．



ここで，x と y の 2 次式を

$$f_1(x,\,y)=x^2+y^2-1,\quad f_2(x,\,y)=x^2+y^2-2x-4y+1$$

と定める．

$\mathrm{P}(X,\,Y)$ から円 C_1 に引いた接線の接点 T_1 について

$$\mathrm{PT_1}^2=\mathrm{PO}^2-\mathrm{OT_1}^2=X^2+Y^2-1=f_1(X,\,Y)$$

であり，また同様に P から円 C_2 に引いた接線 PT_2 について

$$\mathrm{PT_2}^2=\mathrm{PK}^2-\mathrm{KT_2}^2=(X-1)^2+(Y-2)^2-4=f_2(X,\,Y)$$

となる．

(i) $\mathrm{PT}_1=\mathrm{PT}_2 \iff \mathrm{PT_1}^2=\mathrm{PT_2}^2$ であるから，$f_1(X,Y)=f_2(X,Y)$ が成り立つ．

$$X^2+Y^2-1=X^2+Y^2-2X-4Y+1 \iff X+2Y-1=0$$

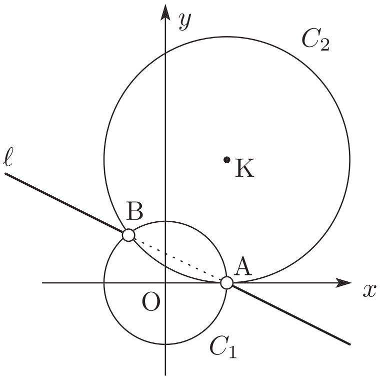
となり，軌跡を考えている点 P は直線 $x+2y-1=0$ 上にあり，これは直線 AB である．

ただし，P からの接線が存在するためには，P が 2 円 C_1，C_2 の外部にあることが必要であるから，上図の線分 AB (端点を含む) 上の点を除く．

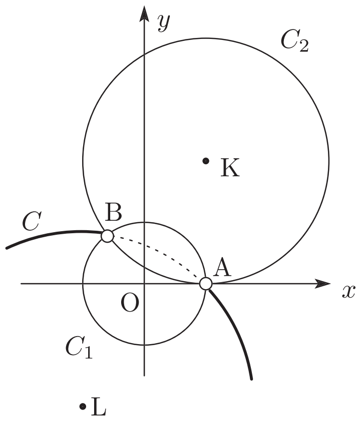
したがって，求める軌跡は

直線の一部 $\boldsymbol{x+2y-1=0,\ x^2+y^2>1}$　　(答)

図示すれば，次図の左側の図の直線 ℓ となる．



(i) の軌跡 ℓ



(ii) の軌跡 C

(ii) $\sqrt{2}\mathrm{PT}_1 = \mathrm{PT}_2 \Longleftrightarrow 2{\mathrm{PT}_1}^2 = {\mathrm{PT}_2}^2$ であるから，

$$2f_1(X,\,Y) = f_2(X,\,Y) \Longleftrightarrow 2\left(X^2 + Y^2 - 1\right) = X^2 + Y^2 - 2X - 4Y + 1$$

が成り立ち，整理して

$$X^2 + Y^2 + 2X + 4Y - 3 = 0 \Longleftrightarrow (X+1)^2 + (Y+2)^2 = 8$$

となるから，点 $\mathrm{P}(X,\,Y)$ は，中心 $\mathrm{L}(-1,\,-2)$，半径 $2\sqrt{2}$ の円

$$C : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 8$$

上にある．

ただし，P から 2 円に接線が引けるためには，P がこれら 2 円の外部にあることが必要で，求める軌跡は

円 $\boldsymbol{C}$ の一部 (優弧) $\boldsymbol{(x+1)^2 + (y+2)^2 = 8,\quad x^2 + y^2 > 1}$. (答)

これを図示すれば，上図の右側の図になる．

【2】(1) 与えられた直線の方程式を

$$\ell : ax + y = 2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$m : x - ay = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

とする．②より $x = ay$

①に代入して

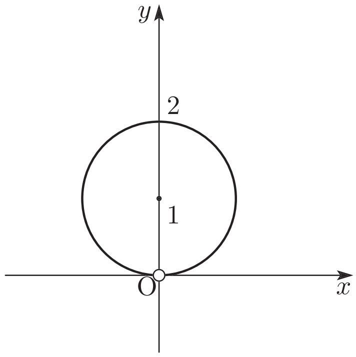
$$a^2y + y = 2 \Longleftrightarrow \left(a^2 + 1\right)y = 2 \cdots\cdots\cdots ③$$

$y = 0$ はこれをみたさないから，$y \fallingdotseq 0$

この下で，$a = \dfrac{x}{y}$ を①に代入して

$$\frac{x^2}{y} + y = 2 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 2y \Longleftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \cdots\cdots\cdots ④$$

よって求める軌跡は，



のようになり，

点 (0, 1) を中心とする半径 1 の円から，原点を除いた曲線.　　(答)

(2) ③を a についての 2 次方程式と考える．つまり

$ya^2+y-2=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

をみたす実数 a が，区間 $0<a<1$ に存在する条件を求める．

▼ $y=0$ のとき，この式は $-2=0$ となり矛盾．つまり，⑤をみたす実数 a は存在しない．

▼ $y \fallingdotseq 0$ の下で，$a^2=\dfrac{2-y}{y}$

$0<a<1$ より $0<a^2<1$ だから，

$$0<\frac{2-y}{y}<1 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

$y \fallingdotseq 0$ だから $y^2>0$. そこで，⑥の両辺に y^2 をかけて

$$0<y(2-y)<y^2$$

前半より

$$y^2-2y<0 \quad \therefore \quad 0<y<2$$

後半より

$$2y^2-2y>0 \quad \therefore \quad y<0,\ 1<y$$

このいずれもみたす y の範囲は

$$1<y<2 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

また

$$a=\frac{x}{y} \quad (y \fallingdotseq 0)$$

より

$$0<\frac{x}{y}<1$$

であるから，$y>0$ の範囲で

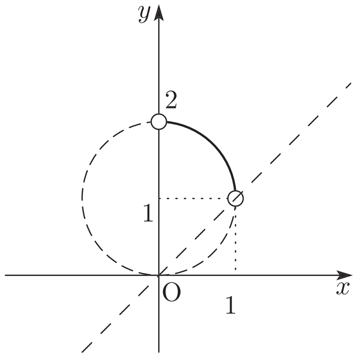
$$0<x<y \cdots\cdots\cdots ⑧$$

以上，④かつ⑦かつ⑧より，

$$x^2+(y-1)^2=1,\ 1<y<2,\ 0<x<y$$

が成り立つ．求める軌跡は図のようになり

中心 (0, 1)，半径 1 の円の，$\boldsymbol{1<y<2,\ 0<x<y}$ をみたす部分.　　(答)



【3】〔I〕

$\begin{cases} x+y=X, \\ xy=Y \end{cases}$ とすると，x, y は t についての 2 次方程式

$$t^2 - Xt + Y = 0$$

の 2 解となる．

$x, y \in \mathbb{R}$ であるから，この方程式は 2 実数解をもつ．よってその判別式を D とすれば $D \geqq 0$ が成り立つ：

$$D = X^2 - 4Y \geqq 0, \quad \therefore \quad Y \leqq \frac{1}{4}X^2. \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

①のもとで，点 $(x,\ y)$ が動く円の方程式を変形する．

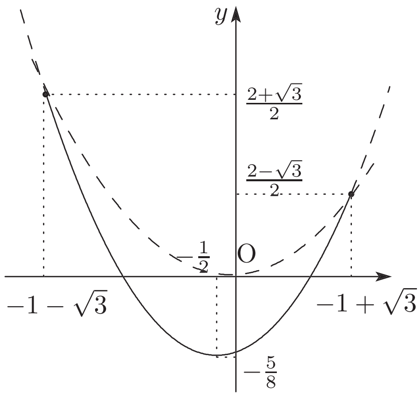
$$\begin{aligned} x^2+y^2+x+y=1 &\iff (x+y)^2-2xy+x+y=1 \\ &\iff X^2+X-2Y=1 \\ &\iff Y=\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(X+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

したがって，点 $(X,\ Y)$ は放物線 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{8}$ 上にある．

必要条件①を考えて，求める軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{8}}$ の，$\boldsymbol{y \leqq \frac{1}{4}x^2}$ をみたす部分．端点を含む． (答)

図示すれば，次の図のようになる．



〔II〕

$\mathrm{P}(X,\ Y)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とする．3 点 O, P, Q は 1 直線上にあるから，k を正の実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}} \iff \begin{cases} x = kX, \\ y = kY \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

と置くことができる．

また，$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 1$ であるから，

$$\mathrm{OP}^2 \cdot \mathrm{OQ}^2 = 1 \iff \left(X^2 + Y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = 1$$

が成り立ち，②を代入して

$$\left(X^2 + Y^2\right)\left(k^2X^2 + k^2Y^2\right) = 1$$

$$\iff k^2 = \frac{1}{\left(X^2 + Y^2\right)^2},$$

$$\therefore\ k = \frac{1}{X^2 + Y^2} \qquad (\because\ k > 0.) \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

となる．

③を②に代入して

$$x = \frac{X}{X^2 + Y^2}, \quad y = \frac{Y}{X^2 + Y^2}$$

を得る．これで x, y と X, Y の関係式が得られた．

点 $(x,\ y)$ は円 $C : (x-1)^2 + y^2 = 4$ 上にあるから，代入して

$$\left(\frac{X}{X^2 + Y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{Y}{X^2 + Y^2}\right)^2 = 4$$

$$\iff \left\{X - \left(X^2 + Y^2\right)\right\}^2 + Y^2 = 4\left(X^2 + Y^2\right)^2$$

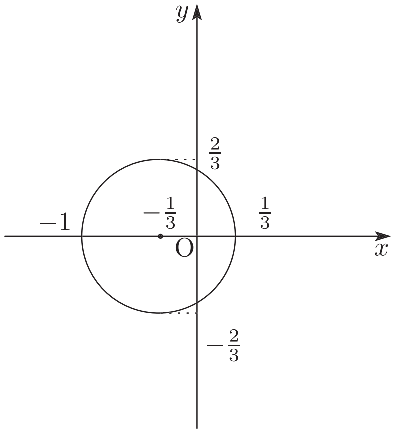
$$\iff 3\left(X^2 + Y^2\right) + 2X - 1 = 0 \quad (\because\ X^2 + Y^2 \fallingdotseq 0)$$

$$\iff \left(X + \frac{1}{3}\right)^2 + Y^2 = \frac{4}{9}.$$

よって，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ は，中心 $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$，半径 $\frac{2}{3}$ の円周上にある．

点 Q は，与えられた円の周上を 1 周するから，除外点は存在しない．

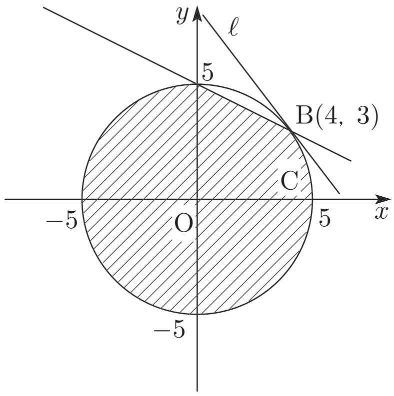
これを図示して，次の図を得る．



以上より，求める軌跡は

円 $\boldsymbol{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}}$ (答)

【4】領域は下図の斜線部分で境界を含んでいる．この領域を D とする．



$mx+y=k$ とおいて，直線 $\ell : y=-mx+k$ が領域 D と共有点をもつ条件を調べる．

ℓ の傾き $-m$ について $m>0$ に着目し，ℓ が点 $(4,\ 3)$ で円 $x^2+y^2=25$ に接するとき，

$$\frac{3}{4}\cdot(-m)=-1 \quad \therefore\ m=\frac{4}{3}$$

であるから，次のように m の値を分類して k の最大値を調べる．

(i) $0<m \leqq \frac{1}{2}$ のとき

点 $(0,\ 5)$ を通るとき k は最大となり，最大値は $k=5$.

(ii) $\frac{1}{2}<m \leqq \frac{4}{3}$ のとき

点 $(4,\ 3)$ を通るとき k は最大となり，最大値は $k=4m+3$.

(iii) $\frac{4}{3}<m$ のとき

弧 BC 上で，円に接するとき k は最大となる．原点 O と直線 ℓ の距離が 5 であるから，$\dfrac{|-k|}{\sqrt{m^2+1}}=5$，$k>0$ より，k の最大値は $k=5\sqrt{m^2+1}$.

以上より，k の最大値 $\max k$ は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<m \leqq \frac{1}{2}} \text{ のとき，} & \boldsymbol{\max k=5,} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}<m \leqq \frac{4}{3}} \text{ のとき，} & \boldsymbol{\max k=4m+3,} \\ \boldsymbol{\frac{4}{3}<m} \text{ のとき，} & \boldsymbol{\max k=5\sqrt{m^2+1}} \end{cases}$$ (答)

【5】(1)

$$f'(x) = -2x^{-3}\log x + x^{-2}\cdot\frac{1}{x}$$
$$= \frac{1-2\log x}{x^3}$$

よって，$(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = \frac{1-2\log t}{t^3}(x-t) + f(t)$$
$$\therefore \quad y = \frac{1-2\log t}{t^3}\,x + \frac{3\log t - 1}{t^2}$$

これが原点を通るとき

$3\log t - 1 = 0 \qquad \therefore \quad t = \sqrt[3]{e}$

このとき

$$\frac{1-2\log t}{t^3} = \frac{1}{3e}$$

だから

$$\boldsymbol{y = \frac{x}{3e}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\int x^{-2}\log x dx = -x^{-1}\log x + \int x^{-2}dx + c$$
$$= -x^{-1}\log x - x^{-1} + c'$$

(1) の $y = f'(x)$ を考えると，増減表は右のようになる．

x	0		$\sqrt{e}$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

また，$f(x) = 0$ のとき $x = 1$ だから求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{t}{3e} - \int_1^t x^{-2}\log x dx$$
$$= \frac{t^2}{6e} - \left[-x^{-1}(\log x + 1)\right]_1^t$$
$$= \frac{t^2}{6e} + \frac{\log t + 1}{t} - 1$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{6} + \frac{4}{3e^{\frac{1}{3}}} - 1$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{2\sqrt[3]{e}} - 1} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) t のところに $\pi - t$ を代入すると，

$$\sin 2(\pi - t) = -\sin 2t,\ \sin 3(\pi - t) = \sin 3t$$

であるから，x だけ符号が変わる．すなわち，点 $(x,\ y)$ が C 上の点なら点 $(-x,\ y)$ も C 上の点であり C は y 軸対称である．したがって，$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えて，y 軸に関して対称移動すればよい．

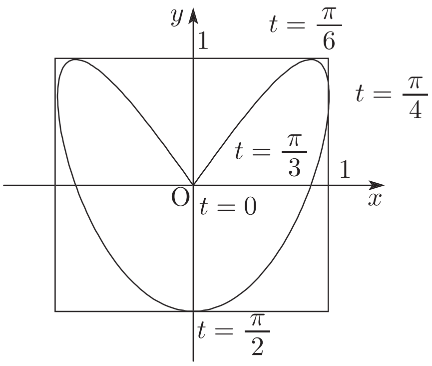
ここで

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t,\ \frac{dy}{dt} = 3\cos 3t$$

だから，増減表は下のようになる．

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

よって，グラフは下図のようになる．　　(答)



(2)　$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 3t\cdot 2\cos 2t dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 5t+\sin t)dt=2\left(\frac{1}{5}+1\right)=\boldsymbol{\frac{12}{5}}$　　(答)

【7】 (1) 原点で共通接線をもつので

$f'(0)=g'(0)\quad\cdots①$

$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数だから, $y=g(x)\iff x=f(y)$ より

$\frac{d}{dx}g(x)=\frac{1}{f'(y)}$

したがって

$g'(0)=\frac{1}{f'(0)}\quad\cdots②$

$f'(x)=3x^2-2x+a$, ①, ②より

$a^2=1$

条件より, $f'(x)\geqq 0$ が常に成立するので

$f'(0)=a\geqq 0$

よって

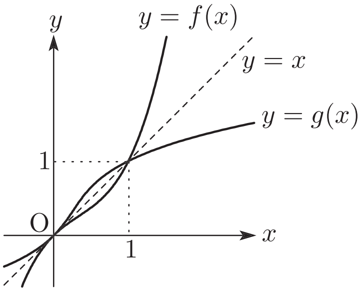
$a=\mathbf{1}$　　(答)

(2) (1) より, $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は, 直線 $y=x$ に関して対称.

$f(x)-x=x^3-x^2=x^2(x-1)$ だから

$$\begin{cases} f(x)\leqq x & (x\leqq 1\text{ のとき})\\ f(x)\geqq x & (x\geqq 1\text{ のとき})\end{cases}$$

$y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフは図の実線.



図より, 求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^1[\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2]dx$$

$t=g(x)$ とおくと, $x=f(t)$ だから, $dx=f'(t)dt$

x	$0\to1$
t	$0\to1$

これより

$$\pi\int_0^1\{g(x)\}^2dx=\pi\int_0^1 t^2f'(t)dt=\pi\int_0^1\{t^2(3t^2-2t+1)\}dt$$

$$(\because f'(t)=3t^2-2t+1)$$

$$V=\pi\int_0^1\{x^2(3x^2-2x+1)-(x^3-x^2+x)^2\}dx = \pi\int_0^1(-x^6+2x^5)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{3}x^6\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{4}{21}\pi} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) $y=ae^{bx}$ より $y'=abe^{bx}$ なので, $\mathrm{P}(p,\ ae^{bp})$ における接線の方程式は,

$$y-ae^{bp}=abe^{bp}(x-p)$$

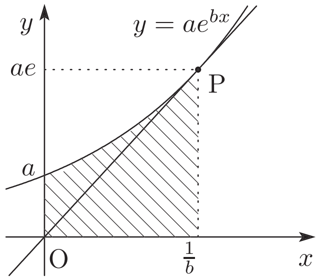
で, これが O を通るから,

$$-ae^{bp}=-abpe^{bp}$$

よって,

$$p=\frac{1}{b} \qquad \therefore \quad \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{1}{b},\ ae}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) 右図より,



$$V=\pi\cdot\left(\frac{1}{b}\right)^2\cdot ae-\pi\int_a^{ae}x^2dy$$

と表される. ここで, $y=ae^{bx}$ より,

$$bx=\log y-\log a$$

$$\therefore \quad x^2=\frac{1}{b^2}(\log y-\log a)^2$$

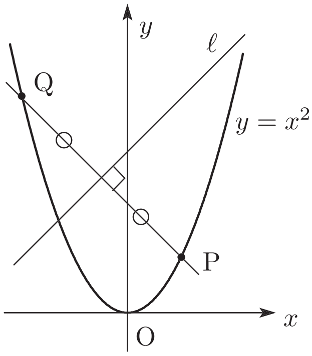
となることから,

$$\begin{aligned}
\int_a^{ae}x^2dy &= \frac{1}{b^2}\int_a^{ae}(\log y-\log a)^2dy\\
&=\frac{1}{b^2}\left\{\Big[y(\log y-\log a)^2\Big]_a^{ae}-\int_a^{ae}y\cdot 2(\log y-\log a)\cdot\frac{1}{y}dy\right\}\\
&=\frac{1}{b^2}\left\{ae-2\int_a^{ae}(\log y-\log a)dy\right\}\\
&=\frac{1}{b^2}\left[ae-2\left\{\Big[y(\log y-\log a)\Big]_a^{ae}-\int_a^{ae}y\cdot\frac{1}{y}dy\right\}\right]\\
&=\frac{1}{b^2}\left[ae-2\left\{ae-\Big[y\Big]_a^{ae}\right\}\right] = \frac{1}{b^2}(ae-2a)
\end{aligned}$$

よって,

$$V=\frac{ae}{b^2}\pi-\frac{\pi}{b^2}(ae-2a)=\boldsymbol{\frac{2a}{b^2}\pi} \qquad \text{(答)}$$

【9】$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ $(p \fallingdotseq q)$ とし，直線 $y = ax + 1$ を ℓ とする．



まず $a = 0$ ならば，ℓ は $y = 1$ となり，ℓ と垂直な直線と放物線との共有点はただ 1 個しか存在しない．これは題意をみたさないから，以下 $a \fallingdotseq 0$ で考察する．

P と Q が ℓ に関して対称ならば，PQ の中点が ℓ 上にあり，かつ，$\mathrm{PQ} \perp \ell$ である．これより

$$\frac{p^2+q^2}{2} = a \cdot \frac{p+q}{2} + 1, \quad \frac{p^2-q^2}{p-q} \cdot a = -1.$$

$$\therefore \quad (p+q)^2 - 2pq = a(p+q) + 2, \quad a(p+q) = -1. \quad \cdots\cdots ①$$

① の第 2 式より，$a \fallingdotseq 0$ であることに注意すると，① は

$$pq = \frac{(p+q)^2 - a(p+q) - 2}{2}, \quad p+q = -\frac{1}{a},$$

$$\therefore \quad pq = \frac{1-a^2}{2a^2}, \quad p+q = -\frac{1}{a}$$

と変形できて，p，q は，t に関する 2 次方程式

$$t^2 + \frac{1}{a}t + \frac{1-a^2}{2a^2} = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

の 2 解となる．よって題意の異なる点 P，Q の存在はこの 2 次方程式 $(*)$ が異なる 2 実解をもつことと同値である．

よって $(*)$ の判別式を D として，$D > 0$ が成り立つことが必要かつ十分である：

$$D = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1-a^2}{2a^2} > 0, \qquad \therefore \quad 1 - 2(1-a^2) > 0,\ a \fallingdotseq 0 \iff a^2 > \frac{1}{2}.$$

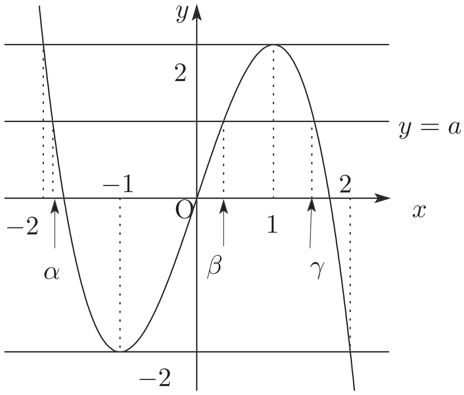
よって

$$\boldsymbol{a < -\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ または } \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}} < a}. \quad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 方程式を $a = 3x - x^3$ と変形して右辺を $f(x)$ とおくと

$$f'(x) = 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(1 + x)$$



よって，$y = f(x)$ のグラフは図のように原点対称となる．

これと直線 $y = a$ との交点の x 座標を比べると明らかに

$\boldsymbol{|\beta| < |\gamma| < |\alpha|}$　　(答)

(2) まず (1) より $0 < a < 2$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ である．

$|\alpha| = -\alpha$ は $y = |f(x)|$ と $y = a$ との交点で $\sqrt{3} < x < 2$ にあるものに対応する．

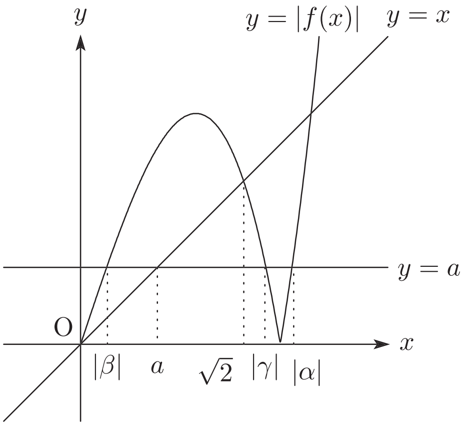
したがって，次の図のように $y = |f(x)|$ と $y = x$ と $y = a$ のグラフを描くことで，

これらの交点の x 座標として

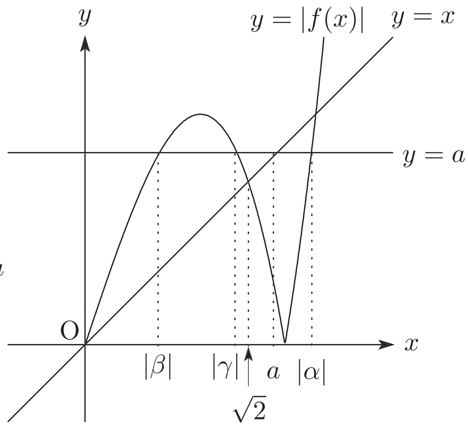
$|\alpha| = -\alpha$,　$|\beta| = \beta$,　$|\gamma| = \gamma$,　a

が得られる．つまり，この 4 個の値を，x 軸上で比べることができる．これで次の図が得られる．

(i) $0 < a < \sqrt{2}$ のとき



(ii) $\sqrt{2} < a < 2$ のとき



したがって，次の大小関係を得る．

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < \sqrt{2}} \text{ のとき} & \boldsymbol{|\beta| < a < |\gamma| < |\alpha|} \\ \boldsymbol{a = \sqrt{2}} \text{ のとき} & \boldsymbol{|\beta| < a = |\gamma| < |\alpha|} \\ \boldsymbol{\sqrt{2} < a < 2} \text{ のとき} & \boldsymbol{|\beta| < |\gamma| < a < |\alpha|} \end{cases}$$　　(答)

【2】与えられた曲線を C とする．微分して

$$y' = 3x^2 - 1$$

だから，C 上の点 $(t,\ t^3 - t)$ における接線 ℓ は

$$\ell : y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t$$

である．

これが点 $(a,\ b)$ を通るとき，次の①が成り立つ．

$$b = (3t^2 - 1)(a - t) + t^3 - t \quad \cdots\cdots ①$$

よって題意が成り立つためには，① をみたす t の異なる実数値が 3 個存在することが必要かつ十分である．

① を変形して

$$2t^3 - 3at^2 + a + b = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

を得る．この t についての 3 次方程式が 3 個の異なる実数解をもつから，左辺を $f(t)$ として，t の 3 次関数 $f(t)$ を考えれば

$f(t)$ の極大値が正であり，かつ $f(t)$ の極小値が負である

すなわち

$f(t)$ の 2 つの極値が異符号である

ことが必要かつ十分である．

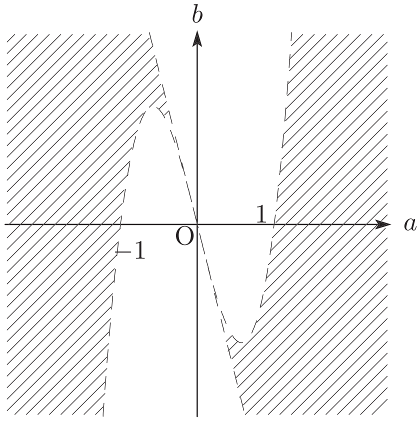
ここで，$f(t)$ を微分して

$$f'(t) = 6t(t - a)$$

よって，$f(0)f(a) < 0$ より，求める a, b についての条件は

$$\boldsymbol{(a + b)(-a^3 + a + b) < 0} \qquad \text{(答)}$$

したがって，$(a,\ b)$ の存在領域を図示すれば，次の図の斜線部となる．境界を含まず，原点 O も除く．



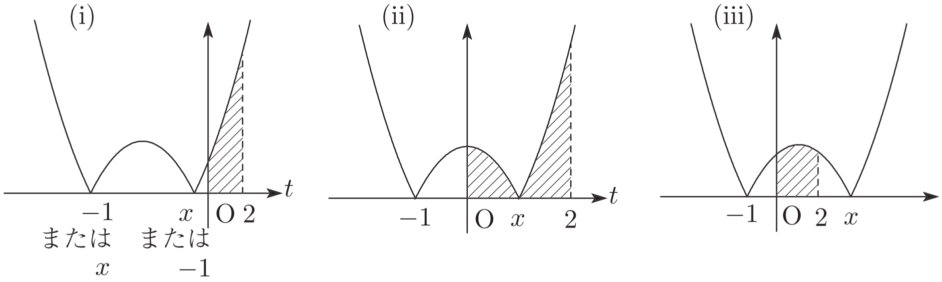
$b = a^3 - a$　　$b = -a$

【3】(1) 非積分関数 $g(t)=\left|(t+1)(t-x)\right|$ は，$t=-1,\ x$ で t 軸と共有点をもつ．積分区間が $0\leqq t\leqq 2$ であることと合わせて，x の値について

(i) $x\leqq 0$ のとき，　(ii) $0\leqq x\leqq 2$ のとき，　(iii) $2\leqq x$ のとき

で場合を分ける．

これを図示すると，次の図の様になる．



x の関数 I_1 を $f(x)$ とする．

(i) $x\leqq 0$ のとき

$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で，$(t+1)(t-x)\geqq 0$ だから

$$f(x)=\int_0^2(t+1)(t-x)dt=\int_0^2\{t^2+(1-x)t-x\}dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{(1-x)t^2}{2}-xt\right]_0^2=\frac{8}{3}+2(1-x)-2x$$
$$=-4x+\frac{14}{3}\geqq f(0)=\frac{14}{3}$$

(ii) $0\leqq x\leqq 2$ のとき

$$\left|(t+1)(t-x)\right|=\begin{cases}(t+1)(t-x) & (x\leqq t\leqq 2)\\ -(t+1)(t-x) & (0\leqq t\leqq x)\end{cases}$$

であるから

$$f(x)=-\left[\frac{t^3}{3}+\frac{(1-x)t^2}{2}-xt\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}+\frac{(1-x)t^2}{2}-xt\right]_x^2$$
$$=-2\left\{\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)x^2}{2}-x^2\right\}-4x+\frac{14}{3}$$
$$=\frac{1}{3}x^3+x^2-4x+\frac{14}{3}$$

(iii) $2\leqq x$ のとき

$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で，$\left|(t+1)(t-x)\right|=-(t+1)(t-x)$ であるから

$$f(x)=4x-\frac{14}{3}\geqq f(2)=\frac{10}{3}$$

$f(x)$ は $x=0,\ 2$ で連続であるから，(i), (ii), (iii) より，$f(x)$ が最小となるのは $0\leqq x\leqq 2$ のときであり，このとき

$$f'(x)=x^2+2x-4$$

この範囲で，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{5}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

以上より, 最小値は $f\left(-1+\sqrt{5}\right)$ である.

ここで, $f(x)$ を $f'(x)$ で割って次数下げを行う.

$$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-4)(x+1)-\frac{10}{3}x+6$$

より, 最小値は

$$f\left(-1+\sqrt{5}\right)=-\frac{10}{3}(-1+\sqrt{5})+6=\frac{28-10\sqrt{5}}{3}$$

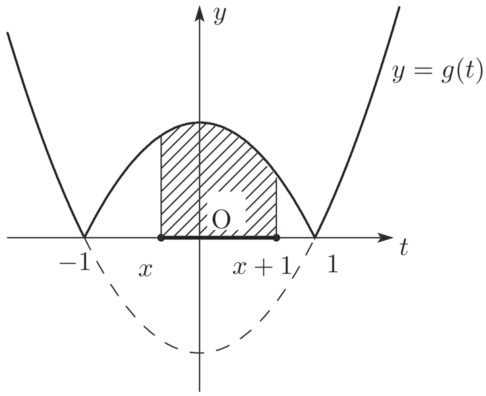
したがって, 求める最小値 $\min\ I_1$ は

$$\min I_1=\boldsymbol{\frac{28-10\sqrt{5}}{3}}\quad \textbf{(}\boldsymbol{x=-1+\sqrt{5}}\ \textbf{のとき)}\qquad \text{(答)}$$

(2) まず, I_2 は x の関数であることに着目する. それを $f(x)$ とする.

$g(t)=\left|t^2-1\right|$ と置くと, $g(-t)=g(t)$ より, $g(t)$ のグラフは $t=0$ に関して対称である.

$y=g(t)$ のグラフは, 図のようになる.



ここで, 積分区間 $x \leqq t \leqq x+1$ に着目する. この幅は常に 1 であり, 区間の中央は $t=x+\frac{1}{2}$ であるから, $x+\frac{1}{2}=0 \iff x=-\frac{1}{2}$ であるとき, 図の斜線部の面積の変化, つまり $I_2=f(x)$ は, $x=-\frac{1}{2}$ に関して対称になる.

そこで, $x \geqq -\frac{1}{2}$ の範囲で考えておけば, $x<-\frac{1}{2}$ の場合は対称性から明らかになる.

t^2-1 の不定積分は, C を積分定数として

$$\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{1}{3}t^3-t+C$$

あるが, 定積分では $C=0$ として一般性を失わないから

$$F(t)=\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{1}{3}t^3-t$$

とする.

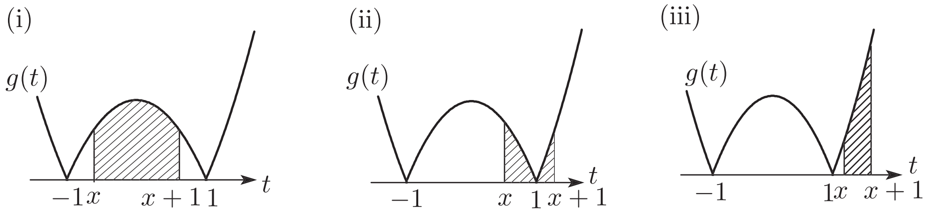
ここで

(i) $x+1 \leqq 1$ つまり $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ のとき

(ii) $x \leqq 1 \leqq x+1$ つまり $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

(iii) $1 \leqq x$ のとき

に場合を分ける．これを図示すると，図のようになる．



(i) $x+1 \leqq 1$　つまり $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} \left\{-(t^2-1)\right\} dt \\ &= \Big[-F(t)\Big]_x^{x+1} = F(x) - F(x+1) \\ &= -x^2 - x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(ii) $x \leqq 1 \leqq x+1$　つまり $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^1 \{-(t^2-1)\}dt + \int_1^{x+1} (t^2-1)dt \\ &= F(x) + F(x+1) - 2F(1) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(iii) $1 \leqq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} (t^2-1)dt \\ &= F(x+1) - F(x) = x^2 + x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

以上より，$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ の下で

$$f(x) = \begin{cases} -\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{12} & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0\right) \\ \dfrac{2}{3}x^3 + x^2 - x + \dfrac{2}{3} & (0 \leqq x \leqq 1) \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{11}{12} & (x \geqq 1) \end{cases}$$

となるから，$f(x)$ について，次が成り立つ．

　$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ では減少し，$x \geqq 1$ では増加する．

$f(x)$ は $x=0$, 1 で連続であるから，$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ の範囲では，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で最小値をとる．

この最小値を求めよう．$f(x)$ を微分して $f'(x) = 2x^2 + 2x - 1$ だから

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \qquad (\because \quad 0 \leqq x \leqq 1)$$

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ として，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小 (最小)	↗	

以上より，$I_2 = f(x)$ を最小にする x は，$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ では，$x = \alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ である．

関数 $f(x)$ の $x = -\dfrac{1}{2}$ に関する対称性を考えると，この α と $x = -\dfrac{1}{2}$ に関して対称な $x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ でも，$f(x)$ は最小になる．

よって求める x の値は

$$x = \boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【4】与式の積分変数は t であり，t にとって x は無関係な定数であるから

$$f_n(x) = 3x^2\int_0^1 tf'_{n-1}(t)dt + 3\int_0^1 f_{n-1}(t)dt$$

と変形できる．

ここで

$$a_n = 3\int_0^1 tf'_{n-1}(t)dt, \quad b_n = 3\int_0^1 f_{n-1}(t)dt$$

と置くと

$$f_n(x) = a_nx^2 + b_n \quad (n \geqq 2)$$

また

$$f'_n(x) = 2a_nx$$

$f_1(x) = 4x^2+1$ より

$$a_1 = 4, \quad b_1 = 1$$

と置く．これより

$$a_n = 3\int_0^1 t(2a_{n-1}t)dt = 2a_{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$b_n = 3\int_0^1 (a_{n-1}t^2 + b_{n-1})dt = a_{n-1} + 3b_{n-1} = 2^n + 3b_{n-1} \qquad (\because \ ①)$$

$$\therefore \quad \frac{b_n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} \quad (n \geqq 2)$$

n を $n+1$ にして，階差数列を作れば

$$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{b_n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \quad \frac{b_n}{3^n} = \frac{b_1}{3} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}} \quad (n \geqq 2)$$

したがって

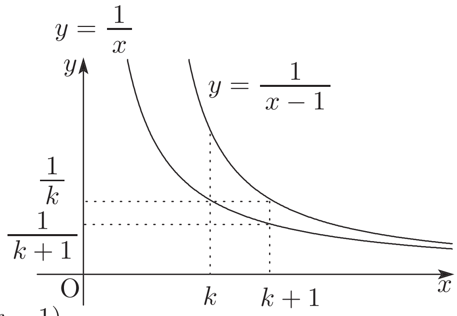
$$\begin{aligned} b_n &= 3^{n-1} + 3^n\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right) \\ &= 3^{n-1} + 4\cdot 3^{n-1} - 2^{n+1} \\ &= 5\cdot 3^{n-1} - 2^{n+1} \quad (n=1 \text{ でも成立.}) \end{aligned}$$

以上より

$$f_n(x) = \boldsymbol{2^{n+1}\cdot x^2 + 5\cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}} \qquad \text{(答)}$$

【5】k を 2 以上の整数とする.

$k \leqq x \leqq k+1$ において右図の面積を比較すると,



$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} < \frac{1}{k} < \int_k^{k+1}\frac{dx}{x-1}$$

$$\therefore\ \Big[\log x\Big]_k^{k+1} < \frac{1}{k} < \Big[\log(x-1)\Big]_k^{k+1}$$

$$\therefore\ \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k} < \log k - \log(k-1)$$

ここで, $\log(k+1) - \log k < \dfrac{1}{k}$ について $1 \leqq k \leqq n$ の和をとると,

$$\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1) - \log k\} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\therefore\ \log(n+1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad \cdots\cdots ①$$

次に, $\dfrac{1}{k} < \log k - \log(k-1)$ について $2 \leqq k \leqq n$ の和をとると,

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \sum_{k=2}^{n}\{\log k - \log(k-1)\}$$

$$\therefore\ \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \log n \qquad \therefore\ 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < 1 + \log n \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② より,

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n \qquad \text{(証明終)}$$

【6】$L = \dfrac{(n+1)^k + (n+2)^k + \cdots + (n+2n)^k}{1^k + 2^k + \cdots + (2n)^k}$ とおき, L の分子, 分母を $n^k (\neq 0)$ で割ると,

$$L = \frac{\dfrac{(n+1)^k + (n+2)^k + \cdots + (n+2n)^k}{n^k}}{\dfrac{1^k + 2^k + \cdots + (2n)^k}{n^k}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{2n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^k}{\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{i}{n}\right)^k} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^k}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{i}{n}\right)^k}$$

となる．そこで，$f(x) = (1+x)^k$，$g(x) = x^k$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^2 f(x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{k+1}(1+x)^{k+1}\right]_0^2 = \frac{1}{k+1}(3^{k+1}-1)$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{i}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} g\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^2 g(x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{k+1}\,x^{k+1}\right]_0^2 = \frac{2^{k+1}}{k+1}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k+(n+2)^k+\cdots+(n+2n)^k}{1^k+2^k+\cdots+(2n)^k} = \frac{\frac{1}{k+1}(3^{k+1}-1)}{\frac{2^{k+1}}{k+1}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3^{k+1}-1}{2^{k+1}}} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1)

$$I_n = \int_0^1 \{1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}\}dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad \text{(証明終)}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ より

$$|g_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1+x}\right| \leqq |x^n| \quad (\because 1 \leqq x+1 \leqq 2)$$

$$\therefore \quad -x^n \leqq g_n(x) \leqq x^n \quad \cdots ①$$

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，①を積分すると

$$\int_0^1 (-x^n)dx \leqq J_n \leqq \int_0^1 x^n dx$$

$$\left[-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{n+1} \leqq J_n \leqq \frac{1}{n+1} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ だから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n=\mathbf{0}$ 　　(答)

(3) $x \fallingdotseq -1$ のとき

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}=\frac{1}{x+1}-g_n(x)$$

したがって, $f_n(x)+g_n(x)=\dfrac{1}{x+1}$ の両辺を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で積分すると

$$I_n+J_n=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\Big[\log(x+1)\Big]_0^1=\log 2$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}(\log 2-J_n)=\mathbf{\log 2} \qquad (答)$$

【8】(1) $f(x)$ の不定積分の1つを $F(x)$ とおくと,

$$\int_0^{-x}f(t)dt=F(-x)-F(0)$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\int_0^{-x}f(t)dt=\frac{d}{dx}\{F(-x)-F(0)\}$$

$$=f(-x)\cdot(-1)\ =\ -f(-x) \qquad (証明終)$$

(2) $f(x)=e^x+\displaystyle\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt$ $\cdots$① の両辺を x で微分すると,

$f'(x)=e^x+f(x)-f(-x)$ $\cdots$②

一方, ①より,

$$f(-x)=e^{-x}+\int_0^{-x}f(t)dt+\int_0^{x}f(t)dt$$

なので, これと ①との辺々の差をとると,

$f(x)-f(-x)=e^x-e^{-x}$

これを ②に代入して,

$f'(x)=e^x+e^x-e^{-x}=\boldsymbol{2e^x-e^{-x}}$ 　　(答)

よって, $f(x)=2e^x+e^{-x}+C$ (C は積分定数) と書けるが, ここで ①において $x=0$ を代入することにより,

$f(0)=1$

を得るので,

$C+3=1 \qquad \therefore\quad C=-2$

すなわち,

$f(x)=\boldsymbol{2e^x+e^{-x}-2}$ 　　(答)

【9】(1) 与えられた 2 曲線を

$$\begin{cases} y = \dfrac{8}{27}x^3 & \cdots\cdots ① \\ y = (x+a)^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

とする．①を微分して

$$y' = \frac{8}{9}x^2$$

①の $x = 3t$ における接線は

$$y = 8t^2(x-3t) + 8t^3 \iff y = 8t^2x - 16t^3 \quad \cdots\cdots ③$$

②, ③より

$$(x+a)^2 = 8t^2x - 16t^3$$
$$\iff x^2 + 2(a-4t^2)x + a^2 + 16t^3 = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

条件より，③は②とも接するので，④ の判別式の条件より

$$(a-4t^2)^2 - a^2 - 16t^3 = 0$$
$$\iff t^2(2t^2 - 2t - a) = 0$$

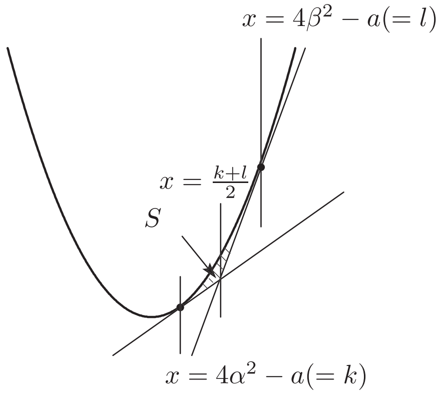
ここで，$t = 0$ のとき③は x 軸となり，このときは ①, ② の共通接線は他には存在しないから，$2t^2 - 2t - a = 0$ が $t \neq 0$ であるような異なる 2 実数解をもつことが必要かつ十分である．

したがって

$$a \neq 0 \text{ かつ } 1 + 2a > 0 \iff \boldsymbol{-\frac{1}{2} < a < 0,\ 0 < a} \quad (答)$$

(2) $2t^2 - 2t - a = 0$ の 2 解を α, β とする．

放物線との接点の x 座標は, ④の重解が $x = 4t^2 - a$ であることから, $4\alpha^2 - a$, $4\beta^2 - a$ と表される．これらをそれぞれ k, l (ただし，$k < l$) と置く．



$y = (x+a)^2$ を微分して $y' = 2(x+a)$ であるから，$x = k$ における接線は

$$y = 2(k+a)(x-k) + (k+a)^2$$
$$\therefore \quad y = 2(k+a)x + a^2 - k^2$$

同様に，$x = l$ における接線は

$$y = 2(l+a)x + a^2 - l^2$$

で，これらの交点の x 座標は $\dfrac{k+l}{2}$

よって

$$S=\int_k^{\frac{k+l}{2}}\left[(x+a)^2-\left\{2(k+a)x+a^2-k^2\right\}\right]dx$$
$$\quad+\int_{\frac{k+l}{2}}^{l}\left[(x+a)^2-\left\{2(l+a)x+a^2-l^2\right\}\right]dx$$
$$=\int_k^{\frac{k+l}{2}}(x-k)^2dx+\int_{\frac{k+l}{2}}^{l}(x-l)^2dx$$
$$=\left[\frac{(x-k)^3}{3}\right]_k^{\frac{k+l}{2}}+\left[\frac{(x-l)^3}{3}\right]_{\frac{k+l}{2}}^{l}$$
$$=\frac{(l-k)^3}{12}$$
$$=\frac{16|\beta^2-\alpha^2|^3}{3}$$
$$=\frac{16|(\alpha+\beta)^3(\beta-\alpha)^3|}{3}$$

ここで

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-\dfrac{a}{2}\\ |\beta-\alpha|=\sqrt{2a+1}\end{cases}$$

であるから

$$S=\boldsymbol{\frac{16}{3}(2a+1)^{\frac{3}{2}}}\qquad\text{(答)}$$

M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠAⅡB

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学T

Z-KAI

会員番号		氏　名	