春期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大物理／難関大物理 T

1章　等加速度運動

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) DE 間を飛行中の小物体 P は x 方向では等速度運動をするから，小物体 P の点 D における速度の x 成分を求めればよい．さらに，小物体 P は点 D で水平方向に飛び出したので，小物体 P の点 D における速さを求めればよい．そこで，点 D を位置エネルギーの基準として，小物体 P の点 D における速さを v_{D} とすると，力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgR=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{D}}}^2+mg\cdot 0 \qquad \therefore\quad v_{\mathrm{D}}=\underline{\sqrt{2gR}}$$

(2) 小物体 P が点 D を飛び出した時刻を $t=0$ とすると，時刻 t における小物体 P の座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_{\mathrm{D}} \\ 0 \end{pmatrix}t+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}t^2 \qquad \therefore\quad \begin{cases} x=\sqrt{2gR}\cdot t & \cdots ① \\ y=H-\dfrac{1}{2}gt^2 & \cdots ② \end{cases}$$

①②より t を消去すると

$$y=H-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\sqrt{2gR}}\right)^2=H-\frac{x^2}{4R} \qquad \therefore\quad \underline{y=-\frac{1}{4R}x^2+H}$$

(3) 直線 DB を表す方程式は $y=-x+H$ であるから，落下点 E はこの直線と (2) の放物線の交点となる．

$$-\frac{1}{4R}x^2+H=-x+H$$

$$x(x-4R)=0 \quad x\fallingdotseq 0\ \text{より} \quad x=4R \qquad \therefore\quad (x_{\mathrm{E}},\ y_{\mathrm{E}})=\underline{(4R,\ H-4R)}$$

■別解　落下点 E は，小物体 P が点 D を飛び出してから $+x$ 向きの移動距離と $-y$ 向きの移動距離が等しくなった点であるから

$$\sqrt{2gR}\cdot t=\frac{1}{2}gt^2 \qquad \therefore\quad t=\sqrt{\frac{8R}{g}}$$

①②より　$x_{\mathrm{E}}=\sqrt{2gR}\cdot\sqrt{\dfrac{8R}{g}}=\underline{4R},\ y_{\mathrm{E}}=H-\dfrac{1}{2}g\left(\sqrt{\dfrac{8R}{g}}\right)^2=\underline{H-4R}$

(4) 点 E を位置エネルギーの基準として，小物体 P の点 E における速さを v_{E} とすると，(3) の結果と，点 C と点 E における力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + mg(R+4R) = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{E}}}^2 + mg\cdot 0 \qquad \therefore\quad v_{\mathrm{E}} = \underline{\sqrt{10gR}}$$

■別解　点 D から点 E に至るまでの時間を T とすると，y 軸方向に $-4R$ 移動したから

$$-4R = -\frac{1}{2}gT^2 \qquad \therefore\quad T = \sqrt{\frac{8R}{g}}$$

よって，y 方向の速度成分を v_y とすると

$$v_y = -gT = -\sqrt{8gR}$$

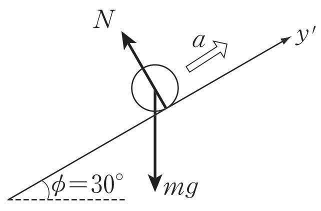
また，$v_x = v_{\mathrm{D}} = \sqrt{2gR}$ であるから

$$v_{\mathrm{E}} = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \underline{\sqrt{10gR}}$$

【2】

《解答》

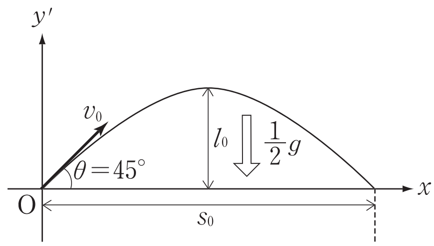
まず，傾角 $\phi = 30^\circ$ の斜面に沿った方向 (y' 軸方向) の加速度を求める．y' 軸方向の加速度を $+y'$ 向きを正として a とすると



$$ma = -mg\sin\phi$$

$$\therefore \quad a = -g\sin\phi = -g\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}g$$

(1) v_0，t_0，s_0 を g，l_0 で表す．



i) v_0 と g，l_0 の関係

$$0^2 - (v_0 \sin 45^\circ)^2 = 2\left(-\frac{1}{2}g\right) l_0$$

$$\therefore \quad v_0 = \underline{\sqrt{2gl_0}}$$

ii) t_0 と g，l_0 の関係 $\Rightarrow$ t_0 と v_0 の関係

$$\text{時間 } t_0 \text{で } y'\text{座標が } 0 \text{ になるので} \quad 0 = v_0 \sin 45^\circ \cdot t_0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}g\right) {t_0}^2$$

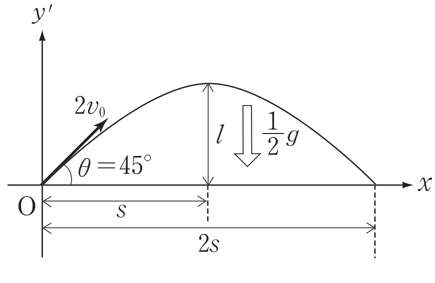
$$\left(\text{時間}\frac{1}{2}t_0\text{で } y'\text{方向の速度が } 0 \text{ になるので} \quad 0 = v_0 \sin 45^\circ + \left(-\frac{1}{2}g\right)\left(\frac{1}{2}t_0\right)\right)$$

$$\therefore \quad t_0 = \frac{4v_0}{\sqrt{2}g} = \frac{4}{\sqrt{2}g} \times \sqrt{2gl_0} = \underline{4\sqrt{\frac{l_0}{g}}}$$

iii) s_0 と g，l_0 の関係 $\Rightarrow$ s_0 と t_0 の関係

$$s_0 = v_0 \cos 45^\circ \cdot t_0 = \sqrt{gl_0} \times 4\sqrt{\frac{l_0}{g}} = \underline{4l_0}$$

(2) 右図のような運動を考え，l，s を l_0 で表す．



(1) における l_0 $\quad\rightarrow\quad$ (2) における l

(1) における $s_0/2$ $\quad\rightarrow\quad$ (2) における s

(1) における v_0 $\quad\rightarrow\quad$ (2) における $2v_0$

(1) において $\quad v_0 = \sqrt{2gl_0}$ $\quad$ より

(2) において $\quad 2v_0 = \sqrt{2gl}$

よって，$\quad 2\sqrt{2gl_0} = \sqrt{2gl} \qquad \therefore \quad l = \underline{4l_0}$

(1) において $\dfrac{s_0}{2} = 2l_0$ より (2) において $s = 2l = \underline{8l_0}$

落下点 C の座標 $(x.\ y)$ の各値を l_0 で表す.

まず, 点 B の高さを求める. 点 B の高さを h とすると

$$h = l\sin 30^\circ = 4l_0 \times \frac{1}{2} = 2l_0$$

落下時間を t とおくと

$$h = 2l_0 = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \therefore \quad t = 2\sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

よって, $$x = 2v_0\cos 45^\circ \cdot t + s = 2\sqrt{gl_0} \times 2\sqrt{\frac{l_0}{g}} + 8l_0 = 12l_0$$

$$y = l\cos 30^\circ = 4l_0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}l_0$$

$$\therefore \quad \mathrm{C}(x,\ y) = \underline{(12l_0,\ 2\sqrt{3}l_0)}$$

【3】

《解答》

(1) 求める加速度の大きさを a とおくと

$$v_{\mathrm{A}}{}^2 - 0^2 = 2ax_{\mathrm{A}} \qquad \therefore \quad a = \underline{\frac{v_{\mathrm{A}}{}^2}{2x_{\mathrm{A}}}}$$

(2) 求める時間を t とすると

$$v_{\mathrm{A}} = at \quad \text{より} \quad t = \frac{v_{\mathrm{A}}}{a} = v_{\mathrm{A}}\left(\frac{2x_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}{}^2}\right) = \underline{\frac{2x_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}}}$$

(3) 信号機 A と B の間では駅と信号機 A との間と同じ割合で速度を減らしたので，加速度は A → B 向きを正として $-a$ であるから

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{B}}{}^2 - v_{\mathrm{A}}{}^2 &= 2(-a)(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) \\ &= 2\left(-\frac{v_{\mathrm{A}}{}^2}{2x_{\mathrm{A}}}\right)(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) = v_{\mathrm{A}}{}^2\left(1 - \frac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}\right) \end{aligned}$$

両辺を $v_{\mathrm{A}}{}^2$ で割ると

$$\frac{v_{\mathrm{B}}{}^2}{v_{\mathrm{A}}{}^2} - 1 = 1 - \frac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}} \qquad \therefore \quad \frac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}} = \underline{2 - \frac{v_{\mathrm{B}}{}^2}{v_{\mathrm{A}}{}^2}}$$

(4) $0 \leqq x \leqq x_{\mathrm{A}}$のとき

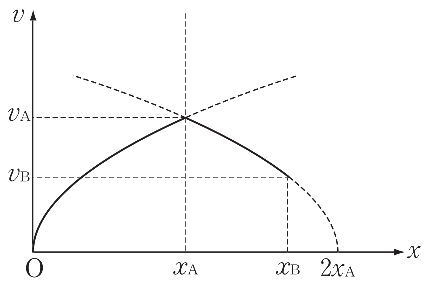
$$v^2 - 0^2 = 2ax$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{2ax} \ \cdots \ \text{頂点}\ (0,\ 0),\ x\ \text{軸を軸とする放物線}\ (x \geqq 0)$$

$x_{\mathrm{A}} \leqq x \leqq x_{\mathrm{B}}$ のとき

$$\begin{aligned} v^2 - v_{\mathrm{A}}{}^2 &= 2(-a)(x - x_{\mathrm{A}}) \\ v^2 &= v_{\mathrm{A}}{}^2 - 2a(x - x_{\mathrm{A}}) = 2ax_{\mathrm{A}} - 2a(x - x_{\mathrm{A}}) = -2a(x - 2x_{\mathrm{A}}) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{-2a(x - 2x_{\mathrm{A}})} \cdots \text{頂点}\ (2x_{\mathrm{A}},\ 0),\ x\ \text{軸を軸とする放物線}\ (x \leqq 2x_{\mathrm{A}})$$



添削課題

《解答》

(1) 物体が最高点に達するまでの時間を t とすると

$$0 = V_0 \sin\theta - gt \qquad \therefore \quad t = \underline{\frac{V_0 \sin\theta}{g}}$$

(2) 物体の達する最高点の高さを h とすると

$$h = V_0 \sin\theta \left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{(V_0 \sin\theta)^2}{2g} \qquad \therefore \quad h = \underline{\frac{(V_0 \sin\theta)^2}{2g}}$$

■別解

$$0^2 - (V_0 \sin\theta)^2 = 2(-g)h \qquad \therefore \quad h = \underline{\frac{(V_0 \sin\theta)^2}{2g}}$$

(3) 発射地点と落下地点との間の距離を L とすると

$$L = V_0 \cos\theta \cdot 2t = V_0 \cos\theta \left(\frac{2V_0 \sin\theta}{g}\right) = \underline{\frac{2{V_0}^2 \sin\theta \cos\theta}{g}} = \underline{\frac{{V_0}^2 \sin 2\theta}{g}}$$

(4) (3) より $L = \dfrac{{V_0}^2 \sin 2\theta}{g}$ ，L が最大となるとき $\sin 2\theta = 1$,

つまり, $\theta = \underline{\dfrac{\pi}{4}}$ のとき L は最大値 $\underline{\dfrac{{V_0}^2}{g}}$

配点

(1)，(2)，(3)20 点
(4) 各 20 点

2章　運動方程式

問題

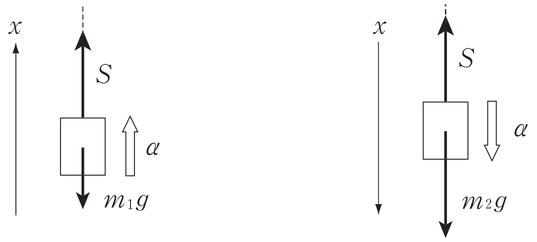
■演習

【1】

《解答》

(1) (ア)

Aの運動方程式　　　　　Bの運動方程式



$\underline{m_1\alpha=-m_1g+S}\cdots①$　　$\underline{m_2\alpha=-S+m_2g}\cdots②$

(イ) ①+②より

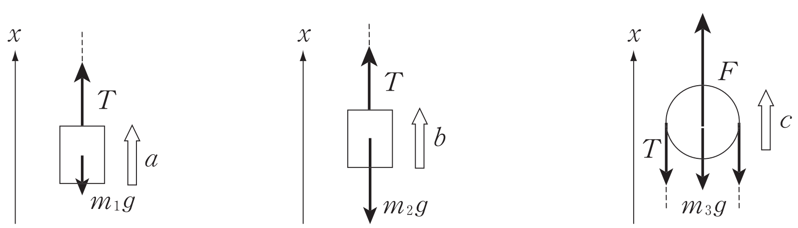
$$(m_1+m_2)\alpha=(m_2-m_1)g$$

$$\therefore\quad \alpha=\underline{\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g}$$

(ウ)　$S=m_1(g+\alpha)=m_1g\left(1+\dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)=\underline{\dfrac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}}$

(2) (ア)

A の運動方程式　　　B の運動方程式　　　C の運動方程式



$\underline{m_1a=-m_1g+T}\cdots③$　$\underline{m_2b=-m_2g+T}\cdots④$　$\underline{m_3c=-m_3g+F+(-2T)}\cdots⑤$

(イ) C から見た A の加速度は $a-c$，C から見た B の加速度は $b-c$
C から見ると A と B は逆向きに同じ大きさの加速度で運動しているから

$$a-c=-(b-c)\qquad\therefore\quad \underline{a+b=2c}\cdots⑥$$

(ウ) ③④⑤より

$$a=\frac{T}{m_1}-g,\qquad b=\frac{T}{m_2}-g,\qquad c=\frac{F-2T}{m_3}-g$$

これらを⑥に代入すると $\quad\left(\frac{T}{m_1}-g\right)+\left(\frac{T}{m_2}-g\right)=2\left(\frac{F-2T}{m_3}-g\right)$

$$\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{4}{m_3}\right)T=\frac{2F}{m_3}\qquad \therefore\quad \underline{T=\frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)m_3+4m_1m_2}F}$$

＜参考＞　(2)(イ) における束縛条件の微分を用いた導出方法

A と B をつなぐ糸の長さは一定であるから

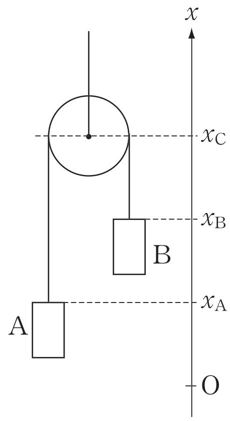
$$(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{A}})+(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{B}})=l\quad (l \text{ は定数})$$

両辺を時間 t で 2 回微分すると

$$(\ddot{x}_{\mathrm{C}}-\ddot{x}_{\mathrm{A}})+(\ddot{x}_{\mathrm{C}}-\ddot{x}_{\mathrm{B}})=0$$

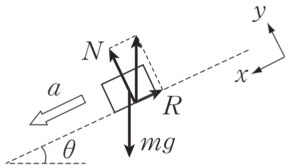
$\ddot{x}_{\mathrm{A}}=a,\ \ddot{x}_{\mathrm{B}}=b,\ \ddot{x}_{\mathrm{C}}=c$ であるから

$$a+b=2c$$



【2】

《解答》



物体 A が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N，摩擦力の大きさを R，加速度の大きさを a とすると，運動方程式は

$$m\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \\ N \end{pmatrix}$$

(1) 物体 A が斜面をすべり始める直前の運動方程式は，静止摩擦係数を μ_0 とすると，$\theta = \theta_1$ のとき，$a = 0$，$R = \mu_0 N$ として

$$m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta_1 \\ -mg\cos\theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_0 N \\ N \end{pmatrix}$$

$N = mg\cos\theta_1$ より

$$mg\sin\theta_1 = \mu_0 mg\cos\theta_1 \qquad \therefore\quad \mu_0 = \underline{\tan\theta_1}$$

(2) 物体 A が斜面をすべっているときの運動方程式は，求める加速度の大きさを a，$\theta = \theta_1$ のとき $R = \mu N$（動摩擦力）として

$$m\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta_1 \\ -mg\cos\theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu N \\ N \end{pmatrix}$$

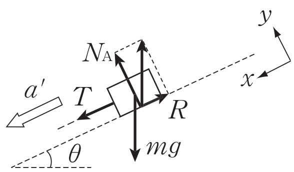
$N = mg\cos\theta_1$ より

$$ma = mg\sin\theta_1 - \mu mg\cos\theta_1 \qquad \therefore\quad a = \underline{(\sin\theta_1 - \mu\cos\theta_1)g\ [\mathrm{m/s^2}]}$$

(3) t_1 秒間にすべった距離を l_1 [m] とすると　$l_1 = \dfrac{1}{2}a{t_1}^2 = \dfrac{1}{2}(\sin\theta_1 - \mu\cos\theta_1)g{t_1}^2$
よって，摩擦によって失われた力学的エネルギーを $\varDelta E_1$ とすると

$$\varDelta E_1 = \mu N l_1 = \mu mg\cos\theta_1 \cdot \frac{1}{2}(\sin\theta_1 - \mu\cos\theta_1)g{t_1}^2$$
$$= \underline{\frac{1}{2}\mu mg^2\cos\theta_1(\sin\theta_1 - \mu\cos\theta_1){t_1}^2\ [\mathrm{J}]}$$

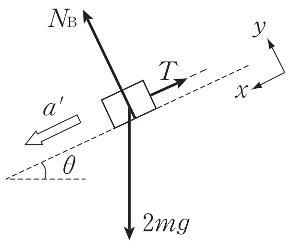
(4)～(7)



物体 A が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N_{A}，摩擦力の大きさを R，張力の大きさを T，加速度の大きさを a' とすると，運動方程式は

$$m\begin{pmatrix} a' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \\ N_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$$

物体 B が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N_B とすると，運動方程式は



$$2m\begin{pmatrix} a' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mg\sin\theta \\ -2mg\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_\mathrm{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) 物体 B の運動方程式において，$a' = 0$ として

$$2m \cdot 0 = 2mg\sin\theta + (-T) \qquad \therefore \quad T = \underline{2mg\sin\theta \text{ [N]}}$$

(5) 物体 A の運動方程式において，$a' = 0$ として

$$m \cdot 0 = mg\sin\theta + (-R) + T \qquad \therefore \quad R = mg\sin\theta + T = \underline{3mg\sin\theta \text{ [N]}}$$

(6) 物体 A の運動方程式において，$\theta = \theta_2$ のとき，$R = \mu N_\mathrm{A}$（動摩擦力）として

$$ma' = mg\sin\theta_2 + T + (-\mu N_A)$$

$N_\mathrm{A} = mg\cos\theta_2$ より

$$ma' = mg\sin\theta_2 + T + (-\mu mg\cos\theta_2) \ \cdots ①$$

物体 B の運動方程式において，$\theta = \theta_2$ のとき

$$2ma' = 2mg\sin\theta_2 + (-T) \ \cdots ②$$

①+②より

$$3ma' = 3mg\sin\theta_2 + (-\mu mg\cos\theta_2) \qquad \therefore \quad \underline{a' = \left(\sin\theta_2 - \frac{1}{3}\mu\cos\theta_2\right) g \text{ [m/s}^2\text{]}}$$

(7) ②より

$$\begin{aligned} T &= 2mg\sin\theta_2 - 2ma' = 2m(g\sin\theta_2 - a') \\ &= 2m\left\{g\sin\theta_2 - \left(\sin\theta_2 - \frac{1}{3}\mu\cos\theta_2\right) g\right\} \qquad \therefore \quad T = \underline{\frac{2}{3}\mu mg\cos\theta_2 \text{ [N]}} \end{aligned}$$

(8) t_2 秒間にすべった距離を l_2[m] とすると　$l_2 = \frac{1}{2}a'{t_2}^2 = \frac{1}{2}\left(\sin\theta_2 - \frac{1}{3}\mu\cos\theta_2\right) g{t_2}^2$

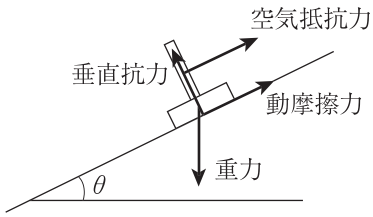
よって，摩擦によって失われた力学的エネルギーを $\varDelta E_2$ とすると

$$\begin{aligned} \varDelta E_2 &= \mu N_\mathrm{A} l_2 = \mu mg\cos\theta_2 \cdot \frac{1}{2}\left(\sin\theta_2 - \frac{1}{3}\mu\cos\theta_2\right) g{t_2}^2 \\ &= \underline{\frac{1}{2}\mu mg^2\cos\theta_2\left(\sin\theta_2 - \frac{1}{3}\mu\cos\theta_2\right){t_2}^2 \text{ [J]}} \end{aligned}$$

【3】

《解答》

(1)



(2) 物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N，斜面に沿って下向きに x 軸，斜面に垂直上向きに y 軸を設定すると

$$M\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mg\sin\theta \\ -Mg\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu N \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -kv \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\theta - \mu N - kv \ \cdots① \\ 0 = -Mg\cos\theta + N \ \cdots② \end{cases}$$

②を①に代入して

$$\underline{Ma = Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta - kv} \ \cdots③$$

(3) $a = 0$ となると物体は等速で運動するから，③に $a = 0$ を代入して

$$0 = Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta - kv \qquad \therefore \quad v = \underline{\frac{Mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{k}}$$

(4) 図 2 の $t = 0$ における接線の傾きより，$v = 0$ のとき $a = 3$ であるから $\theta = 45^\circ$ とともに③に代入して

$$M \cdot 3 = Mg\sin 45^\circ - \mu Mg\cos 45^\circ - k \cdot 0$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{2}}g - \frac{1}{\sqrt{2}}\mu g \qquad \therefore \quad \mu = \underline{1 - \frac{3\sqrt{2}}{g}}$$

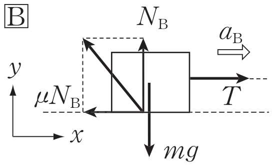
(5) 物体が等速度運動になったとき，つまり $a = 0$ のとき，図 2 より $v = 4$ であるから (3)，(4) の結果より

$$4 = \frac{Mg(\sin 45^\circ - \mu\cos 45^\circ)}{k} \qquad \therefore \quad k = \underline{\frac{3}{4}M}$$

添削課題

《解答》

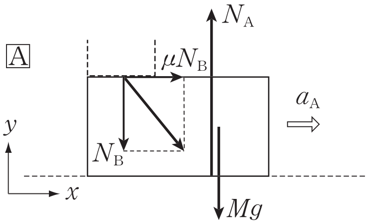
(1) B の加速度の大きさを a_{B}，A から受ける垂直抗力の大きさを N_{B}，糸の張力の大きさを T とすると，運動方程式は



$$m\begin{pmatrix} a_{\mathrm{B}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu N_{\mathrm{B}} \\ N_{\mathrm{B}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ma_{\mathrm{B}} = -\mu N_{\mathrm{B}} + T \ \cdots ① \\ 0 = -mg + N_{\mathrm{B}} \ \cdots ② \end{cases}$$

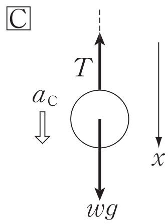
A の加速度の大きさを a_{A}，床から受ける垂直抗力の大きさを N_{A} とすると，運動方程式は



$$M\begin{pmatrix} a_{\mathrm{A}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu N_{\mathrm{B}} \\ -N_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Ma_{\mathrm{A}} = \mu N_{\mathrm{B}} \ \cdots ③ \\ 0 = -Mg + N_{\mathrm{A}} - N_{\mathrm{B}} \ \cdots ④ \end{cases}$$

C の加速度の大きさを a_{C} とすると



$$wa_{\mathrm{C}} = wg + (-T) \ \cdots ⑤$$

束縛条件より $a_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{C}}$

ここで，③に②を代入して

$$Ma_{\mathrm{A}} = \mu mg \qquad \therefore \quad \underline{a_{\mathrm{A}} = \frac{\mu mg}{M}\ [\mathrm{m/s^2}]}$$

(2) ①に②を代入して　$ma_{\mathrm{B}} = -\mu mg + T \ \cdots ⑥$

$a_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{C}}$ であることと，⑤+⑥より

$$(m+w)a_{\mathrm{B}} = wg - \mu mg \qquad \therefore \quad a_{\mathrm{B}} = \underline{a_{\mathrm{C}} = \frac{w-\mu m}{m+w}g\ [\mathrm{m/s^2}]}$$

(3) C が距離 h [m] 落下する時間を t [s] とおくと

$$\frac{1}{2}a_{\mathrm{C}}t^2 = h = \frac{1}{2}a_{\mathrm{B}}t^2$$

B が A の上を滑った距離は，B の机に対する移動距離と A の机に対する移動距離の差なので

$$\frac{1}{2}a_{\mathrm{B}}t^2 - \frac{1}{2}a_{\mathrm{A}}t^2 = h - \frac{a_{\mathrm{A}}}{a_{\mathrm{B}}}h = \left(1 - \frac{\mu mg}{M} \Big/ \frac{w-\mu m}{m+w}g\right)h$$

$$= \underline{\frac{Mw - \mu m(M+m+w)}{M(w-\mu m)}h}$$

配点

(1)40 点　(2)30 点　(3)30 点

3章　力学的エネルギー

問題

■演習

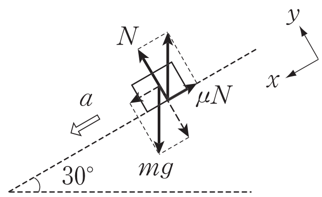
【1】

《解答》

(1) 求める加速度の大きさを a，物体 M が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N として，図のように座標軸をとると，物体 M の運動方程式は

$$m\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin 30^\circ \\ -mg\cos 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} ma = mg\sin 30^\circ - \mu N & \cdots\cdots ① \\ 0 = -mg\cos 30^\circ + N & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



② より $N = \dfrac{\sqrt{3}}{2}mg \qquad \cdots\cdots ③$

③ を ① に代入すると

$$ma = \frac{1}{2}mg - \frac{\sqrt{3}\mu mg}{2} \qquad \therefore \quad a = \frac{1-\sqrt{3}\mu}{2}g\ [\mathrm{m/s^2}]$$

(2) C 点を重力による位置エネルギーの基準とし，求める速さを v とすると，エネルギーと外力 (動摩擦力) がした仕事の関係より

$$mg\cdot 3L\sin 30^\circ - \mu mg\cos 30^\circ \times 2L = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{(3-2\sqrt{3}\mu)gL}\ [\mathrm{m/s}]$$

(3) 物体 M が CD 間で静止した位置を重力による位置エネルギーの基準として，求めるバネの弾性エネルギーを E とすると，力学的エネルギー保存より

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mg\cdot 0.2L\sin 30^\circ$$

$$= \frac{8-5\sqrt{3}\mu}{5}mgL\ [\mathrm{J}]$$

(4) 物体 M が A 点から静かに滑り始めてから，バネと衝突して G 点で静止するまでの物体 M の位置エネルギーの減少量は，物体 M が運動している間に外力 (動摩擦力) が物体 M にした仕事に等しいので，求める距離を x とすると

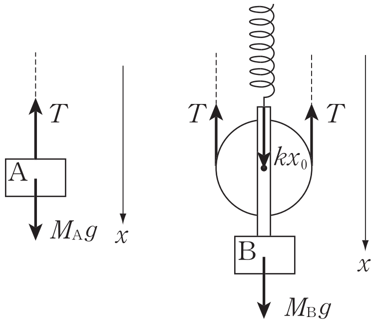
$$mg(2L-x)\sin 30^\circ = \mu mg(2L+x)\cos 30^\circ$$

$$\therefore \quad x = \frac{1-\sqrt{3}\mu}{1+\sqrt{3}\mu}\cdot 2L\ [\mathrm{m}]$$

【2】

《解答》

(1) $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$



ばねの縮みを x_0，糸の張力の大きさを T とすると，板が離れたときの A，B と動滑車に働く力のつり合いより

$$M_\mathrm{A}\cdot 0 = M_\mathrm{A}g + (-T) \quad \cdots ①$$

$$M_\mathrm{B}\cdot 0 = M_\mathrm{B}g + kx_0 + (-2T) \quad \cdots ②$$

② に ① を代入して　$x_0 = \dfrac{(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})g}{k}$

よって，おもり A は距離　$2x_0 = \underline{\dfrac{2(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})g}{k}}$ 下降,

動滑車は　$x_0 = \underline{\dfrac{(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})g}{k}}$ だけ上昇している.

$\boxed{\text{ウ}}$　ばねに蓄えられた弾性エネルギー　$U_k = \dfrac{1}{2}k{x_0}^2 = \underline{\dfrac{(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})^2g^2}{2k}}$

$\boxed{\text{エ}}$　位置エネルギーの変化量

$$\Delta U_g = -M_\mathrm{A}g(2x_0) + M_\mathrm{B}gx_0 = -(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})gx_0 = -\frac{(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})^2g^2}{k}$$

よって，位置エネルギーの減少量　$|\Delta U_g| = \underline{\dfrac{(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})^2g^2}{k}}$

$\boxed{\text{オ}}$　[A，B，ばねからなる系における力学的エネルギーの変化量] = [板が A にした仕事] より

[A が板にした仕事] = − [板が A にした仕事]

$$= -(U_k + \Delta U_g)$$

$$= -\left\{\frac{(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})^2g^2}{2k} - \frac{(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})^2g^2}{k}\right\} = \underline{\frac{(2M_\mathrm{A} - M_\mathrm{B})^2g^2}{2k}}$$

(2) $\boxed{\text{カ}}$ ばねが自然長のときのAとBの高さをそれぞれの重力による位置エネルギーの基準とし，Aが下降する距離の最大値を x_1 とすると，A，B，ばねからなる系における力学的エネルギー保存より

$$\left(\frac{1}{2}M_{\mathrm{A}}\cdot 0^2 + M_{\mathrm{A}}g\cdot 0\right) + \left(\frac{1}{2}M_{\mathrm{B}}\cdot 0^2 + M_{\mathrm{B}}g\cdot 0\right) + \frac{1}{2}k\cdot 0^2$$
$$= \left\{\frac{1}{2}M_{\mathrm{A}}\cdot 0^2 + M_{\mathrm{A}}g(-x_1)\right\} + \left\{\frac{1}{2}M_{\mathrm{B}}\cdot 0^2 + M_{\mathrm{B}}g\left(\frac{x_1}{2}\right)\right\} + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_1}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad x_1 = \underline{\frac{4(2M_{\mathrm{A}} - M_{\mathrm{B}})g}{k}}(= 4x_0)$$

＜参考＞ $\boxed{\text{カ}}$ A，Bはつり合いの位置を中心として単振動するから，Aの振動の中心は初めの位置から $2x_0$ 下の位置であり，最下点は $4x_0$ 下の位置である．よって，$4x_0 = \underline{\frac{4(2M_{\mathrm{A}} - M_{\mathrm{B}})g}{k}}$ 下降する．

$\boxed{\text{キ}}$ 速さが最大となるのは振動の中心の位置であるから $2x_0 = \underline{\frac{2(2M_{\mathrm{A}} - M_{\mathrm{B}})g}{k}}$ 下降したところ．

【3】

《解答》

(1) B についての運動方程式は，求める糸の張力を T とすると

$$ma = T - mg \qquad \therefore \quad T = \underline{m(a+g)} \quad \cdots①$$

(2) A についての運動方程式は，求める A の質量を M とすると

$$Ma = Mg - T$$

① より

$$Ma = Mg - m(a+g)$$

$$\therefore \quad M = \underline{\frac{m(g+a)}{g-a}} \quad \cdots②$$

(3) 仕事とエネルギーの関係から，B の運動エネルギーの増加量は $(T-mg)h$ である. これに①を代入すると

$$\begin{aligned}(T-mg)h &= \{m(a+g)-mg\}h \\ &= \underline{mah}\end{aligned}$$

(4) 重力がした仕事の和は $(M-m)gh$ であるから，これに②を代入すると

$$(M-m)gh = \underline{\frac{2a}{g-a}mgh}$$

(5) QO 間，SO 間の糸の張力を T_1，T_2 とすると，糸の結び目の鉛直方向，水平方向の力のつり合いから

$$\begin{cases} T_1\cos\theta_1 + T_2\cos\theta_2 = mg \\ T_1\sin\theta_1 = T_2\sin\theta_2 \end{cases}$$

$\cos\theta_1 = \dfrac{4}{5}$, $\cos\theta_2 = \dfrac{3}{5}$であることから, $\sin\theta_1 = \dfrac{3}{5}$, $\sin\theta_2 = \dfrac{4}{5}$より

$$\begin{cases} \dfrac{4}{5}T_1 + \dfrac{3}{5}T_2 = mg \quad \cdots③ \\ \dfrac{3}{5}T_1 = \dfrac{4}{5}T_2 \quad \cdots④ \end{cases}$$

X の質量を M_{X}，Y の質量を M_{Y} とすると，X，Y，C が静止しているので，それぞれの糸の張力は X，Y それぞれにかかる重力と等しいことと，④より

$$\frac{M_{\mathrm{X}}g}{M_{\mathrm{Y}}g} = \frac{T_1}{T_2} = \underline{\frac{4}{3}}(\text{倍})$$

(6) X，Y にかかる糸の張力の和を T_t，求める X と Y の質量の和を M_t とすると，(5) の結果より $T_1=\dfrac{4}{7}T_t$，$T_2=\dfrac{3}{7}T_t$ であることと，X，Y にかかる糸の張力の和は X，Y にかかる重力の和と等しいことから $M_t g{=}T_t$ が成り立つこと，および③より

$$\frac{16}{35}M_t g+\frac{9}{35}M_t g=mg$$
$$\therefore\quad M_t=\underline{\frac{7}{5}m}$$

(7) 問題文より，X の位置エネルギーの変化量は $-\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}\varDelta zT_1$，Y の位置エネルギーの変化量は $-\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{OS}}}\varDelta zT_2$ と表される．したがって，求める変化量を U とすると

$$U=-\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}\varDelta zT_1-\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{OS}}}\varDelta zT_2$$

$\cos\theta_1=\dfrac{4}{5}$ より $\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}=\dfrac{4}{5}$, $\cos\theta_2=\dfrac{3}{5}$ より $\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{OS}}}=\dfrac{3}{5}$ であるから, ③より

$$\begin{aligned}U&=-\frac{4}{5}\varDelta zT_1-\frac{3}{5}\varDelta zT_2\\&=-\varDelta z\left(\frac{4}{5}T_1+\frac{3}{5}T_2\right)\\&=\underline{-mg\varDelta z}\end{aligned}$$

添削課題

《解答》

(1) A についての運動方程式は，ひもの張力の大きさを T_0，垂直抗力の大きさを N とすると

$$M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Mg\sin\theta\\-Mg\cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-T_0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}0=Mg\sin\theta-T_0 \ \cdots ① \\ 0=-Mg\cos\theta+N\end{cases}$$

B についての運動方程式は，求める力の大きさを F とすると

$$m\cdot 0=Mg\sin\theta+(-F)+(-mg) \ \cdots ②$$

②より　$0=Mg\sin\theta+(-F)+(-mg)$　　$\therefore$　$\underline{F=(M\sin\theta-m)g}$

(2) A についての運動方程式は

$$M\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Mg\sin\theta\\-Mg\cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-T\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\underline{Ma=Mg\sin\theta-T} \ \cdots ③ \\ 0=-Mg\cos\theta+N\end{cases}$$

B についての運動方程式は

$$ma=T+(-mg) \ \cdots ④$$

(3) ③④より　$(M+m)a=Mg\sin\theta-mg$　　$\therefore$　$\underline{a=\dfrac{M\sin\theta-m}{M+m}g}$

(4) A についての運動方程式は，ひもの張力の大きさを T'，加速度の大きさを a' とすると

$$M\begin{pmatrix}a'\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Mg\sin\theta\\-Mg\cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\mu'N\\N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-T'\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}Ma'=Mg\sin\theta-\mu'N-T' \ \cdots ⑤ \\ 0=-Mg\cos\theta+N \ \cdots ⑥\end{cases}$$

B についての運動方程式は

$$ma'=T'+(-mg) \ \cdots ⑦$$

⑤⑥⑦より

$$(M+m)a'=Mg\sin\theta-\mu'Mg\cos\theta-mg$$

$$\therefore \quad a'=\frac{(\sin\theta-\mu'\cos\theta)M-m}{M+m}g$$

⑦より　$T'=m(a'+g)=\underline{\dfrac{(\sin\theta-\mu'\cos\theta+1)Mmg}{M+m}}$

(5) l_1 滑った直後の速さを v とすると

$$v^2 - 0^2 = 2al_1 \cdots ⑧ \qquad 0^2 - v^2 = 2a'l_2 \cdots ⑨$$

⑧⑨より　$l_2 = -\dfrac{a}{a'}l_1 = \underline{\dfrac{M\sin\theta - m}{(\mu'\cos\theta - \sin\theta)M + m}l_1}$

(6) A は $(l_1 + l_2)\sin\theta$ 下降，B は $l_1 + l_2$ 上昇するから，系の力学的エネルギーの変化量は

$$\frac{1}{2}M \cdot 0^2 + Mg\{-(l_1 + l_2)\sin\theta\} + mg(l_1 + l_2) - \left(\frac{1}{2}M \cdot 0^2 + Mg \cdot 0 + mg \cdot 0\right)$$
$$= \underline{-(M\sin\theta - m)g(l_1 + l_2)}$$

(7) 摩擦力がした仕事は　$\underline{-\mu' Mg\cos\theta \cdot l_2}$

＜参考＞　(6)(7) より，エネルギーと仕事の関係からも (5) の l_2 が決まる

$$-(M\sin\theta - m)g(l_1 + l_2) = -\mu' Mg\cos\theta \cdot l_2$$
$$\therefore \quad (\mu' M\cos\theta - M\sin\theta + m)gl_2 = (M\sin\theta - m)gl_1$$
$$\therefore \quad l_2 = \frac{M\sin\theta - m}{(\mu'\cos\theta - \sin\theta)M + m}l_1$$

配点

(1)〜(6) 各 15 点　(7)10 点

４章　運動量

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) ボールを 1.0 m の高さから水平でなめらかな床面に静かに落として 0.50 m の高さまではね上がったときの，最初の高さを $h_{\rm A}$ =1.0 m，最後に達した高さを $h_{\rm B}$ =0.50 m，はね返る直前の速さを $v_{\rm A}$，はね返った直後の速さを $v_{\rm B}$ とすると，ボールの質量を m [kg] として，力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgh_{\rm A}=\frac{1}{2}m{v_{\rm A}}^2+mg\cdot 0 \qquad \therefore \quad v_{\rm A}=\sqrt{2gh_{\rm A}}$$
$$\frac{1}{2}m{v_{\rm B}}^2+mg\cdot 0=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgh_{\rm B} \qquad \therefore \quad v_{\rm B}=\sqrt{2gh_{\rm B}}$$
$$\therefore \quad e=\frac{v_{\rm B}}{v_{\rm A}}=\frac{\sqrt{2gh_{\rm B}}}{\sqrt{2gh_{\rm A}}}=\frac{\sqrt{h_{\rm B}}}{\sqrt{h_{\rm A}}}=\frac{\sqrt{0.50}}{\sqrt{1.0}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\fallingdotseq \underline{0.71}$$

(2) 床面と 45° の角をなす方向に床面からボールを初速 v_1，つまり鉛直方向の初速 $v_1\sin 45°$ で投げ上げると，h_1 =5.0 m として

$$0^2-(v_1\sin 45°)^2=2(-g)h_1$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2}{v_1}^2=2\times 9.8\times 5.0 \qquad \therefore \quad v_1=\sqrt{2\times 2\times 9.8\times 5.0}=\underline{14\,\rm m/s}$$

(3) 高さが 0 になるまでの時間が t_1 なので

$$0=v_1\sin 45°\cdot t_1+\frac{1}{2}(-g){t_1}^2$$

$t_1 \neq 0$ であるから

$$t_1=\frac{2v_1\sin 45°}{g}=\frac{2\times 14}{9.8\times\sqrt{2}}\fallingdotseq \underline{2.0\,\rm s}$$

また，水平方向には等速で運動するから

$$d_1=v_1\cos 45°\cdot t_1=\frac{14}{\sqrt{2}}\times\frac{2\times 14}{9.8\times\sqrt{2}}=\underline{20\,\rm m}$$

(4) (1) より

$$e=\frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}}=\frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}} \qquad \therefore \quad h_2=e^2h_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\times 5.0=\underline{2.5\,\rm m}$$

また，1 回目に床に衝突する直前の速度の鉛直成分も $v_1\sin 45°$ であるから，衝突した直後の速度の鉛直成分は $ev_1\sin 45°$ となり，水平方向の運動は速さ $v_1\cos 45°$ の等速度運動であるから

$$\tan\theta_2=\frac{ev_1\sin 45°}{v_1\cos 45°}=e\fallingdotseq \underline{0.71}$$

【2】

《解答》

(1) 衝突直前の P の速さを v_{P} [m/s] とし，位置エネルギーの基準を AB とすると，力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgl(1-\cos 60^\circ)=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}^2+mg\cdot 0 \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{P}}=\underline{\sqrt{gl}\,[\mathrm{m/s}]}$$

(2) Q の質量を M [kg]，衝突直後の Q の速さを v_{Q} [m/s] とすると，運動量保存より

$$mv_{\mathrm{P}}+M\cdot 0=m\cdot 0+Mv_{\mathrm{Q}} \qquad \therefore \quad Mv_{\mathrm{Q}}=m\sqrt{gl}\ \cdots ①$$

反発係数が 3/5 なので

$$\frac{3}{5}=-\frac{0-v_{\mathrm{Q}}}{v_{\mathrm{P}}-0} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{Q}}=\frac{3}{5}\sqrt{gl}\ \cdots ②$$

①②より　$M=\underline{\frac{5}{3}m\,[\mathrm{kg}]}$

(3) Q と壁の衝突は弾性衝突であるから，Q が壁に衝突した直後の Q の速さは v_{Q} であり，衝突した直後の運動方向（図の右向き）を正とすると，Q が壁から受けた力積は Q の運動量の変化量に等しいから

$$|\,Mv_{\mathrm{Q}}-M(-v_{\mathrm{Q}})\,|=2Mv_{\mathrm{Q}}=\underline{2m\sqrt{gl}\,[\mathrm{N\cdot s}]}$$

(4) 2 度目の P と Q の衝突直後の P と Q の速度を右向きを正として v_{P}'，v_{Q}' とおくと，運動量保存より

$$m\cdot 0+Mv_{\mathrm{Q}}=mv_{\mathrm{P}}'+Mv_{\mathrm{Q}}' \qquad \therefore \quad mv_{\mathrm{P}}'+Mv_{\mathrm{Q}}'=m\sqrt{gl}\ \cdots ③$$

反発係数が 3/5 なので

$$\frac{3}{5}=-\frac{v_{\mathrm{P}}'-v_{\mathrm{Q}}'}{0-v_{\mathrm{Q}}} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{P}}'-v_{\mathrm{Q}}'=\frac{9}{25}\sqrt{gl}\ \cdots ④$$

③④より　$|v_{\mathrm{P}}'|=\frac{3}{5}\sqrt{gl}$，$|v_{\mathrm{Q}}'|=\frac{6}{25}\sqrt{gl}$　$\therefore$　$\frac{|v_{\mathrm{P}}'|}{|v_{\mathrm{Q}}'|}=\underline{\frac{5}{2}\,(倍)}$

(5) 2 度目の衝突後の P の高さの最大値を h [m] とし，位置エネルギーの基準を AB とすると，力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}'^2+mg\cdot 0=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+mgh \qquad \therefore \quad h=\underline{\frac{9}{50}l\,[\mathrm{m}]}$$

【3】

《解答》

(1) 小物体 A とばねの系における力学的エネルギー保存より，求める速度を v とすると

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}ka^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\cdot 0^2 \qquad \therefore \quad v=\underline{a\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

(2) 衝突直後の小物体 A と小物体 B の速度を v_{A}，v_{B} とすると, 運動量保存より

$$mv+m\cdot 0=mv_{\mathrm{A}}+mv_{\mathrm{B}} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{A}}+v_{\mathrm{B}}=v \ \cdots ①$$

反発係数の式より

$$e=-\frac{v_{\mathrm{A}}-v_{\mathrm{B}}}{v-0} \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{A}}-v_{\mathrm{B}}=-ev \ \cdots ②$$

①②より $\quad v_{\mathrm{A}}=\dfrac{1-e}{2}v=\underline{\dfrac{(1-e)a}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

(3) (2) より

$$v_{\mathrm{B}}=v-v_{\mathrm{A}}=\frac{(1+e)a}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

であり, 小物体 B が小物体 A から受けた力積は小物体 B の運動量の変化量に等しいので

$$mv_{\mathrm{B}}-m\cdot 0=\underline{\frac{(1+e)a}{2}\sqrt{km}}$$

(4) 小物体 B の運動量の変化量は摩擦力による力積に等しいので, 求める時間を t とおくと

$$m\cdot 0-mv_{\mathrm{B}}=-\mu' mgt \qquad \therefore \quad t=\underline{\frac{(1+e)a}{2\mu' g}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

(5) 小物体 A の力学的エネルギーの変化量は摩擦力の仕事に等しいので, 求める距離を l とおくと

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}kl^2-\left(\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2+\frac{1}{2}k\cdot 0^2\right)=-\mu' mgl$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}kl^2+\mu' mgl-\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2=0$$

$$\therefore \quad l=\frac{-\mu' mg+\sqrt{(\mu' mg)^2+km{v_{\mathrm{A}}}^2}}{k}=\underline{\frac{-\mu' mg}{k}+\sqrt{\left(\frac{\mu' mg}{k}\right)^2+\left(\frac{1-e}{2}a\right)^2}}$$

(6) 力のつり合いより, 小物体 A に働く静止摩擦力の大きさはばねの弾性力の大きさに等しいので, 静止摩擦力が最大摩擦力を超えないとき

$$kl\leqq \mu mg$$

$$\therefore \quad \mu\geqq\frac{k}{mg}l=\underline{-\mu'+\sqrt{\mu'^2+\left\{\frac{(1-e)ka}{2mg}\right\}^2}}$$

添削課題

《解答》

(1) 小球が壁面と衝突する直前の速度の水平，鉛直成分の大きさをそれぞれ v_x，v_y，衝突直後の速度の水平，鉛直成分の大きさをそれぞれ $v_x{}'$，$v_y{}'$ とすると，

$$v_x = v\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v,\ v_y = v\cos 60^\circ = \frac{1}{2}v$$

はねかえり係数が $\frac{1}{2}$ なので

$$v_x{}' = \frac{1}{2}v_x = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4}v\,[\mathrm{m/s}]}$$

(2) 壁に摩擦がないので

$$v_y{}' = v_y = \underline{\frac{1}{2}v\,[\mathrm{m/s}]}$$

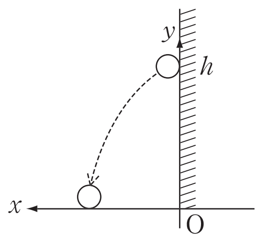
(3) (1)(2) より，はね返った直後の速さを v' とすると

$$v' = \sqrt{(v_x{}')^2 + (v_y{}')^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}v\right)^2 + \left(\frac{1}{2}v\right)^2} = \underline{\frac{\sqrt{7}}{4}v\,[\mathrm{m/s}]}$$

はね返った方向は

$$\tan\theta = \frac{v_x{}'}{v_y{}'} = \frac{\sqrt{3}}{4}v \Big/ \frac{1}{2}v = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(4) 図のように座標軸をとり，衝突してからの時間を $t\,[\mathrm{s}]$，衝突点の床からの高さを $h\,[\mathrm{m}]$ とすると



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4}v \\ -\frac{1}{2}v \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$

よって，壁から落下点までの距離は

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4}v \times 2 = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}v\,[\mathrm{m}]}$$

(5)

$$y = h - \frac{1}{2}v \times 2 - \frac{1}{2}g \times 2^2 = 0 \qquad \therefore \quad h = \underline{v + 2g\,[\mathrm{m}]}$$

配点

(1)(2) 各 20 点　(3) 各 15 点　(4)(5) 各 15 点

5章　総合演習

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) (a) P と Q を 1 つの物体とみなすと，斜面に平行な方向の運動方程式より

$$(m+M)\cdot 0=(m+M)g\sin\theta+(-ks)\qquad\therefore\quad s=\underline{\frac{(m+M)g\sin\theta}{k}\ [\mathrm{m}]}$$

(b) $U=\dfrac{1}{2}ks^2=\underline{\dfrac{(m+M)^2g^2\sin^2\theta}{2k}\ [\mathrm{J}]}$

(2) (a) (ア) (イ) x 軸方向の運動方程式より

$$\mathrm{P}：Ma=-Mg\sin\theta+k(s-x)-f\ \cdots ①$$

$$\mathrm{Q}：ma=-mg\sin\theta+f\ \cdots ②$$

①+②より

$$\begin{aligned}(M+m)a&=-(M+m)g\sin\theta+k(s-x)\\&=-(M+m)g\sin\theta+k\left\{\frac{(m+M)g\sin\theta}{k}-x\right\}\\&=-kx\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a=\underline{-\frac{kx}{M+m}\ [\mathrm{m/s^2}]}$$

②より

$$f=ma+mg\sin\theta=m\left(-\frac{kx}{M+m}\right)+mg\sin\theta=\underline{-\frac{mkx}{M+m}+mg\sin\theta\ [\mathrm{N}]}$$

(b) (ア) Q が P から離れるとき，$f<0$ となるから

$$f=-\frac{mkx}{M+m}+mg\sin\theta<0\qquad\therefore\quad\frac{(M+m)g\sin\theta}{k}<x$$

つまり，自然長の位置まで振動が達すればよいから

$$\therefore\quad\underline{\frac{(M+m)g\sin\theta}{k}<d}$$

(イ) 原点を位置エネルギーの基準とすると，力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}(M+m)\cdot 0^2+(M+m)g(-d\sin\theta)+\frac{1}{2}k(s+d)^2=\frac{1}{2}(M+m)v^2+(M+m)gs\sin\theta+\frac{1}{2}k\cdot 0^2$$

ここで，$(m+M)g\sin\theta = ks$ であるから

$$-ksd + \frac{1}{2}k(s+d)^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + ks^2$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = -\frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{2}kd^2 \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{k}{M+m}(d^2 - s^2)}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{k}{M+m}\left\{d^2 - \frac{(m+M)^2 g^2 \sin^2\theta}{k^2}\right\}} = \underline{\sqrt{\frac{d^2k^2 - (m+M)^2 g^2 \sin^2\theta}{(m+M)k}}}$$

■別解　単振動のエネルギー保存より

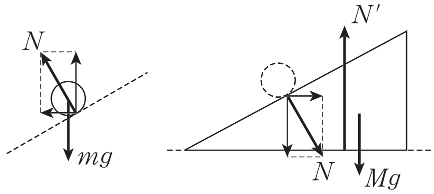
$$\frac{1}{2}(M+m)\cdot 0^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}ks^2 \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{k}{M+m}(d^2 - s^2)}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{k}{M+m}\left\{d^2 - \frac{(m+M)^2 g^2 \sin^2\theta}{k^2}\right\}} = \underline{\sqrt{\frac{d^2k^2 - (m+M)^2 g^2 \sin^2\theta}{(m+M)k}}}$$

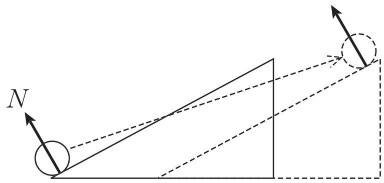
【2】

《解答》

＜参考＞　小物体と三角台に働く運動方向 (水平方向) の力は互いに及ぼし合う垂直抗力 N の水平成分のみであるから，小物体と三角台の系の水平方向の運動量の和が保存される．・・・系の運動量の和の水平成分の保存



垂直抗力が小物体と三角台に対して仕事をするので，小物体と三角台それぞれの力学的エネルギーは保存されないが，小物体と三角台の系においては非保存力が仕事をしないので力学的エネルギーは保存される．・・・系の力学的エネルギー保存



(1) 最高点に達したとき, 小物体は三角台に対して静止し，小物体と三角台の速度は等しくなるから，その速度を v とすると，系の運動量の和の水平成分の保存より

$$mv_0 + M \cdot 0 = mv + Mv \qquad \therefore \quad v = \underline{\frac{m}{m+M}v_0}$$

(2) 最高点での小物体の床からの高さを h とすると，小物体と三角台からなる系の力学的エネルギー保存より

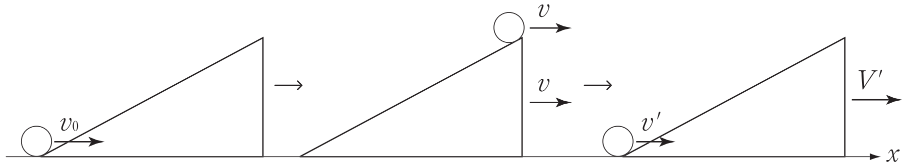
$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}M \cdot 0^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + mgh$$

$$\therefore \quad mgh = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$= \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2$$

$$\therefore \quad h = \underline{\frac{M{v_0}^2}{2(m+M)g}}$$

(3)



小物体が再び床に達した後の, 小物体と三角台の床に対する速度の水平方向成分をそれぞれ v'，V' とすると

水平方向の運動量保存より　　　$mv_0 + M \cdot 0 = mv' + MV' \ \cdots$①

系の力学的エネルギー保存より　$\dfrac{1}{2}m{v_0}^2+\dfrac{1}{2}M\cdot 0^2=\dfrac{1}{2}m(v')^2+\dfrac{1}{2}M(V')^2$ $\cdots$②

①より　$V'=\dfrac{m(v_0-v')}{M}$

上式を②に代入すると

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2=\frac{1}{2}m(v')^2+\frac{1}{2}M\left\{\frac{m(v_0-v')}{M}\right\}^2$$

整理すると　$(m+M)(v')^2-2mv_0v'+(m-M){v_0}^2=0$

$$\therefore\quad (v'-v_0)\{(m+M)v'-(m-M)v_0\}=0$$

$v'<V'$　より　$v'\neq v_0$ であるから

$$v'=\underline{\frac{m-M}{m+M}v_0},\qquad V'=\underline{\frac{2m}{m+M}v_0}$$

(4) 三角台が小物体に与えた力積を I とすると，力積は小物体の運動量の変化量に等しいので，求める力積の大きさは

$$|I|=|mv'-mv_0|=\left|-\frac{2mMv_0}{m+M}\right|=\underline{\frac{2mMv_0}{m+M}}$$

(5) この衝突の反発係数を e とすると

$$e=-\frac{v'-V'}{v_0-0}=-\frac{\dfrac{m-M}{m+M}v_0-\dfrac{2m}{m+M}v_0}{v_0}=\underline{1}$$

（衝突前後で系の力学的エネルギーが保存される衝突は弾性衝突である）

＜参考＞　(3) より

$$V'>0,\ v'=\begin{cases}>0\ (m>M)\cdots\text{右向きに運動}\\ =0\ (m=M)\cdots\text{静止（}V'=v_0\text{）}\\ <0\ (m<M)\cdots\text{左向きに運動}\end{cases}$$

さらに (5) より，質量の等しい 2 物体が ($m=M$ のとき)，$e=1$ で衝突 (弾性衝突) するとき，速度交換が起こる．

【3】

《解答》

(1) (a) 物体と箱は火薬から大きさが等しく逆向きの力を受けるので，水平方向の運動量が保存されるから

$$m\cdot 0+M\cdot 0=mv+MV$$
$$\therefore\quad V=-\frac{m}{M}v\ \cdots ①$$

箱を床に固定して火薬を爆発させたところ，爆発直後の物体の速度は v_0 であったので，火薬の爆発によって，物体が得るエネルギーは $\frac{1}{2}m{v_0}^2$ であり，題意より，火薬の爆発によって箱と物体に与えられる全運動エネルギーは常に一定であるから

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2\ \cdots ②$$

①を②に代入し，整理すると

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M}v\right)^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2$$
$$\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m+M}{M}\right)=\frac{1}{2}m{v_0}^2$$

$v>0$ より $\quad\therefore\quad \underline{v=v_0\sqrt{\frac{M}{m+M}}},\qquad V=-\frac{m}{M}v=\underline{-\frac{mv_0}{\sqrt{M(m+M)}}}$

(b) 水平方向においては，箱と物体からなる系には外力による力積を受けないことから，系の運動量の和の水平成分が保存されるから

$$m\cdot 0+M\cdot 0=mv+MV=mv'+MV'\ \cdots ③$$

衝突は弾性衝突であるから

$$-\frac{v'-V'}{v-V}=1\ \cdots ④$$

③より，$mv+MV=0$，$mv'+MV'=0$ であることから

$$V=-\frac{m}{M}v\ \cdots ⑤$$
$$V'=-\frac{m}{M}v'\ \cdots ⑥$$

⑤⑥を④に代入して

$$-\frac{v'-\left(-\frac{m}{M}v'\right)}{v-\left(-\frac{m}{M}v\right)}=-\frac{v'}{v}=1\qquad\therefore\quad \underline{v'=-v}$$

同様に③より，$mv+MV=0$，$mv'+MV'=0$ であることから

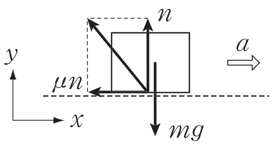
$$v=-\frac{M}{m}V\ \cdots⑦$$
$$v'=-\frac{M}{m}V'\ \cdots⑧$$

⑦⑧を④に代入して

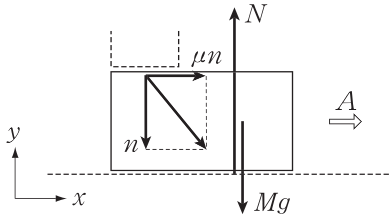
$$\therefore\quad \underline{V'=-V}$$

(2) (a) 物体が箱から受ける垂直抗力，箱が床から受ける垂直抗力の大きさをそれぞれ n，N とすると，物体，箱の運動方程式は

(物体)



(箱)



$$m\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\mu n\\n\end{pmatrix}\qquad M\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-Mg\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu n\\-n\end{pmatrix}$$

それぞれ，n，N を消去すると

物体：$\underline{ma=-\mu mg}$　　箱：$\underline{MA=\mu mg}$

(b) 物体の速度：$u=v+at$，箱の速度：$U=V+At$

(a) より $a=-\mu g$，$A=\dfrac{\mu mg}{M}$ であるから

物体の速度 ： $\underline{u=v_0\sqrt{\dfrac{M}{m+M}}-\mu gt}$

箱の速度 ： $\underline{U=-\dfrac{mv_0}{\sqrt{M(m+M)}}+\dfrac{\mu mg}{M}t}$

(c) (1)(b) と同様にして，衝突前後の物体，箱それぞれの速度は大きさが等しく逆向きであるから，衝突前後で箱に対する物体の相対速度の大きさは変化しない．よって，$|u-U|=0$ となるとき $t=T$ であるから

$$\left|v_0\sqrt{\frac{M}{m+M}}-\mu gT-\left(-\frac{mv_0}{\sqrt{M(m+M)}}+\frac{\mu mg}{M}T\right)\right|=0$$

$$\therefore\quad \left|\left(\frac{m+M}{M}\right)v_0\sqrt{\frac{M}{m+M}}-\left(\frac{m+M}{M}\right)\mu gT\right|=0$$

$$\therefore\quad \underline{T=\frac{v_0}{\mu g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}}$$

P3T

難関大物理／難関大物理 T

Z-KAI

会員番号	

氏　名	