M3JSB/M3JB/M3TB

春期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大クラス文系数学

東大数学ⅠAⅡB

東大文系数学

難関大文系数学Ｔ

1章　方程式・不等式

問題

【1】(1) 第1式から $y=1-ax$ となり，これを第2式に代入して

$$x+a(1-ax)=1 \quad \therefore \left(1-a^2\right)x=1-a \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

x の係数 $1-a^2$ の値について，次のように場合を分ける：

(i) $1-a^2 \fallingdotseq 0$ のとき，①から

$$x=\frac{1-a}{1-a^2}=\frac{1}{1+a}, \quad y=1-\frac{a}{1+a}=\frac{1}{1+a}$$

(ii) $1-a^2=0 \Longleftrightarrow a=1$ または $a=-1$ のとき，

(a) $a=1$ ならば，与えられた連立方程式は，2式とも $x+y=1$ となる．

(b) $a=-1$ ならば，与えられた連立方程式はそれぞれ

$$-x+y=1, \quad x-y=1$$

となり，このいずれをもみたすような実数 x, y は存在しない．

以上より

$$\begin{cases} a \fallingdotseq -1,\ a \fallingdotseq 1 \text{ のとき } x=y=\dfrac{1}{1+a} \\ a=-1 \text{ のとき } x,\ y \text{ は存在せず} \\ a=1 \text{ のとき } x+y=1 \text{ をみたす任意の } (x,\ y) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) まず，与えられた方程式より $x \fallingdotseq 0,\ x \fallingdotseq 1$ である．この下で，両辺に $x(x-1)(\fallingdotseq 0)$ をかけて

$$a(x-1)-x=x(x-1) \quad \therefore x^2-ax+a=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$a \in \mathbb{R}$ で，②が実数解をもつから，判別式 D について $D \geqq 0$ が必要である：

$$D=a^2-4a \geqq 0 \Longleftrightarrow a \leqq 0,\ 4 \leqq a$$

(i) $a<0,\ 4<a$ のとき，解の公式より $x=\dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4a}}{2}$

(ii) $a=0$ のとき，②は $x^2=0$ となり，重解 $x=0$ をもつが，これは必要条件 $x \fallingdotseq 0$ に矛盾し，不適．

(iii) $a=4$ のとき，②は $x^2-4x+4=0$ となり，$x=2$ を重解にもつ．

(iv) $0<a<4$ のとき，②は実数解をもたず，従ってもとの方程式をみたす実数 x は存在しない．

以上より，次の結果を得る：

$$\begin{cases} a<0,\ 4<a \text{ のとき，} x=\dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4a}}{2} \\ a=4 \text{ のとき，} x=2 \text{ (重解)} \\ a=0 \text{ のとき，不適解になる} \\ 0<a<4 \text{ のとき，} x \in \mathbb{R} \text{ は存在しない} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(3) 与えられた不等式より，$x \fallingdotseq 1$ かつ $x \fallingdotseq 2$ が必要．この下で，移項して左辺を整理すれば

$$\frac{k(x-2)-2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(k-2)x-2k+2}{(x-1)(x-2)}>0$$

分子が 0 となるのは $k>2$ より

$$x=\frac{2k-2}{k-2}=2+\frac{2}{k-2}$$

のときで，この値を α とすれば

$$\alpha = 2 + \frac{2}{k-2} > 2 \quad (\because k > 2)$$

ここで，分母の符号により場合を分ける：

▼ $x < 1$ のとき，分母が正であるから，分子も正である．

$$(k-2)x - 2k + 2 > 0 \iff x > \alpha(> 2)$$

ところが $x < 1$ と同時にこれをみたす $x \in \mathbb{R}$ は存在しない．

▼ $1 < x < 2$ のとき，分母が負であるから，分子も負で，

$$(k-2)x - 2k + 2 < 0 \iff x < \alpha$$

$\alpha > 2$ であるから，共通部分は $1 < x < 2$

▼ $2 < x$ のとき，分母が正であるから，分子も正となり，

$$(k-2)x - 2k + 2 > 0 \iff x > \alpha(> 2)$$

$x > 2$ と合わせて，$x > \alpha = \dfrac{2k-2}{k-2}$

以上をまとめて，求める解は $1 < x < 2$ と $x > \alpha$ で，これは与えられた不等式が成立するための必要条件をみたす．よって

$$1 < x < 2, \quad \frac{2k-2}{k-2} < x \qquad \text{(答)}$$

(4) 第 1 式より $x + z = y - 1$ だから

$$x^2 + 2xz + z^2 = 1 - 2y + y^2$$

これと，第 2 式より

$$37 = 1 - 2xz - 2y \qquad \therefore \quad 18 = -xz - y$$

よって

$$x + z = -1 + y \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

$$xz = -y - 18 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つ．

また，第 3 式より

$$x^3 + z^3 = y^3 + 53$$

$$\iff (x+z)(x^2 - xz + z^2) = y^3 + 53$$

$$\iff (x+z)\{(x+z)^2 - 3xz\} = y^3 + 53$$

だから，これに③，④を代入して

$$(y-1)\{(y-1)^2 + 3(y+18)\} = y^3 + 53$$

$$\iff (y-1)(y^2 + y + 55) = y^3 + 53$$

$$\iff 54y - 55 = 53 \qquad \therefore \quad y = 2$$

これと，③，④ より

$$x + z = 1,\ xz = -20$$

が得られる．よって対称式の処理により x，z は，s の方程式

$$s^2 - s - 20 = 0 \qquad \therefore \quad (s+4)(s-5) = 0$$

の解となる．これを解いて

$$s = -4,\ 5$$

であるから，求める解は

$$(x,\ y,\ z) = (-4,\ 2,\ 5),\ (5,\ 2,\ -4) \qquad \text{(答)}$$

【2】実数解 α をもつとすると，

$$(1+pi)\alpha^2+(1-i)\alpha-6-2i=0$$

$$\therefore (\alpha^2+\alpha-6)+(p\alpha^2-\alpha-2)i=0$$

α，p は実数だから

$$\alpha^2+\alpha-6=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$p\alpha^2-\alpha-2=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

① より $\alpha=2,\ -3$．これを ② に代入して，

(i) $\alpha=2$ のとき $p=1$．このとき他の解 β は，

$$2\beta=\frac{-6-i}{1+pi}=\frac{-6-2i}{1+i}$$

より，

$$\beta=-\frac{3+i}{1+i}=-2+i$$

(ii) $\alpha=-3$ のとき，$p=-\dfrac{1}{9}$．このとき他の解 β は，

$$-3\beta=\frac{-6-2i}{1-\frac{1}{9}i}=\frac{-18(3+i)}{9-i}$$

より，

$$\beta=\frac{6(3+i)}{9-i}=\frac{6(13+6i)}{41}$$

以上より

$$\begin{cases} p=1 \text{ のとき，} \quad x=2,\ -2+i \\ p=-\dfrac{1}{9} \text{ のとき，} \quad x=-3,\ \dfrac{6(13+6i)}{41} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $(x-1)(3x^2-ax-a)=0$ は a に関係なく解 $x=1$ をもつ．$f(x)=3x^2-ax-a$ とおくと，与方程式が重解をもつ条件は $f(1)=0$ または $f(x)=0$ が重解をもつことである．

(i) $f(1)=3-2a=0$ のとき，$a=\dfrac{3}{2}$．このとき，$f(x)=0$ の解は

$$x=1,\ -\frac{1}{2}$$

(ii) $f(x)=0$ が重解をもつとき，判別式 $a^2+12a=a(a+12)=0$ より

$$a=0,\ -12$$

よって $f(x)=0$ の重解は，

▼ $a=0$ のとき $x=0$

▼ $a=-12$ のとき $x=-2$

以上をまとめて

$$\begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \text{ のとき，} x=1\ (\text{重解}),\ -\dfrac{1}{2} \\ a=0 \text{ のとき，} x=0\ (\text{重解}),\ 1 \\ a=-12 \text{ のとき，} x=-2\ (\text{重解}),\ 1 \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) から，求める条件は $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，それらが 1 に一致しないことである．よって，$f(x)$ の判別式より

$$a^2+12a=a(a+12)>0, \quad \text{かつ} \quad f(1)=3-2a\neq 0$$

$\therefore \quad a < -12, \quad 0 < a < \dfrac{3}{2}, \quad \dfrac{3}{2} < a \qquad$ (答)

【4】(1) $(*)$ の左辺を $f(x)$ とすると

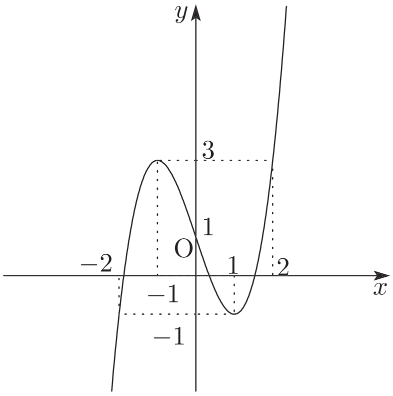
$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 3(x+1)(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は下のようになる：

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

従って，3 次関数 $y = x^3 - 3x + 1$ のグラフは図 1 になるから，題意は示された.

図 1



(証明終)

(2) (1) のグラフより，$1 < \alpha < 2$ であり，$\beta = \alpha^2 - 2$ より

$$\beta - \alpha = (\alpha^2 - 2) - \alpha = (\alpha + 1)(\alpha - 2)$$

ここで $1 < \alpha < 2$ だから

$$\beta - \alpha < 0, \qquad \therefore \quad \beta < \alpha$$

また $1 < \alpha < 2$，$\beta = \alpha^2 - 2$ より

$$-1 < \beta < 2$$

更に $\gamma = \beta^2 - 2$ より

$$\gamma - \beta = (\beta^2 - 2) - \beta = (\beta + 1)(\beta - 2)$$

であり，$-1 < \beta < 2$ と合わせて

$$\gamma - \beta < 0, \qquad \therefore \quad \gamma < \beta$$

以上より

$$\gamma < \beta < \alpha$$

(証明終)

(3) α は，$(*)$ の解だから

$$f(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$\beta = \alpha^2 - 2$ より，$f(\beta)$ を計算すると

$$f(\beta) = \beta^3 - 3\beta + 1 = (\alpha^2 - 2)^3 - 3(\alpha^2 - 2) + 1 = \alpha^6 - 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 1$$

$$= (\alpha^3 - 3\alpha)^2 - 1 = (\alpha^3 - 3\alpha + 1)(\alpha^3 - 3\alpha - 1) = 0$$

となるから

$\beta^3 - 3\beta + 1 = 0$ $\cdots\cdots\cdots$②

よって，β も $(*)$ の解である．

更に，$\gamma = \beta^2 - 2$ であることから，$f(\gamma)$ を計算すると，②より

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \gamma^3 - 3\gamma + 1 = (\beta^2-2)^3 - 3(\beta^2-2) + 1 = \beta^6 - 6\beta^4 + 9\beta^2 - 1 \\ &= (\beta^3 - 3\beta)^2 - 1 = (\beta^3 - 3\beta + 1)(\beta^3 - 3\beta - 1) = 0 \end{aligned}$$

よって，γ は $(*)$ の解である．

以上より，β, γ も方程式 $f(x) = 0$ の解であることが示された．　(証明終)

２章　関数とグラフ

問題

【1】 $\boxed{1}$

(1) 方程式の左辺を $f(x)$ とおく．題意の成立には, 以下の 3 つの場合のいずれかが成り立つことが必要かつ十分である：

(i) 1 解が $0 < x < 2$, 他の解が $x < 0$ または $x > 2$ の範囲にある場合．このとき

$$f(0) \cdot f(2) = (a+1)(3a+1) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < a < -\frac{1}{3}$$

(ii) 1 解が 0 の場合．このとき

$$f(0) = 1 + a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = -1$$

このとき方程式は,

$$x(x-3) = 0$$

となり, 題意をみたす.

(iii) 1 解が 2 の場合．このとき

$$f(2) = 3a + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$$

このとき, 方程式は,

$$(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

となり, 題意に反する.

以上より

$$-1 \leqq a < -\frac{1}{3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 題意がみたされるためには, (1) に加えて, 2 解がともに $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲にあることが必要かつ十分．このための条件は，$f(x) = 0$ の判別式を D とし，また 2 次関数 $f(x)$ の軸，および端点 $x = 0$, $x = 2$ での値を考えて，

$$\begin{cases} D = a(a-8) \geqq 0 \\ 0 \leqq \dfrac{2-a}{2} \leqq 2 \\ f(0) = 1 + a \geqq 0,\ f(2) = 3a + 1 \geqq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leqq 0 \text{ または } 8 \leqq a \\ -2 \leqq a \leqq 2 \\ a \geqq -1 \text{ かつ } a \geqq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

これらより

$$-\frac{1}{3} \leqq a \leqq 0$$

を得る.

(1) の範囲と合わせて,

$$-1 \leqq a \leqq 0 \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$ 与えられた方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の左辺を $f(x)$ とし，またその判別式を D とする．また，題意をみたす解を α，もう一方の解を β とする．

次のように場合を分ける：

- 2 解とも $-1 < x < 1$ にあるとき.
- α のみが $-1 < x < 1$ をみたし，β が $x < -1$ または $1 < x$ にあるとき.
- $\beta = 1$ または $\beta = -1$ であるとき.

Case 1.　$-1 < \alpha < 1$ かつ $-1 < \beta < 1$ のとき．

まず，$f(x) = 0$ が 2 つの実数解 (重解である場合も含める) をもつから，$f(x) = 0$ の判別式 D について $D \geqq 0$.

$$D = a^2 - 4b \geqq 0 \iff b \leqq \frac{a^2}{4}$$

また，2 次関数 $f(x)$ について，その軸 $x = -\dfrac{a}{2}$ が $-1 < x < 1$ にあるから，

$$-1 < x = -\frac{a}{2} < 1 \iff -2 < a < 2$$

更に端点 $x = 1,\ x = -1$ での値について

$$f(-1) = 1 - a + b > 0,\quad f(1) = 1 + a + b > 0 \iff b > a - 1,\quad b > -a - 1$$

まとめて

$$\begin{cases} b \leqq \dfrac{a^2}{4} \\ -2 < a < 2 \\ b > -a - 1,\ b < a - 1 \end{cases}$$

Case 2.　$-1 < \alpha < 1$ で，かつ $\beta < -1$ または $1 < \beta$ のとき．このとき，関数値 $f(-1)$ と $f(1)$ の値は異符号となるから，

$$f(-1) \cdot f(1) < 0 \iff (1 - a + b)(1 + a + b) < 0$$

である．従って，

$$\begin{cases} b > a - 1 \\ b < -a - 1 \end{cases} \quad \text{または} \begin{cases} b < a - 1 \\ b > -a - 1 \end{cases}$$

Case 3.　$f(x) = 0$ が $\beta = 1$ または $\beta = -1$ のいずれか一方を解にもつとき．

- $\beta = 1$ を解にもつならば，$f(1) = 0$ であり，かつ他の解 α が $-1 < x < 1$ にあるから，端点 $x = -1$ と $f(x)$ の軸の位置について，放物線の対称性より $f(-1) > 0$ かつ $0 < x = -\dfrac{a}{2} < 1$ であることが必要かつ十分．

$$1+a+b = 0,\ 1-a+b > 0,\ 0 < -\frac{a}{2} < 1 \iff b = -a-1,\ b > a-1,\ -2 < a < 0$$

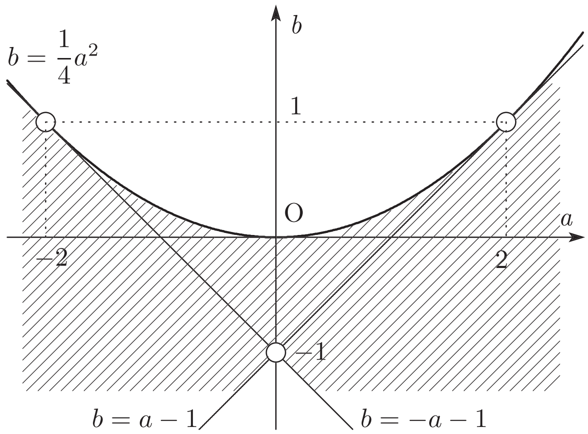
- $\beta = -1$ を解にもつならば，$f(-1) = 0$ であり，かつ他の解 α が $-1 < x < 1$ にあるから，端点 $x = 1$ と $f(x)$ の軸の位置について，放物線の対称性より $f(1) > 0$ かつ $-1 < x = -\dfrac{a}{2} < 0$ であることが必要かつ十分．

$$1-a+b = 0,\ 1+a+b > 0,\ -1 < -\frac{a}{2} < 0 \iff b = a-1,\ b > -a-1,\ 0 < a < 2$$

これらをまとめて，次の領域を得る：

境界は，放物線部分のみを含み，直線部分は除く．

図 1



【2】与えられた直線

$\ell : y = 2tx - \left(t^2 + 1\right)$

が点 (X, Y) を通るとすると

$Y = 2tX - t^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow t^2 - 2Xt + Y + 1 = 0$ $\cdots\cdots\cdots$ ①

つまり

$t \geqq -1$ の下で ℓが点 (X, Y) を通る

$\Longleftrightarrow t^2 - 2Xt + Y + 1 = 0$ をみたす $t \geqq -1$ が存在する

$\Longleftrightarrow$ 2 次方程式 $t^2 - 2Xt + Y + 1 = 0$ が

$t \geqq -1$ に少なくとも 1 個の実数解をもつ

が成り立つ.

そこでこの t の方程式

① : $t^2 - 2Xt + Y + 1 = 0$

が $t \geqq -1$ に少なくとも 1 個の実数解をもつ条件を求める.

①の左辺を $f(t)$ と置く：$f(t) = t^2 - 2Xt + Y + 1$

次の 3 つの場合を考えれば，必要かつ十分である：

- 2 解（重解を含む）とも $t > -1$.
- 2 解のうち 1 解のみが $t > -1$.
- $t = -1$ を解にもつ.

2 次方程式 ①の判別式を D とすると，

Case 1. 2 解（重解を含む）とも $t > -1$ のとき.

- $D \geqq 0 \Longleftrightarrow D/4 = X^2 - (Y + 1) \geqq 0 \Longleftrightarrow Y \leqq X^2 - 1$
- $f(t)$ の軸 $t = X$ について $t = X > -1$
- 端点 $t = -1$ について $f(-1) = 1 + 2X + Y + 1 > 0 \Longleftrightarrow Y > -2X - 2$

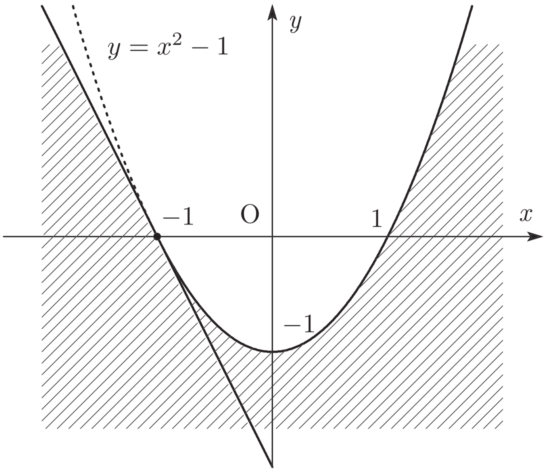
Case 2. 2 解のうち 1 解のみが $t > -1$ をみたすとき,

$f(-1) = 1 + 2X + Y + 1 = 2X + Y + 2 < 0 \Longleftrightarrow Y < -2X - 2$

Case 3. $t = -1$ を解にもつとき，$f(-1) = 0 \Longleftrightarrow Y = -2X - 2$

ここで，直線 $y=-2x-2$ は放物線 $y=x^2-1$ の $x=-1$ における接線であることに着目して，次の斜線部が直線 ℓ の通過領域となる．境界をすべて含む．

図 2



【3】(1) 2 次方程式

$(*)\quad x^2+ax+b=0$

が 2 異実数解をもつから，その判別式を D_* とすれば，$D_*>0$ が成り立つ：

$D_*=a^2-4b>0$ ·········①

もう一方の 2 次方程式

$(\#)\quad x^2+(a-2k)x+b-ak=0$

について，その判別式を $D_\#$ として，

$$\begin{aligned} D_\# &= (a-2k)^2-4(b-ak) \\ &= a^2-4b+4k^2 \\ &= D_*+4k^2>0 \quad \because \text{①かつ } k\in\mathbb{R} \ \cdots\cdots\cdots \text{②} \end{aligned}$$

よって，$(\#)$ において，k の任意の値について判別式が正であるから，$(\#)$ はつねに 2 異実数解をもつ．（証明終）

(2) 解と係数の関係により $(*)$ の 2 解が α,β であることから，

$\alpha+\beta=-a,\quad \alpha\beta=b$ ·········③

が成り立つ．また，$(\#)$ の 2 解が γ，δ であることから，$(\#)$ の左辺を $f(x)$ として，

$f(x)=x^2+(a-2k)x+b-ak=(x-\gamma)(x-\delta)$ ·········④

が成り立つ．

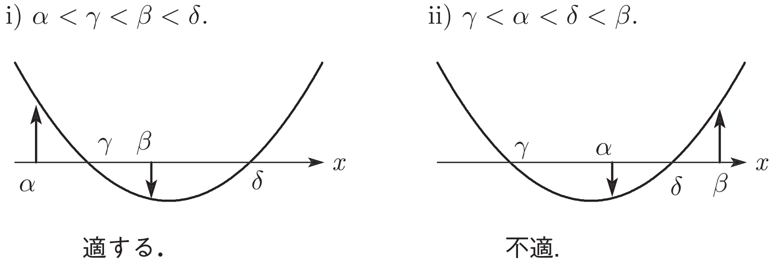
題意より

$\alpha-\gamma<0,\ \alpha-\delta<0,\quad \therefore f(\alpha)=(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)>0,$

$\beta-\gamma>0,\ \beta-\delta<0,\quad \therefore f(\beta)=(\beta-\gamma)(\beta-\delta)<0$

であるから，放物線 $y=f(x)$ と α，β の位置関係は次の図 3 の左側のようになり，右側のようなときには不適である．

図 3



ここで，α，β は $(*)$ の 2 解であることから，

$\alpha^2+a\alpha+b=\beta^2+a\beta+b=0$

であることに着目して

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^2+a\alpha+b-2k\alpha-ak \\ &= (-2\alpha-a)k>0 \ \cdots\cdots\cdots \text{⑤} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \beta^2+a\beta+b-2k\beta-ak \\ &= (-2\beta-a)k<0 \ \cdots\cdots\cdots \text{⑥} \end{aligned}$$

が成り立つ．③によって

$-2\alpha-a=-2\alpha+(\alpha+\beta)=\beta-\alpha>0,\qquad -2\beta-a=-2\beta+(\alpha+\beta)=\alpha-\beta<0$

であるから，⑤，⑥のいずれも成り立つための k のみたすべき条件は

$k > 0$　　(答)

【4】(1) ■解答 1

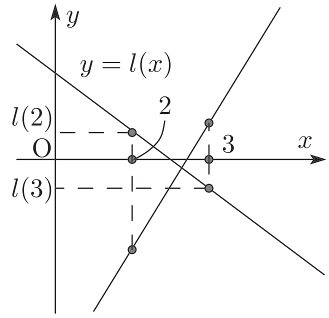
A(2, 3)，B(3, 1) を通る直線の方程式は

$$y = \frac{3-1}{2-3}(x-2)+3 \iff y = -2x+7$$

よって，線分 AB と直線 $y = ax+b$ との共有点が 1 つだけあるのは，連立方程式

$$\begin{cases} y = -2x+7 \ \cdots ① \\ y = ax+b \ \cdots ② \end{cases}$$

の解 x，y が $2 < x < 3$，$1 < y < 3$ の範囲にあるときである．ただし，$a \fallingdotseq -2$ である（なぜなら，$a = -2$ のとき，①，② は一致する，もしくは平行になるので，不適である）．



よって，① を ② に代入して得られる x の方程式

$$-2x+7 = ax+b$$
$$\therefore \quad (a+2)x+b-7 = 0$$

が $2 < x < 3$ の範囲で解をもてばよく

$$l(x) = (a+2)x+b-7$$

とおくと，直線 $y = l(x)$ が x 軸と $2 < x < 3$ の範囲で交わればよいので

$$l(2)l(3) < 0$$
$$\therefore \quad (2a+b-3)(3a+b-1) < 0 \cdots\cdots (\bigstar)$$

したがって，求める領域は

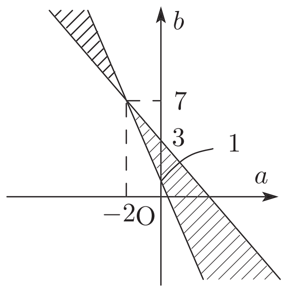
$2a+b-3 < 0$ かつ $3a+b-1 > 0$

または

$2a+b-3 > 0$ かつ $3a+b-1 < 0$

であるから，**右図の斜線部分**のようになる．

ただし，**境界はすべて含まない．**　　(答)



■解答 2

上記の■**解答** 1 では連立方程式に帰着させたが，「正領域，負領域」の考え方を用いるのが最も簡明．準備として 1 次不等式の表す領域について．

< 正領域・負領域 >

a, b の少なくとも一方は 0 でないとして

$F(x,\ y) = ax + by + c$

とおく．このとき，平面は，直線

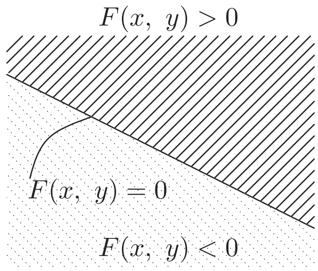
$l : F(x,\ y) = 0 \iff ax + by + c = 0$

によって 2 つの平面（領域）に分けられ

$F(x,\ y) > 0$ で表される領域：正領域

$F(x,\ y) < 0$ で表される領域：負領域

となる．



本問で線分 AB と直線 $y = ax + b$ との共有点が 1 つあるのは

$$F(x,\ y) = y - (ax + b)$$

とおくと，A，B が $F(x,\ y) = 0$ で分けられる異符号の領域にあることである．

よって

「$F(2,\ 3) < 0$ かつ $F(3,\ 1) > 0$」または「$F(2,\ 3) > 0$ かつ $F(3,\ 1) < 0$」

$\iff F(2,\ 3) \cdot F(3,\ 1) < 0$

となる．

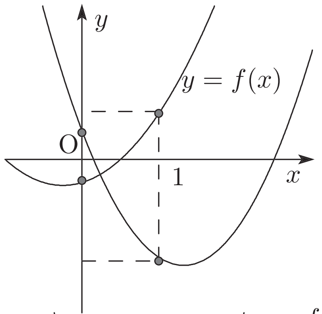
これを整理すると■解答 1 と同じ領域が得られる．

なお，■解答 1 の（★）も本質的には同じ考え方（境界となる直線を x 軸とみた）である．

(2) 原点 O と点 A(1, 2) を通る直線の方程式は $y=2x$ であるから，線分 L と曲線 $y=x^2+ax+b$ が共有点をもつのは y を消去して得られる x の方程式

$$x^2+ax+b=2x \iff x^2+(a-2)x+b=0$$

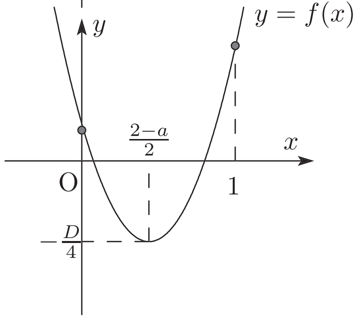
が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に実数解をもつときである．



$f(x)=x^2+(a-2)x+b$ とおくと

(i) $f(0)f(1) \leqq 0$

(ii) $\begin{cases} 軸 : 0 \leqq \dfrac{2-a}{2} \leqq 1 \\ f(0) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0 \\ 判別式 : D \geqq 0 \end{cases}$



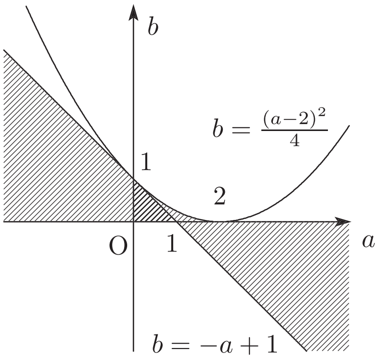
よって

(i) $b(b+a-1) \leqq 0$

(ii) $\begin{cases} 0 \leqq a \leqq 2 \\ b \geqq 0,\ b+a-1 \geqq 0 \\ 4b \leqq (a-2)^2 \end{cases}$

であるから，求める領域は (i) または (ii) より**下図の斜線部分**のようになる．

ただし，**境界はすべて含む**．　　(答)



＜別解＞

方程式は

$$x^2+ax+b=2x \iff x^2-2x=-ax-b \iff \begin{cases} y=x^2-2x \\ y=-ax-b \end{cases}$$

と同値であるから，曲線 $y=x^2-2x$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分と直線 $y=-ax-b$ が共有点をもつための条件と考えることもできる．

【5】 x に関する条件 (命題) として

$$P(x) : |x-1| < b, \quad Q(x) : |x^2-1| < a$$

と定めれば，集合 A, B が

$$A=\{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\}, \quad B=\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x)\}$$

が定まる．このとき，「$P(x) \Longrightarrow Q(x)$」は「$A \subseteq B$」と同値．

集合 A と B を数直線上に図示すると，次のようになる：

図 4

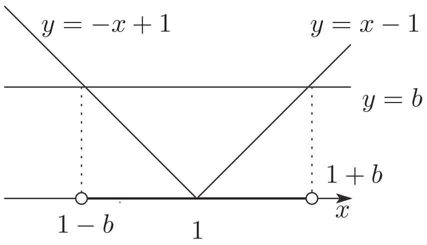
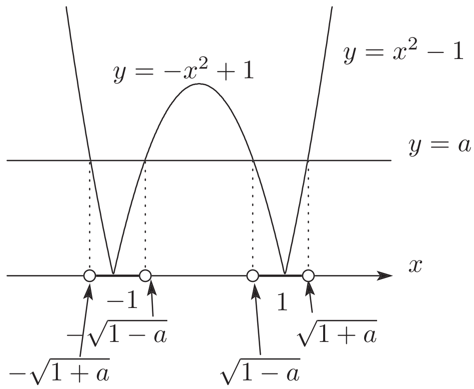


図 5



従って，次が言える：

$P(x) \Longleftrightarrow 1-b<x<1+b$

$Q(x) \Longleftrightarrow -\sqrt{1+a}<x<-\sqrt{1-a}$　または　$\sqrt{1-a}<x<\sqrt{1+a}$

よって

$A=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1-b<x<1+b\right\}$

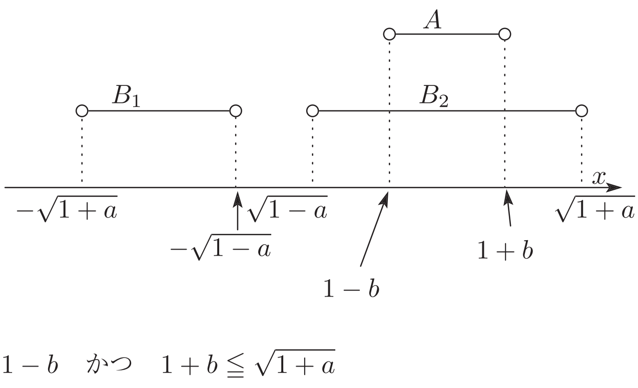
である．また

$B_1=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\sqrt{1+a}<x<-\sqrt{1-a}\right\}$

$B_2=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{1-a}<x<\sqrt{1+a}\right\}$

とすると，$B=B_1 \cup B_2$ であるが，A は 1 を含んでいるから，A が B_1 に含まれることはない．よって，結局 A が B_2 に包まれることが必要かつ十分である．これを図示すれば，図 6 のようになる．

図 6



以上より

$\sqrt{1-a} \leqq 1-b$　かつ　$1+b \leqq \sqrt{1+a}$

$\Longleftrightarrow b \leqq 1-\sqrt{1-a}$　かつ　$b \leqq \sqrt{1+a}-1$

$\Longleftrightarrow b \leqq \min\{1-\sqrt{1-a},\ \sqrt{1+a}-1\} \cdots\cdots\cdots$ ①

ここで，$1-\sqrt{1-a}$ と $\sqrt{1+a}-1$ の大小を比べると

$$\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)^2=2+2\sqrt{1-a^2}<4,$$

$\therefore \sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}<2$ より $-1+\sqrt{1+a}<1-\sqrt{1-a}$

よって,

$\min\{1-\sqrt{1-a},\ \sqrt{1+a}-1\}=-1+\sqrt{1+a}$

となる.

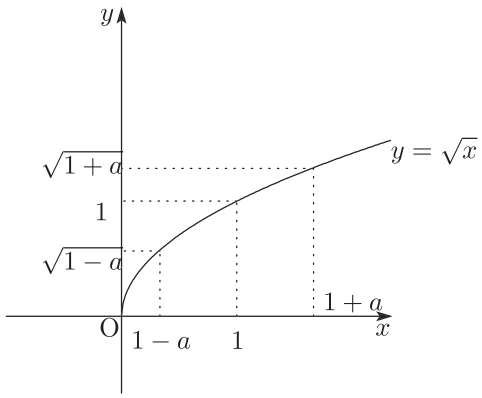
①より，以上をまとめて求める b の条件は

$b \leqq -1+\sqrt{1+a}$ (答)

Cf.

$f(x)=\sqrt{x}$ のグラフは図 7 のようになる：

図 7



グラフから明らかに,

$\sqrt{1+a}-1<1-\sqrt{1-a}$

が成り立つ.

３章　整数

問題

【1】 $\boxed{1}$

もし，任意の正整数 n について正整数 N が $f(n)$ を割り切るならば，N は特に $f(1), f(2), f(3)$ を割り切ることが必要である．

$f(1), f(2), f(3)$ の値を求めてみると，

$f(1) = 1 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$

$f(2) = 2 \cdot 3 \cdot 11$

$f(3) = 3 \cdot 4 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$

となり，N がこれらを割り切るから，必要条件として N は 6 の正の約数である．

以下，$N = 6$ が十分条件でもあることを示す．そのために，n を 6 で割った余りに着目して，正整数全体を 6 個のグループに分割する．k を負でない整数とする．

▼ $n = 6k$ のとき，明らかに $f(n)$ は 6 で割り切れる．

▼ $n = 6k+1$ のとき，

$f(6k+1) = (6k+1)(6k+2)(12k+9) = 6(6k+1)(3k+1)(4k+3)$

であるから，このとき $f(n)$ は 6 で割り切れる．

▼ $n = 6k+2$ のとき，

$f(6k+2) = (6k+2)(6k+3)(12k+11) = 6(3k+1)(2k+1)(12k+11)$

であるから，このときも成立．

▼ $n = 6k+3$ のとき，

$f(6k+3) = (6k+3)(6k+4)(12k+13) = 6(2k+1)(3k+2)(12k+13)$

であるから，成立．

▼ $n = 6k+4$ のとき，

$f(6k+4) = (6k+4)(6k+5)(12k+15) = 6(3k+2)(6k+5)(4k+5)$

であるから，成立．

▼ $n = 6k+5$ のとき，

$f(6k+5) = (6k+5)(6k+6)(12k+17) = 6(6k+5)(k+1)(12k+17)$

より成立．

従って，任意の正整数 n について，$f(n)$ は 6 で割り切れることが示された．よって $N = 6$ は題意の成立に十分でもある．

以上より求める最大の正整数は 6 である．　　(答)

$\boxed{2}$

$n = 1,\ 2$ の場合を調べると

$a_1 = 19 + 2 = 21 = 3 \cdot 7$

$a_2 = 19^2 - 2^{8-3} = 361 - 32$

$= 329 = 7 \cdot 47$

だから，7 以外は題意をみたさない．

よって，任意の n について 7 が a_n を割り切ることを示せば十分である．
ここで

$$
\begin{aligned}
a_n =& 19^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^{4n-3} \\
=& 19^n + (-1)^{n-1} \cdot 16^{n-1} \cdot 2 \\
=& (21-2)^n + (-1)^{n-1} \cdot (14+2)^{n-1} \cdot 2
\end{aligned}
$$

であり，この第 1 項，第 2 項を，2 項定理を用いて展開すれば，K，L をある正整数として

$$
\begin{aligned}
(21-2)^n &= 21^n + {}_n\mathrm{C}_1 21^{n-1} \cdot (-2) + {}_n\mathrm{C}_2 21^{n-2} \cdot (-2)^2 \\
&\quad + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-2} 21^2 \cdot (-2)^{n-2} + {}_n\mathrm{C}_{n-1} 21 \cdot (-2)^{n-1} + (-2)^n \\
&= 21K + (-2)^n, \\
(14+2)^{n-1} &= 14^{n-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 14^{n-2} \cdot 2 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 14^{n-3} \cdot 2^2 \\
&\quad + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3} 14^2 \cdot 2^{n-3} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2} 14 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1} \\
&= 14L + 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

と表される．従って

$$
\begin{aligned}
a_n =& 21K + (-2)^n + 2 \cdot (-1)^{n-1}(14L + 2^{n-1}) \\
=& 21K + (-2)^n + 2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 14L + 2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} \\
=& 7(3K + 2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2L) + (-2)^n + 2 \cdot (-2)^{n-1} \\
=& 7(3K + 2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2L) + (-2)^n - (-2) \cdot (-2)^{n-1} \\
=& 7(3K + 2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2L) + (-2)^n - (-2)^n \\
=& 7(3K + 2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2L)
\end{aligned}
$$

これは 7 で割り切れる．よって題意は示された．　　(証明終)

【2】(1) 任意の整数 a は，整数 m を用いて $a=3m$ または $a=3m\pm1$ と表せる．

$a=3m$ のとき，$a^2=9m^2$となり，a^2 は 3 で割り切れる．$\cdots\cdots\cdots$①

$a=3m\pm1$ のとき，$a^2=3(3m^2\pm2m)+1$ となり，

a^2 を 3 で割った余りは 1 となる．

以上より示された．　　(証明終)

(2) a^2，b^2 は (1) より 3 で割った余りが 0 か 1 であるから，a^2+b^2 が 3 の倍数となるのは，a^2，b^2 がともに 3 の倍数のときである．

(1) の① より，a^2，b^2 が 3 の倍数のとき，a，b はともに 3 の倍数である．以上より示された．　　(証明終)

(3) $a^2+b^2=c^2$ ならば a^2+b^2 は 3 の倍数か，3 で割って余りは 1 である．

a^2+b^2 が 3 の倍数ならば，(2) より，a，b はともに 3 の倍数である．

a^2+b^2 が 3 で割って 1 余る数ならば, a^2，b^2 の片方が 3 で割って 1 余る数，もう片方が 3 の倍数である．

よって，(1) の①より，a, b のどちらかは 3 の倍数である．以上より題意に言うとおりである．　　(証明終)

(4) a，b の偶奇の組み合わせで場合分けして考えることにする．

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

とすると

(i) a，b が偶数のとき

明らかに ab は 4 の整数倍

(ii) a，b の一方が偶数，他方が奇数のとき

②より c は奇数であるから，p，q，r を自然数として，$a=2p$，$b=2q-1$，$c=2r-1$ とおける．これを ② に代入して

$$4(p^2+q^2-q)+1=4(r^2-r)+1,$$

$$\therefore\quad p^2+q^2-q=r^2-r,$$

$$\therefore\quad p^2=(r-q)(r+q-1).$$

$r-q$ と $r+q$ の偶奇は一致するから，$r-q$ と $r+q-1$ は一方が偶数，他方が奇数である．よって

$$p^2=(\text{偶数})\times(\text{奇数})=(\text{偶数})$$

であるから，p は偶数であり，$a=2p=2\times(\text{偶数})$ は 4 の整数倍である．従って ab は 4 の整数倍であり，4 の倍数である．

(iii) a，b が奇数のとき

② より c は偶数だから，p，q，r を自然数として，$a=2p-1$，$b=2q-1$，$c=2r$ とおける．これを ②に代入して

$$4(p^2-p+q^2-q)+2=4r^2.$$

左辺は 4 の倍数ではなく，右辺は 4 の倍数であるから，上式をみたす p，q，r は存在しない．すなわち，題意をみたす a，b，c は存在しない．

(i)，(ii)，(iii) より題意は示された．　　(証明終)

【3】 $\boxed{1}$

(1) 与式は

$$xy-2x-3y+6=6 \iff (x-3)(y-2)=6$$

と変形できる．これより $x-3$ と $y-2$ の組は

$$(x-3,\ y-2)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1),$$
$$(-1,\ -6),\ (-2,\ -3),\ (-3,\ -2),\ (-6,\ -1)$$

の 8 通りが考えられるから，求める x，y の組は

$$(x,\ y)=(4,\ 8),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (9,\ 3)$$
$$(2,\ -4),\ (1,\ -1),\ (0,\ 0),\ (-3,\ 1) \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式は

$$4xy-2x-2y-62=0 \iff 4xy-2x-2y+1=63 \iff (2x-1)(2y-1)=63$$

と変形できる．これより，$2x-1$，$2y-1$ の組は

$$(2x-1,\ 2y-1)=(1,\ 63),\ (3,\ 21),\ (7,\ 9),\ (9,\ 7),$$
$$(21,\ 3),\ (63,\ 1),\ (-1,\ -63),\ (-3,\ -21),$$
$$(-7,\ -9),\ (-9,\ -7),\ (-21,\ -3),\ (-63,\ -1)$$

の 12 通りが考えられるから求める x，y の組は

$$(x,\ y)=(1,\ 32),\ (2,\ 11),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),$$
$$(11,\ 2),\ (32,\ 1),\ (0,\ -31),\ (-1,\ -10),$$
$$(-3,\ -4),\ (-4,\ -3),\ (-10,\ -1),\ (-31,\ 0) \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$

与えられた条件式は，x, y, z について対称である．従って，もし $(x,\ y,\ z)=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ が条件をみたすならば，α, β, γ を任意に並べ替えた 3 項列，例えば

$$(x,\ y,\ z)=(\beta,\ \alpha,\ \gamma)$$

も条件をみたす．

そこで，特に $x \geqq y \geqq z$ として，与式をみたす正整数 x, y, z を求める．

$x \geqq y \geqq z$ だから

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{z}$$

が成り立つ．よって

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=\frac{3}{z} \qquad \therefore \quad \frac{5}{6} \leqq \frac{3}{z}$$

である．これより

$$z \leqq \frac{18}{5}$$

となるので

$$z=1,\ 2,\ 3$$

(i) $z=1$ のとき，$\dfrac{1}{z}=1$ だから

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1>\frac{5}{6}$$

となり，不適．

(ii) $z=2$ のとき

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$$

となる．これを

$(x-3)(y-3)=9$

と変形すると，$x \geqq y \geqq z=2$ より $x-3 \geqq y-3 \geqq -1$ なので

$(x-3,\ y-3)=(9,\ 1),\ (3,\ 3) \qquad \therefore \quad (x,\ y)=(12,\ 4),\ (6,\ 6)$

を得る．

(iii) $z=3$ のとき

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$$

となる．これを

$(x-2)(y-2)=4$

と変形すると，$x \geqq y \geqq z=3$ より $x-2 \geqq y-2 \geqq 1$ なので

$(x-2,\ y-2)=(4,\ 1),\ (2,\ 2) \qquad \therefore \quad (x,\ y)=(6,\ 3),\ (4,\ 4)$

以上より $x \geqq y \geqq z$ のもとで,

$(x,\ y,\ z)=(12,\ 4,\ 2),\ (6,\ 6,\ 2),\ (6,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 3)$

を得る．よって求める 3 項列 (x, y, z) の個数は，これらを任意に並べ替えてできる 3 項列の個数である．

それぞれ

▼ $(12, 4, 2)$ の並べ替えは $3!=6$（個）

▼ $(6, 6, 2)$, $(6, 3, 3)$, $(4, 4, 3)$ の並べ替えは，それぞれ $\dfrac{3!}{2}=3$（個）である．

従って，求める個数は

$6+3\cdot 3=15$（個）　(答)

【4】(1) 与えられた不定方程式を

$4m+6n=7\cdots\cdots\cdots$①

とする．整数 $m,\ n$ に対し，①の左辺は偶数だから，①をみたす整数 $m,\ n$ は存在しない．　　(証明終)

(2) 同様に

$3m+5n=2\cdots\cdots\cdots$②

とすると，$(m,\ n)=(-1,\ 1)$ は

$3\times(-1)+5\times 1=2\cdots\cdots\cdots$③

より，②をみたす．

ここで②と③の差を求めると

$3(m+1)+5(n-1)=0$

$\therefore 3(m+1)=-5(n-1)$

であり，$m+1$ は 5 の倍数，$-(n-1)$ は 3 の倍数であるから，

$m+1=5k,\ n-1=-3k$ (k は整数)

と表せる．よって，②のすべての整数解は，k を整数として

$(m,\ n)=(5k-1,\ -3k+1)$　　(答)

(3) $k\neq l$ のとき，

$1\leqq k<l\leqq b-1\cdots\cdots\cdots$④

として考えてよい．④のもとで，

$1\leqq l-k\leqq b-2$

だから，$l-k$ は b の倍数ではない．また，$a,\ b$ は互いに素だから，$a(l-k)$ も b の倍数ではない．よって，$ak,\ al$ を b で割った余りは異なるから

$r(k)\neq r(l)$　　(証明終)

(4) $(b-1)$ 個の整数 $a\times 1,\ a\times 2,\ \cdots,\ a\times(b-1)$ はいずれも b の倍数ではないから，b で割った余り $r(1),\ r(2),\ \cdots,\ r(b-1)$ はいずれも 0 ではない．

また，(3) より，これら $(b-1)$ 個の余りは互いに異なる．よって，集合として，$1,\ 2,\ \cdots,\ b-1$ 全体と一致する．従って，$r(p)=1,\ 1\leqq p\leqq b-1$ をみたす整数 p があり，ap を b で割った商を q とすると，

$ap=bq+1$　　$\therefore$　$ap+b(-q)=1$

が成り立つ．これより，

$am+bn=1$

をみたす整数 $m,\ n$ として，$m=p,\ n=-q$ が存在する．　　(証明終)

問題

【1】 $\boxed{1}$

(1) まず，与えられた円の方程式を

$$x^2+y^2=4 \ \cdots\cdots\cdots ①$$

とする．

図１

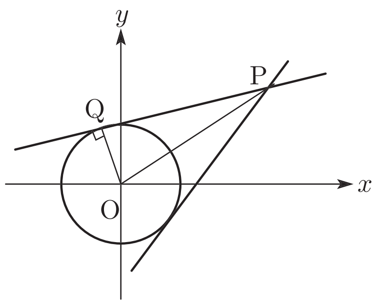


図１より, 接線は y 軸に平行でないから, その方程式は,

$$y=m(x-5)+3 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

とおける．②より,

$$mx-y-5m+3=0$$

これが①に接することから,

$$\frac{\left|-5m+3\right|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \iff 21m^2-30m+5=0$$

$$\iff m=\frac{15\pm2\sqrt{30}}{21}$$

これを②に代入して, 求める接線の方程式は,

$$y=\frac{15\pm2\sqrt{30}}{21}(x-5)+3 \qquad \text{(答)}$$

(2) 一方の接点を Q とおく．このとき, 三平方の定理より,

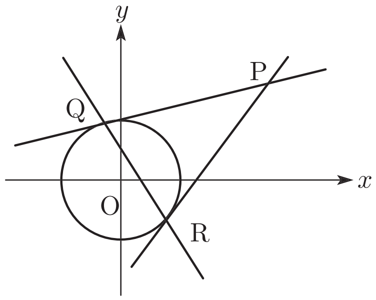
$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2-\mathrm{OQ}^2=34-4=30$$

よって, 求める接線の長さは,

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{30} \qquad \text{(答)}$$

(3) 2 つの接点をそれぞれ Q，R とする．図 2 を参照のこと．

図 2



いま, これらの座標を Q $(x_1,\, y_1)$，R $(x_2,\, y_2)$ とおくと, 2 本の接線の方程式は,

$$x_1x + y_1y = 4, \quad x_2x + y_2y = 4$$

である．これらはともに点 P (5, 3) を通るから,

$$5x_1 + 3y_1 = 4, \quad 5x_2 + 3y_2 = 4 \ \cdots\cdots\cdots ③$$

いま直線

$$5x + 3y = 4 \ \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

を考えると, ③より④は 2 点 Q, R を通ることがわかる．また, 2 点 Q, R を通る直線は 1 本しか存在しないから, ④が求める直線である．

従って, 求める直線の方程式は,

$$5x + 3y = 4 \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$

(1) C_2 は中心 A $(k,\, 2k)$，半径 2 の円であり，中心 A は

$$y = 2x$$

上にある．

原点 O と A の距離は

$$\mathrm{OA} = \sqrt{k^2 + (2k)^2} = \sqrt{5}|k|$$

だから，2 円 C_1，C_2 の位置関係は次のように場合分けされる：

▼ OA > (半径の和)，すなわち

$$\sqrt{5}|k| > 3 \iff |k| > \frac{3}{\sqrt{5}}$$

の場合，分離.

▼ OA = (半径の和)，すなわち

$$\sqrt{5}|k| = 3 \iff |k| = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

の場合，外接.

▼ |半径の差| < OA < (半径の和)，すなわち

$$1 < \sqrt{5}|k| < 3 \iff \frac{1}{\sqrt{5}} < |k| < \frac{3}{\sqrt{5}}$$

の場合，2 点で交わる．

▼ $\mathrm{OA} = |(\text{半径の差})|$，すなわち

$$\sqrt{5}|k| = 1 \iff |k| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

の場合，内接.

▼ $\mathrm{OA} < |(\text{半径の差})|$，すなわち

$$\sqrt{5}|k| < 1 \qquad \therefore |k| < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

の場合，内包.

以上より，$k > 0$ に注意して，2 円 C_1, C_2 が共有点をもつのは

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leqq k \leqq \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) まず C_2 が点 $\mathrm{A}\,(1, 0)$ を通るから，C_2 の方程式に $x = 1,\ y = 0$ を代入して

$$(1-k)^2 + 4k^2 = 4 \iff (5k+3)(k-1) = 0$$

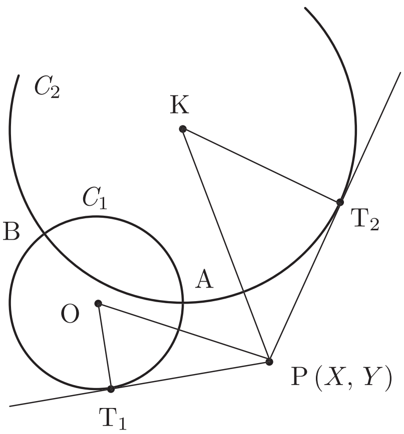
となるから，$k > 0$ より $k = 1$. 従って，円 C_2 は

$$C_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \iff x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

となるから，このとき C_2 は中心 $\mathrm{K}\,(1, 2)$ を中心とし，半径 2 の円である.

$k = 1$ は (1) で求めた結果をみたすから，2 円 C_1 と C_2 は 2 点で交わる．その一方は $\mathrm{A}\,(1, 0)$ である．他方を点 B とする．図 3 を参照のこと.

図 3



ここで，x と y の 2 次式を

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$$

と定める.

$\mathrm{P}\,(X, Y)$ から円 C_1 に引いた接線の接点 T_1 について

$$\mathrm{PT_1}^2 = \mathrm{PO}^2 - \mathrm{OT_1}^2 = X^2 + Y^2 - 1 = f_1(X, Y)$$

であり，また同様に P から円 C_2 に引いた接線 PT_2 について

$$\mathrm{PT_2}^2 = \mathrm{PK}^2 - \mathrm{KT_2}^2 = (X-1)^2 + (Y-2)^2 - 4 = f_2(X, Y)$$

となる.

(i) $\mathrm{PT}_1 = \mathrm{PT}_2 \iff \mathrm{PT_1}^2 = \mathrm{PT_2}^2$ であるから，$f_1(X, Y) = f_2(X, Y)$ が成り

立つ．

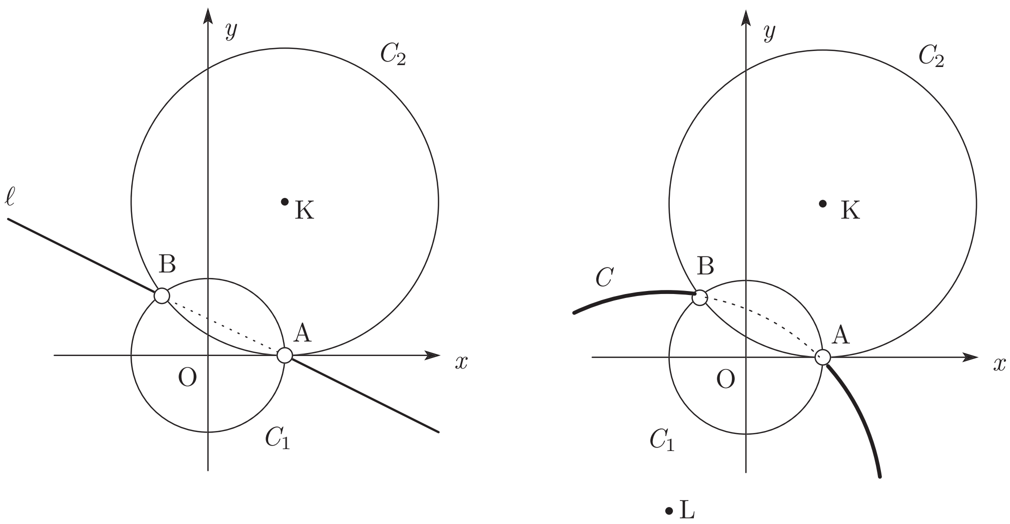
$$X^2+Y^2-1=X^2+Y^2-2X-4Y+1 \iff X+2Y-1=0$$

となり，軌跡を考えている点 P は直線 $x+2y-1$ 上にある．

ただし，P からの接線が存在するためには，P が 2 円 C_1，C_2 の外部にあることが必要であるから，図 3 の線分 AB (端点を含む) 上の点を除く．

図示すれば，図 4 の左側の図の直線 ℓ となる．

図 4



(i) の軌跡 ℓ

(ii) の軌跡 C

(ii) $\sqrt{2}\mathrm{PT}_1=\mathrm{PT}_2 \iff 2{\mathrm{PT}_1}^2={\mathrm{PT}_2}^2$ であるから，

$$2f_1(X,\,Y)=f_2(X,\,Y) \iff 2\left(X^2+Y^2-1\right)=X^2+Y^2-2X-4Y+1$$

が成り立ち，整理して

$$X^2+Y^2+2X+4Y-3=0 \iff (X+1)^2+(Y+2)^2=8$$

となるから，点 P $(X,\,Y)$ は，中心 L $(-1,\,-2)$，半径 $2\sqrt{2}$ の円

$$C:(x+1)^2+(y+2)^2=8$$

上にある．

ただし，2 円に接線が引けるためには，これら 2 円の外部にあることが必要で，求める軌跡は，円 C の一部 (優弧)

$$(x+1)^2+(y+2)^2=8, \quad x^2+y^2>0.$$

これを図示すれば，図 4 の右側の図になる．

【2】(1) 与えられた直線の方程式を

$$\ell : ax + y = 2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$m : x - ay = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

とする．②より $x = ay$

①に代入して

$$a^2y + y = 2 \Longleftrightarrow \left(a^2 + 1\right)y = 2 \cdots\cdots\cdots ③$$

$y = 0$ はこれをみたさないから，$y \fallingdotseq 0$

この下で，$a = \dfrac{x}{y}$ を①に代入して

$$\frac{x^2}{y} + y = 2 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 2y \Longleftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

よって求める軌跡は，図 5 のようになり，

点 $(0, 1)$ を中心とする半径 1 の円から，原点を除いた曲線　　(答)

(2) ③を a についての 2 次方程式と考える．つまり

$$ya^2 + y - 2 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

をみたす $a \in \mathbb{R}$ が，区間 $0 < a < 1$ に存在する条件を求める．

▼ $y = 0$ のとき，この式は $-2 = 0$ となり矛盾．つまり，④をみたす $a \in \mathbb{R}$ は存在しない．

▼ $y \fallingdotseq 0$ の下で，$a^2 = \dfrac{2-y}{y}$

$0 < a < 1$ より $0 < a^2 < 1$ だから，

$$0 < \frac{2-y}{y} < 1 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$y \fallingdotseq 0$ だから $y^2 > 0$ そこで，⑤の両辺に y^2 をかけて

$$0 < y(2-y) < y^2$$

前半より

$$y^2 - 2y < 0 \quad \therefore\ 0 < y < 2$$

後半より

$$2y^2 - 2y > 0 \quad \therefore\ y < 0,\ 1 < y$$

このいずれもみたす y の範囲は $1 < y < 2$ このとき，$x = ay$ は $0 < x < 2$ となる．

以上より，

$$x^2 + (y-1)^2 = 1,\ x > 0,\ 1 < y < 2$$

が成り立つ．求める軌跡は図 6 のようになり

中心 $(0, 1)$，半径 1 の円の，$x > 0,\ 1 < y < 2$ をみたす部分　　(答)

図 5

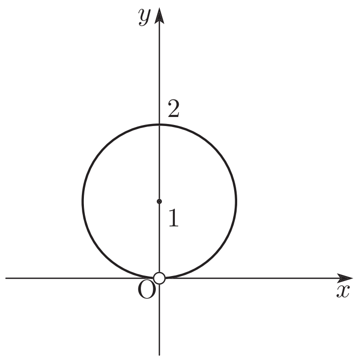
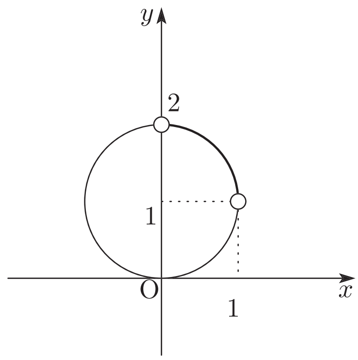


図 6



【3】 $\boxed{1}$ $\begin{cases} x+y=X \\ xy=Y \end{cases}$ とすると，x, y は t についての 2 次方程式

$$t^2 - Xt + Y = 0$$

の 2 解となる．

$x, y \in \mathbb{R}$ であるから，この方程式は 2 実数解をもつ．よってその判別式を D とすれば $D \geqq 0$ が成り立つ：

$$D = X^2 - 4Y \geqq 0 \quad \therefore\ Y \leqq \frac{1}{4}X^2 \ \cdots\cdots\cdots ①$$

①のもとで，点 (x, y) が動く円の方程式を変形する．

$$\begin{aligned} x^2+y^2+x+y=1 &\iff (x+y)^2 - 2xy + x + y = 1 \\ &\iff X^2 + X - 2Y = 1 \\ &\iff Y = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(X+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{8} \end{aligned}$$

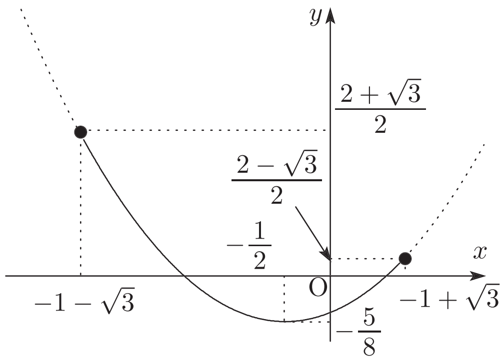
従って，点 (X, Y) は放物線 $y = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{8}$ 上にある．

必要条件①を考えて，求める軌跡は

放物線 $y = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{8}$ の，$y \leqq \frac{1}{4}x^2$ をみたす部分．端点を含む． (答)

図示すれば，次の図 7 のようになる．

図 7



$\boxed{2}$ $\mathrm{P}\,(X,\,Y)$，$\mathrm{Q}\,(x,\,y)$ とする．3 点 $\mathrm{O, P, Q}$ は 1 直線上にあるから，k を正の実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}} \iff \begin{cases} x=kX \\ y=kY \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

と置くことができる．

また，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ であるから，

$$\mathrm{OP}^2\cdot\mathrm{OQ}^2=1 \iff \left(x^2+y^2\right)\left(X^2+Y^2\right)=1$$

が成り立ち，②を代入して，$k>0$ に注意すれば

$$\left(X^2+Y^2\right)\left(k^2X^2+k^2Y^2\right)=1 \iff k^2=\frac{1}{\left(X^2+Y^2\right)^2}, \quad \therefore\ k=\frac{1}{X^2+Y^2} \ \cdots\cdots\cdots ③$$

となる．

③を②に代入して

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2}, \quad y=\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

を得る．これで $x,\,y$ と $X,\,Y$ の関係式が得られた．

点 $\mathrm{Q}\,(x,\,y)$ は円 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 上にあるから，代入して

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}-1\right)^2+\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2=4$$

$$\iff \left\{X-\left(X^2+Y^2\right)\right\}^2+Y^2=4\left(X^2+Y^2\right)^2$$

$$\iff 3\left(X^2+Y^2\right)+2X-1=0 \quad \because\ X^2+Y^2\neq 0$$

$$\iff \left(X+\frac{1}{3}\right)^2+Y^2=\frac{4}{9}$$

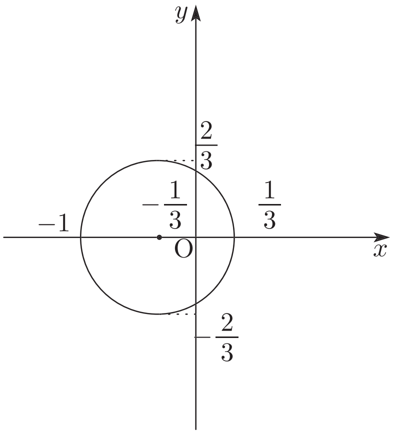
よって，点 $\mathrm{P}\,(X,\,Y)$ は，中心 $\left(-\frac{1}{3},\,0\right)$，半径 $\frac{2}{3}$ の円周上にある．点 Q は，与えられた円 C の周上を 1 周するから，除外点は存在しない．

これを図示して，次の図 8 を得る．

以上より，求める軌跡は

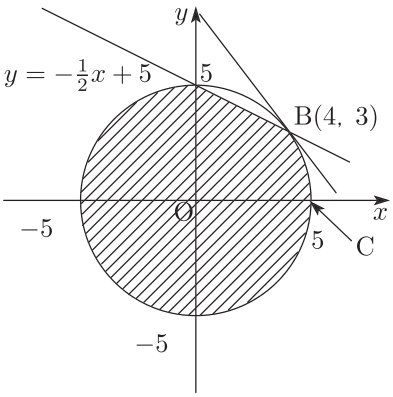
$$\text{円}\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9} \qquad \text{(答)}$$

図 8



【4】領域は図 9 の斜線部分で境界を含んでいる．この領域を D とする．

図 9



$mx+y=k$ とおいて，直線 $\ell : y=-mx+k$ が領域 D と共有点をもつ条件を調べる．

ℓ の傾き $-m$ について $m>0$ に着目し，ℓ が点 $(4, 3)$ で円 $x^2+y^2=25$ に接するとき，

$$\frac{3}{4}\cdot(-m)=-1 \qquad \therefore\ m=\frac{4}{3}$$

であるから，次のように m の値を分類して k の最大値を調べる．

(i) $0<m\leqq\frac{1}{2}$ のとき．

点 $(0, 5)$ を通るとき k は最大となり，最大値は $k=5$

(ii) $\frac{1}{2}<m\leqq\frac{4}{3}$ のとき．

点 $(4, 3)$ を通るとき k は最大となり，最大値は $k=4m+3$

(iii) $\frac{4}{3}<m$ のとき．

弧 BC 上で，円に接するとき k は最大となる．原点 O と直線 ℓ の距離が 5 である

から，

$$\frac{|-k|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

$k>0$ より，k の最大値は $k=5\sqrt{m^2+1}$

以上より，k の最大値 $\max k$ は

$$\begin{cases} 0<m\leqq\dfrac{1}{2} \text{ のとき，} \quad \max k=5 \\ \dfrac{1}{2}<m\leqq\dfrac{4}{3} \text{ のとき，} \quad \max k=4m+3 \\ \dfrac{4}{3}<m \text{ のとき，} \quad \max k=5\sqrt{m^2+1} \end{cases}$$

(答)

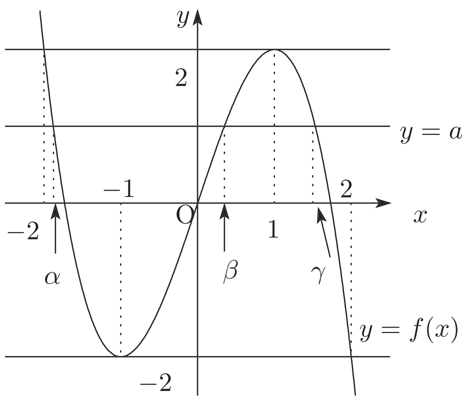
5章　微分・積分

問題

【1】(1) 方程式を $a = 3x - x^3$ と変形して右辺を $f(x)$ とおくと

$$f'(x) = 3(1 - x^2) = 3(1 - x)(1 + x)$$

図 1



よって，$y = f(x)$ のグラフは図 1 のように原点対称となる．

これと直線 $y = a$ との交点の x 座標を比べると

$$|\beta| < |\gamma| < |\alpha| \qquad \textbf{(答)}$$

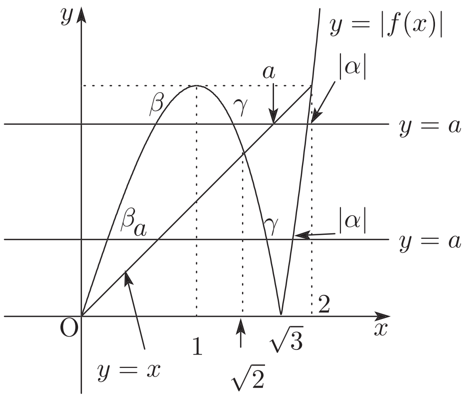
(2) まず (1) より $0 < a < 2$，$\alpha < 0$，$\beta > 0$，$\gamma > 0$ である．$|\alpha| = -\alpha$ は $y = |f(x)|$ と $y = a$ との交点で $\sqrt{3} < x < 2$ にあるものに対応する．

従って，図 2 のように $y = |f(x)|$ と $y = x$ と $y = a$ のグラフを描くことで，これらの交点の x 座標として，

$$|\alpha| = -\alpha, \quad |\beta| = \beta, \quad |\gamma| = \gamma, \quad a$$

が得られる．つまり，この 4 個の値を，x 軸上で比べることができる．これで次の図 2 が得られる．

図 2



従って次の大小関係を得る：

$$\begin{cases} 0 < a < \sqrt{2} \text{ ならば，} & |\beta| < a < |\gamma| < |\alpha| \\ a = \sqrt{2} \text{ ならば，} & |\beta| < a = |\gamma| < |\alpha| \\ \sqrt{2} < a < 2 \text{ ならば，} & |\beta| < |\gamma| < a < |\alpha| \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【2】与えられた曲線を C とする．微分して

$$y' = 3x^2 - 1$$

だから，C 上の点 $(t,\ t^3 - t)$ における接線 ℓ は，

$$\ell : y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t$$

である．

これが点 (a, b) を通るとき，次の①が成り立つ：

$$b = (3t^2 - 1)(a - t) + t^3 - t \ \cdots\cdots\cdots ①$$

よって題意が成り立つためには，①をみたす t の異なる実数解が 3 個存在することが必要かつ十分である．

①を変形して

$$2t^3 - 3at^2 + a + b = 0$$

を得る．この，t についての 3 次方程式が 3 個の異なる実数解をもつから，左辺を $f(t)$ として，t の 3 次関数 $f(t)$ を考えれば，

$f(t)$ の極大値が正であり，かつ $f(t)$ の極小値が負である，

すなわち，

$f(t)$ の 2 つの極値が異符号である

ことが必要かつ十分である．

ここで，$f(t)$ を微分して

$$f'(t) = 6t(t - a)$$

よって，$f(0)f(a) < 0$ より，求める a, b についての条件は

$$(a + b)(-a^3 + a + b) < 0 \qquad \text{(答)}$$

従って，(a, b) の存在領域を図示すれば，次の図 3 の斜線部となる．境界を含まず，原点 O も除く．

【3】題意を図にすると，次の図 4 のようになる．

図 3

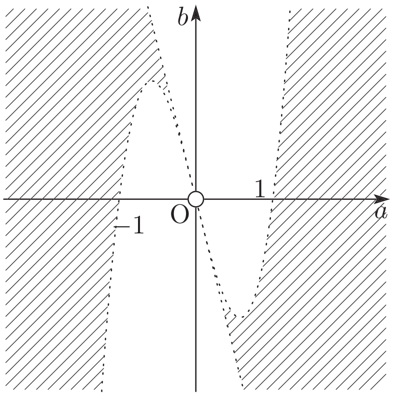
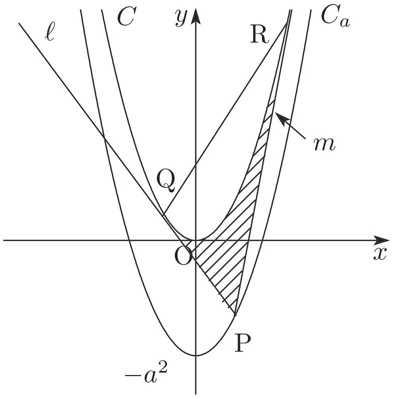


図 4



Q, R の座標を

$$\mathrm{Q}(\alpha,\, \alpha^2), \quad \mathrm{R}(\beta,\, \beta^2)$$

とおく．ただし $\alpha < \beta$ とする．Q における接線の方程式 ℓ は

$$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha) \quad \therefore\ \ell : y = 2\alpha x - \alpha^2$$

また，R における接線の方程式 m も同様にして

$$m : y = 2\beta x - \beta^2$$

2 直線 ℓ, m の交点を求めると

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \alpha\beta$$

であるから， P の座標は $\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\, \alpha\beta\right)$ となる．

点 P は，放物線 C_a 上にあるから，

$$\alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - a^2 \quad \therefore\ (\beta - \alpha)^2 = 4a^2 \ \cdots\cdots\cdots ①$$

従って，α，β の間には ①の関係が成り立つ．

線分 PQ，線分 PR と C で囲まれた部分の面積を S とする．S を積分により求めると，

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\left[(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{1}{3}\left[(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left\{-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3\right\} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3
\end{aligned}$$

$\alpha<\beta \iff \beta-\alpha>0$ であるから，①より

$$\beta-\alpha=\sqrt{4a^2}=2a\ (>0)$$

よって

$$S=\frac{2}{3}\left(\frac{2a}{2}\right)^3=\frac{2}{3}a^3$$

となり，確かに S は一定値をとることが示された． (証明終)

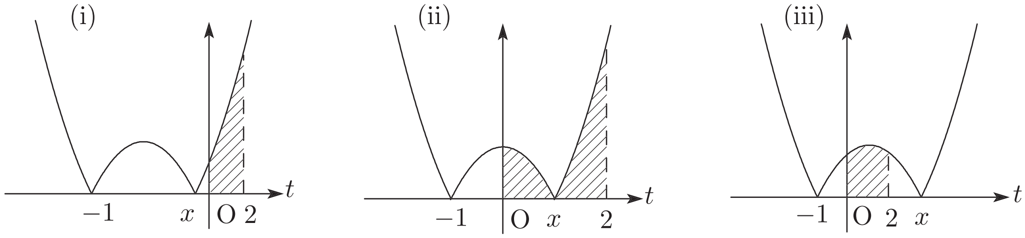
【4】(1) 被積分関数 $g(t)=\left|(t+1)(t-x)\right|$ は，$t=-1,\ x$ で t 軸と共有点をもつ．積分区間が $0\leqq t\leqq 2$ であることと合わせて，x の値について

(i) $x\leqq 0$ のとき，　(ii) $0\leqq x\leqq 2$ のとき，　(iii) $2\leqq x$ のとき

で場合を分ける．

$y=g(t)$ のグラフは，次の図 5 のようになる．

図 5



$I_1=f(x)$ とすると

(i) $x\leqq 0$ のとき，$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で，$(t+1)(t-x)\geqq 0$ だから

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^2(t+1)(t-x)\,\mathrm{d}t=\int_0^2\{t^2+(1-x)t-x\}\,\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{(1-x)t^2}{2}-xt\right]_0^2=\frac{8}{3}+2(1-x)-2x\\&=-4x+\frac{14}{3}\geqq f(0)\end{aligned}$$

(ii) $0\leqq x\leqq 2$ のとき，

$$\left|(t+1)(t-x)\right|=\begin{cases}(t+1)(t-x) & (x\leqq t\leqq 2),\\ -(t+1)(t-x) & (0\leqq t\leqq x)\end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned}f(x)&=-\left[\frac{t^3}{3}+\frac{(1-x)t^2}{2}-xt\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}+\frac{(1-x)t^2}{2}-xt\right]_x^2\\&=-2\left\{\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)x^2}{2}-x^2\right\}-4x+\frac{14}{3}\\&=\frac{1}{3}x^3+x^2-4x+\frac{14}{3}\end{aligned}$$

(iii) $2\leqq x$ のとき，$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で，$\left|(t+1)(t-x)\right|=-(t+1)(t-x)$ であるから，

$$f(x)=4x-\frac{14}{3}\geqq f(2)$$

(i)，(ii)，(iii) より，$f(x)$ が最小となるのは $0<x<2$ のときであり，このとき

$$f'(x)=x^2+2x-4$$

この範囲で, $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{5}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

以上より, 最小値は $f\left(-1+\sqrt{5}\right)$ である.

ここで，$f(x)$ を $f'(x)$ で割って次数下げを行う：

$$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-4)(x+1)-\frac{10}{3}x+6$$

より, 最小値は

$$f\left(-1+\sqrt{5}\right)=-\frac{10}{3}(-1+\sqrt{5})+6=\frac{28-10\sqrt{5}}{3}$$

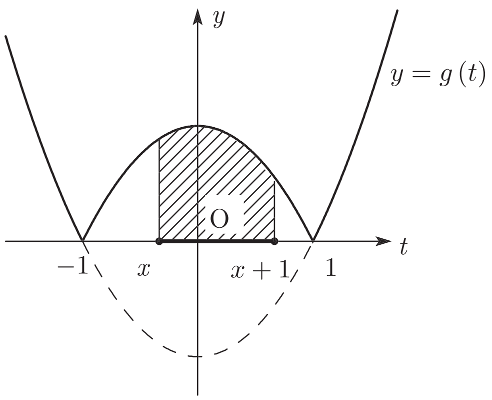
従って，求める最小値 $\min I_1$ は

$$\min I_1=\frac{28-10\sqrt{5}}{3}\qquad(x=-1+\sqrt{5}\text{のとき})\qquad\text{(答)}$$

(2) まず，I_2 は x の関数であることに着目する．それを $f(x)$ とする．

$g(t)=\left|t^2-1\right|$ と置くと，$g(-t)=g(t)$ より，$g(t)$ のグラフは $t=0$ に関して対称である．$y=g(t)$ のグラフは，図 6 のようになる．

図 6



ここで，積分区間 $x\leqq t\leqq x+1$ に着目する．この幅は常に 1 であり，区間の中央は $t=x+\frac{1}{2}$ であるから，$x+\frac{1}{2}=0\iff x=-\frac{1}{2}$ であるとき，図 6 の斜線部の面積の変化，つまり $I_2=f(x)$ は，$x=-\frac{1}{2}$ に関して対称になる．

そこで，$x\geqq-\frac{1}{2}$ の範囲で考えておけば，$x<-\frac{1}{2}$ の場合は対称性から明らかになる．

t^2-1 の不定積分は，C を積分定数として

$$\int\left(t^2-1\right)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3-t+C$$

であるが，定積分では $C=0$ として一般性を失わないから，

$$F(t)=\int\left(t^2-1\right)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3-t$$

とする．

ここで，

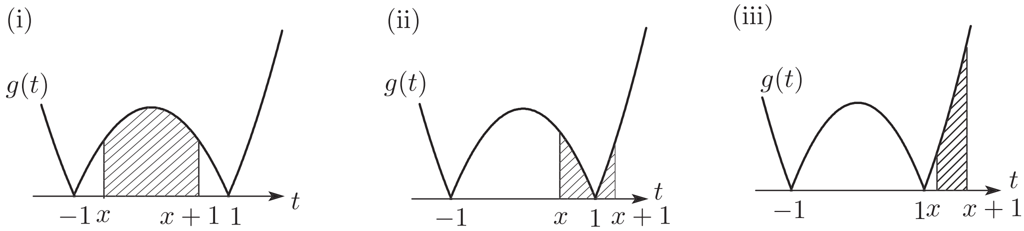
(i) $x+1 \leqq 1 \iff -\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ のとき，

(ii) $x \leqq 1 < x+1 \iff 0 < x \leqq 1$ のとき，

(iii) $1 < x$ のとき，

に場合を分ける．これを図示すると，図 7 のようになる．

図 7



(i) $x+1 \leqq 1$ つまり $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} -(t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ &= [-F(t)]_x^{x+1} = F(x) - F(x+1) \\ &= -x^2 - x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(ii) $x \leqq 1 < x+1$ つまり $0 < x \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^1 \left\{-(t^2-1)\right\}\mathrm{d}t + \int_1^{x+1} (t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ &= F(x) + F(x+1) - 2F(1) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(iii) $1 < x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} (t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ &= F(x+1) - F(x) = x^2 + x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

以上より，$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ の下で

$$f(x) = \begin{cases} -\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{12} & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0\right) \\ \dfrac{2}{3}x^3 + x^2 - x + \dfrac{2}{3} & (0 < x \leqq 1) \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{11}{12} & (x > 1) \end{cases}$$

となるから，$f(x)$ について，次が成り立つ：

$$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 0 \text{ では減少し，} x \geqq 1 \text{ では増加する．}$$

従って，$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ の範囲では，$f(x)$ は $0 < x \leqq 1$ で最小値をとる．

この最小値を求める．$f(x)$ を微分して $f'(x)=2x^2+2x-1$ だから

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad (\because 0 \leqq x \leqq 1)$$

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ として，増減表は次のようになる：

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小 (最小)	$\nearrow$	

以上より，$I_2=f(x)$ を最小にする x は，$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ では，$x=\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ である．

関数 $f(x)$ の $x=-\dfrac{1}{2}$ に関する対称性を考えると，この α と $x=-\dfrac{1}{2}$ に関して対称な $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ でも，$f(x)$ は最小になる．

よって求める x の値は．

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(答)}$$

M3JSB/M3JB/M3TB
選抜東大クラス文系数学
東大数学ⅠＡⅡＢ
東大文系数学
難関大文系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	