1MJSS

学年末確認テスト

解答

Z会東大進学教室

中１選抜東大・医学部数学

中１学年末確認テスト解答　　　　　　　　【数学１ＭＪＳＳ】

【１】<30点>

[A]　(3点×2＝6点)

(1) $(x+4)(x-8)-(x-4)^2=(x^2-4x-32)-(x^2-8x+16)=4x-48$

(2) $(3a+2b-c)(3a-2b+c)=\{3a+(2b-c)\}\{3a-(2b-c)\}$
$=9a^2-(2b-c)^2=9a^2-4b^2+4bc-c^2$

[B]　(3点×3＝9点)

(1) $2\sqrt{35}\times\sqrt{30}\div6\sqrt{42}=\frac{2}{6}\sqrt{\frac{35\times30}{42}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7\times5\times6\times5}{6\times7}}=\frac{5}{3}$

(2) $3\sqrt{12}-4\sqrt{24}+5\sqrt{27}-2\sqrt{96}=6\sqrt{3}-8\sqrt{6}+15\sqrt{3}-8\sqrt{6}=21\sqrt{3}-16\sqrt{6}$

(3) $\left(5\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{21}-7\right)\left(\sqrt{21}-13\right)$
$=\left(175-20\sqrt{21}+12\right)-\left(21-20\sqrt{21}+91\right)=75$

[C]　(3点×4＝12点)

(1) $4a^2-12ab+9b^2=(2a-3b)^2$

(2) $(2x-y)^2-3(2x-y)=(2x-y)(2x-y-3)$

(3) $2x^2+xy-2yz-4xz=x(2x+y)-2z(2x+y)=(x-2z)(2x+y)$

(4) $2x^2-xy-6y^2-2x+11y-4$
$=2x^2+(-y-2)x-\left(6\boldsymbol{y^2}-\boldsymbol{11y}+\boldsymbol{4}\right)$
$=2x^2+(-y-2)x-(2y-1)(3y-4)$
$=(x-2y+1)(2x+3y-4)$

[D]　(3点)

最大値　0　($x=0$のとき)　　最小値　-48　　($x=4$ のとき)

【２】<15点>

[A] (2点×5＝10点)

(1) $16x^2-37x+21=0$

$(x-1)(16x-21)=0$　　∴　$x=1,\ \frac{21}{16}$

(2) $-x^2-2x+120=0$　より　$x^2+2x-120=0$

$(x-10)(x+12)=0$　　∴　$x=10,\ -12$

(3) $(x-3)(x+11)=3(x-9)$　より　$x^2+8x-33=3x-27$

よって，$x^2+5x-6=0$　　$(x-1)(x+6)=0$　　∴　$x=1,\ -6$

（4）$9x^2-30x+15=0$　より，　$3x^2-10x+5=0$

$$\therefore\quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-15}}{3}=\frac{5\pm\sqrt{10}}{3}$$

（5）$16x^2-42x+27=0$

$$(2x-3)(8x-9)=0$$
$$x=\frac{3}{2},\ \frac{9}{8}$$

［B］（5 点）

$3x^2-4kx+5=0$ の判別式をDとすると，

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-3\times5=4k^2-15$

よって，

$D>0$ のとき，$k^2>\frac{15}{4}$　より，$k<-\frac{\sqrt{15}}{2}$ ，$\frac{\sqrt{15}}{2}<k$

$D=0$ のとき，$k^2=\frac{15}{4}$　より，$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

$D<0$ のとき，$k^2<\frac{15}{4}$　より，$-\frac{\sqrt{15}}{2}<k<\frac{\sqrt{15}}{2}$

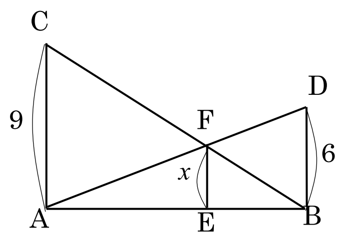
したがって，

$k<-\frac{\sqrt{15}}{2}$ ，$\frac{\sqrt{15}}{2}<k$ のとき２個

$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$　のとき１個

$-\frac{\sqrt{15}}{2}<k<\frac{\sqrt{15}}{2}$　のとき０個（なし）

【３】＜5 点×3＝15 点＞



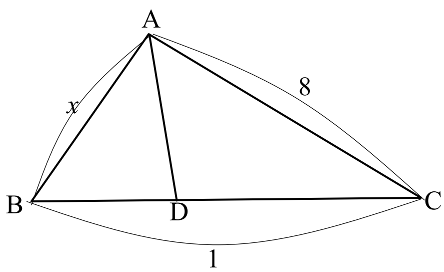
（1）　AC//BD より

AF:FD=AC:BD=3:2

∴ AF:AD=3:5

EF//BD より

$x=6\times\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$



(2)　∠BAD=∠CAD より，BD:DC=x:8

$\mathrm{CD}=\frac{8}{x+8}\times10$

△ADC∽△BAC（∠CAD=∠CBA，∠C 共通）より

AC:BC=CD:CB

$8:10=\frac{8}{x+8}\times10:8$

これより，$\frac{10}{x+8}\times10=8$　∴　$x+8=\frac{100}{8}$

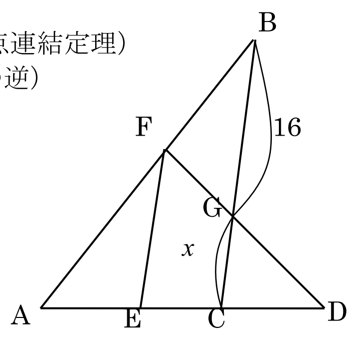
よって，$x=\frac{9}{2}$

(3) AE=EC，AF=FB より EF//CB…①　2EF=BC　…②（中点連結定理）

①と EC=CD より，EF=2CG=2x …③（中点連結定理の逆）

②，③より，$4x=\mathrm{BC}=x+16$

よって，$x=\frac{16}{3}$



【４】＜25 点＞

(1)　　(6点)

①，②を連立して　$\frac{1}{2}x^2 = -x + 4$

これより，$x^2 + 2x - 8 = 0$　　$(x+4)(x-2) = 0$　$x = -4,\ 2$

よって，A(2, 2)，B(−4,　8)

(2)　　(7点)

接線の方程式を$y = ax + b$とおくと，$C(-1, -4)$を通るので，$-4 = -a + b$

これより，$b = a - 4$ ．よって，接線の式は　$y = ax + a - 4$ とおける．

これと①とを連立して　　$\frac{1}{2}x^2 = ax + a - 4$ よって，　$x^2 - 2ax - 2a + 8 = 0$ …③

これが重解を持つときが，接するときなので，判別式をDとして，

$\frac{D}{4} = a^2 + 2a - 8 = 0$　$(a+4)(a-2) = 0$　　$\therefore\ a = 2, -4$

$a = 2$のとき，③は$x^2 - 4x + 4 = 0$　よって$(x-2)^2 = 0$　$\therefore\ x = 2$

したがって，A(2, 2)で接する．

$a = 4$のとき，③は$x^2 + 8x + 16 = 0$　よって$(x+4)^2 = 0$　$\therefore\ x = -4$

したがって，B(−4,　8)で接する．　　　以上より示された．

(3)　　(4点)

$\Delta\mathrm{BDC} : \Delta\mathrm{ADC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DA} = \left|\text{Bの } x \text{ 座標}\right| : \left|\text{Aの } x \text{ 座標}\right| = 4 : 2 = 2 : 1$

(4)　　(8点)

Pを通り，直線AB(②) に平行な直線 $y = -x + k$ …④を考える．この直線と放物線①がPと異なる点Qで再び交わると仮定する．するとこのとき，PとQの間の①の曲線上に点Rを取ることができ，Rは直線PQについて直線ABと反対側にあるので，

$\Delta\mathrm{RAB} > \Delta\mathrm{PAB} = \Delta\mathrm{QAB}$

が成り立つ．したがって，ΔPABは面積最大ではない．

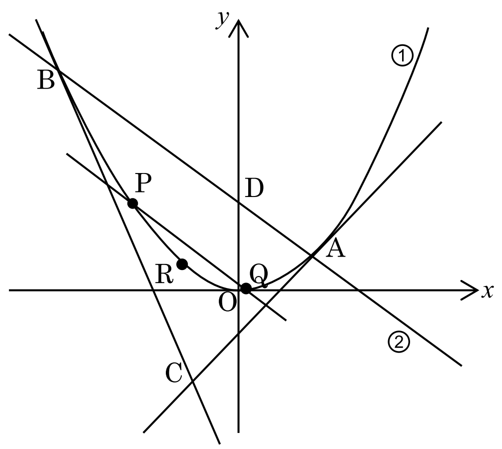
よって，ΔPABが面積最大になるときは，④と①が異なる２点で交わらない，すなわち接するときである．つまり，①と④を連立した2次方程式が重解を持つときを求めればよい．①＝④として，

$\frac{1}{2}x^2 = -x + k$　　これより，$x^2 + 2x - 2k = 0$　　この判別式をDとすると，条件は

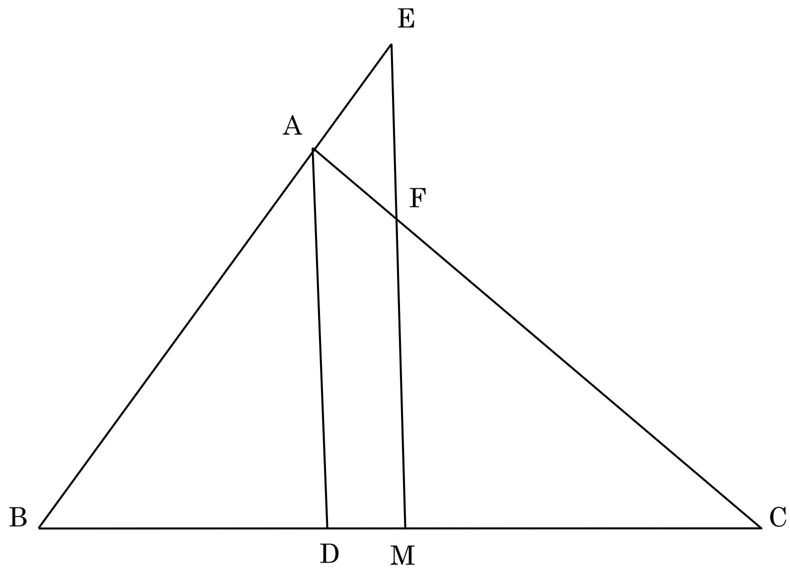
$\frac{D}{4} = 1 + 2k = 0$　　$\therefore\ k = -\frac{1}{2}$

このとき2次方程式は$x^2 + 2x + 1 = 0$となるので　$(x+1)^2 = 0$　$\therefore\ x = -1$

よって，求めるPは$\mathrm{P}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$



【５】＜15 点＞



AD//EM より，$\mathrm{BA:BE=BD:BM}$

$$\therefore\ \mathrm{BE}=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BD}}\times\mathrm{BM}$$

AD//FM より，$\mathrm{CF:CA=CM:CD}$

$$\therefore\ \mathrm{CF}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CD}}\times\mathrm{CM}$$

一方，角の２等分線の性質より

$$\mathrm{BA:CA=BD:CD}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CD}}$$

以上と$\mathrm{BM=CM}$より，

$$\mathrm{BE}=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BD}}\times\mathrm{BM}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CD}}\times\mathrm{CM}=\mathrm{CF}$$

よって，証明された　□

Z-KAI

会員番号		氏　名	