中２　学年末確認テスト　　解答　　　　　【数学２ＭＪＳＳ】

【1】　（5×5=25 点）

(1)

$$\left(\frac{2+2i}{2-2i}\right)^{2021}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2021}=\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{2021}=\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^{2021}=i^{2021}$$

$$=i^{4\times505+1}=\boldsymbol{i}$$

(2)

$$\frac{i}{2-i}+\frac{2i}{3+i}=\frac{i(2+i)}{4+1}+\frac{2i(3-i)}{9+1}=\frac{2i-1}{5}+\frac{3i+1}{5}=\boldsymbol{i}$$

(3) 左辺を$f(x)$とすると，$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$なので，組立除法より

$$2x^3+7x^2+6x-5=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+8x+10)=(2z-1)(x^2+4x+5)$$

よって，$2x-1=0$ または　$x^2+4x+5=0$．これより，

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}\ ,-2\pm i}$$

(4)　$x=2-i$ より，$x-2=-i$ ．ゆえに　$(x-2)^2=-1$

これより，$x^2-4x+5=0$　式の除算により，

$f(x)=x^4-3x^3+3x^2+x+8=(x^2-4x+5)(x^2+x+2)+4x-2$

ここに $x=2-i$ を代入.

$$f(2-i)=0+4(2-i)-2=\boldsymbol{-4i+6}$$

(5) 求める複素数を$a+bi$　（ a,b は実数）とおく.

$(a+bi)^2=7+24i$ より， $a^2-b^2+2abi=7+24i$

a,b は実数，i は虚数単位より，

$$a^2-b^2=7,\qquad 2ab=24$$

$a\neq0$ より　$b=\frac{12}{a}$．これをを代入して，

$$a^2-\frac{144}{a^2}=7$$

$$\therefore a^4-7a^2-144=0$$

$$(a^2+9)(a^2-16)=0$$

a は実数より，$a=\pm 4$ ． このとき $b=\pm 3$ （複号同順）

よって，求める複素数は　$\pm(\boldsymbol{4}+\boldsymbol{3i})$

【2】　(3×5=15 点)

⑴　$A\subset B\cap C$ ならば $A\subset B\cup C$ は真

$A\subset B\cup C$ならば　$A\subset B\cap C$ は偽　（反例　$A\subset B\cap \overline{C}$）

よって，十分条件であるが必要条件ではない．　**ア**

⑵ $x\in A\cup B$ ならば　$x\in A$　は偽（反例　$x\in B$）

$x\in A$ ならば　$x\in A\cup B$　は真

よって，必要条件であるが十分条件ではない．　**イ**

⑶　$x>y$ ならば　$x^2>y^2$　は偽（反例　$x=1, y=-2$）

$x^2>y^2$　ならば　$x>y$ も偽（反例　$x=-2, y=1$）

よって，十分条件でも必要条件でもない．　**エ**

⑷　$x>y$ ならば　$x^3>y^3$　は真

$x^3>y^3$　ならば　$x>y$ も真

$$\because\ x^3-y^3=\big((x\,,y)\big)(x^2+xy+y^2)=(x-y)\left\{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right\}>0$$

ならば，$(x\,,y)\neq(0\,,0)$であるから，$x-y>0$が成立する．

よって，必要十分条件である．　**ウ**

⑸　$\alpha+\beta+\gamma=0$ かつ　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$　であるとき，

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0$$

となり，　α,β,γ は実数であるから$\alpha=\beta=\gamma=0$．よって，$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3$

$\therefore$ $\alpha+\beta+\gamma=0$ かつ$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$ ならば$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3$　は真．

$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3$　ならば　$\alpha+\beta+\gamma=0$ かつ　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$ は偽．

（反例　$\alpha=\beta=\gamma=1$）

よって，十分条件であるが必要条件ではない．　**ア**

【3】　(25 点)

(1) (10 点)

$$f(x)=x+\frac{6}{x+3}=x+3+\frac{6}{x+3}-3$$

$x \geqq -2$ より$x+3>0$であるから，相加相乗平均の関係より，

$$f(x)=x+3+\frac{6}{x+3}-3 \geq 2\sqrt{(x+3)\cdot\frac{6}{x+3}}-3=2\sqrt{6}-3$$

等号成立は，$x+3=\frac{6}{x+3}$ ．すなわち，$(x+3)^2=6$ ．$x+3>0$ より

$x=-3+\sqrt{6}$のとき.

よって，最小値は$\mathbf{2\sqrt{6}-3}$

(2) (15 点)

x^2+x+1 は 2 次式なので, あまりは 1 次式以下となる. よって, 余りを,

$ax+b$ (a,bは実数) とおくと，商を$Q(x)$ とすれば

$$(x^5+x)^{2020}+(x^4+1)^{2021}+x^{2022}=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$$

が成り立つ．この式を$f(x)$とおく.

ここで$x^2+x+1=0$の解の 1 つを ω とおくと，

$$\omega^2+\omega+1=0 \quad \cdots①$$

が成り立つ．この両辺にω をかけると

$$\omega^3+\omega^2+\omega=0$$

$$\therefore\ \omega^3=-(\omega^2+\omega)=1 \quad (\because ①) \quad \cdots ②$$

が成り立つ.

ここで$f(\omega)$を考えると，

$$f(\omega)=(\omega^5+\omega)^{2020}+(\omega^4+1)^{2021}+\omega^{2022}$$
$$=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b$$

①，②より

$$\omega^5+\omega=\omega^2+\omega\ (\because ①)$$
$$=-1\ (\because ②)$$
$$\omega^4+1=\omega+1\ (\because ①)$$

$$= -\omega^2 (\because ②)$$

であるから，

$$\left(\text{左辺}\right) = (-1)^{2020} + (-\omega^2)^{2021} + \omega^{2022} = 1 + \omega^{4042} + \omega^{2022} = 1 + \omega + 1$$
$$= \omega + 2$$

$$(\text{右辺}) = (\omega^2 + \omega + 1)Q(\omega) + a\omega + b = a\omega + b$$

ここで，a, bは実数，ωは虚数であるから，$a = 1, b = 2$ となる．よって求める余りは，$\boldsymbol{x + 2}$

【4】　（20 点）

$$a + \frac{1}{b}, \qquad b + \frac{1}{c}, \qquad c + \frac{1}{a}$$

がすべて 2 未満であると仮定する．すなわち

$$a + \frac{1}{b} < 2, \qquad b + \frac{1}{c} < 2, \qquad c + \frac{1}{a} < 2$$

これより

$$a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} < 6$$

ところが　a, b, c は正の数であるから，相加相乗平均の関係より，

$$\left(\text{左辺}\right) = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} + 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{c}} \geqq 6$$

となり，矛盾が生じる．

よって，背理法により

$$a + \frac{1}{b}, \qquad b + \frac{1}{c}, \qquad c + \frac{1}{a}$$

のうち，少なくとも 1 つは 2 以上であることが証明された．□

【5】（10×2＝20 点）

(1)

「 n^3 が偶数ならば，n は偶数である」の対偶は「n が奇数ならば，n^3 は奇数である」…（＊）となる．対偶は真偽が一致するので，（＊）を証明すればよい．

n が奇数のとき，$n = 2m + 1$ （m は整数）とおくことができる．

このとき，

$$\begin{aligned} n^2 &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

となり，$m^2 + 2m$は整数より，これは奇数となる．よって（＊）が成り立つことが証明された．□

(2) $\sqrt[3]{2}$が有理数であると仮定する．

すなわち，p, q を互いに素である整数（ただし$p \neq 0$）（…①）として，

$$\sqrt[3]{2} = \frac{q}{p}$$

とする．これより

$$\sqrt[3]{2}\,p = q$$

両辺を 3 乗して

$$2p^3 = q^3 \quad \dots ②$$

p^3は整数なので，q^3は偶数である．よって，(1)より，q は偶数．…③

したがって，$q = 2a$ （a は整数）．これを②に代入して，

$$2p^3 = 8a^3$$

$$\therefore\ p^3 = 4a^3$$

a^3は整数なので，p^3は偶数である．よって，(1)より，p は偶数．

これと③より，p, q は公約数に 2 を持つことになるが，これは①に矛盾．

よって，背理法により，$\sqrt[3]{2}$ は無理数であることが証明された．□