目 次

はじめに …… 2
１章　数と式（１）－式の展開－ …… 4
２章　数と式（２）－因数分解－ …… 26
３章　数と式（３）－実数－ …… 50
４章　２次関数（１）－ 関数とグラフ－ …… 68
５章　２次関数（２）－２次関数の決定－ …… 90
６章　２次関数（３）－２次関数の最大・最小Ⅰ－ …… 114
７章　２次関数（４）－２次関数の最大・最小Ⅱ－ …… 132
８章　２次関数（５）－２次関数と２次方程式－ …… 150
９章　２次関数（６）－２次関数と２次不等式－ …… 164
10章　２次関数（７）－２次関数と２次方程式・２次不等式－ …… 178
11章　集合と論理（１）－集合－ …… 194
12章　集合と論理（２）－命題と論証－ …… 218
13章　集合と論理（３）－証明－ …… 236

はじめに

1.　Z会の教室　数学の指導方針

数学で他の人より一歩先にいくには

はじめて見たタイプの問題に対応できる力

が必要不可欠です。しかし，この力は，一朝一夕で身につけることはできず，勉強の仕方を間違うと思うように力がつきません。

そこで，数学科では，この力を養成するために，授業において，問題を数多く解くことに重点をおかず，演習価値の高い良質な問題を一問一問丁寧に解説し，「なぜそうなるのか」がわかることに重点をおいた指導を行います。さらに，一つの問題を様々な角度から考えるので，考え方の視野が広がっていくのも特徴です。なお，公式・定理などの重要事項についても場面に応じてわかりやすく解説することで，知識面の対策も行っていきます。

また，添削課題を通して，繰り返し答案作りを行うことで，自分の考えたことを採点者に正確に伝える力，いわゆる「記述力」も身につけていきます。

2.　授業について

予習

授業は，時間が限られています。その時間を最大限有効に活かすよう準備をしておきましょう。たとえば，テキストに目を通してから授業に臨むと，授業での吸収はより高まります。また，しっかりとした予習をしていれば，演習のときに手が動かないということはないでしょう。

授業内

授業は答え合わせの場ではありません。自身の解答と先生が示す正解が違うとき，どうしてそうなったのかを考える姿勢をつねにもち，授業に臨んでください。また，講義を集中して聞くことはもちろんですが，きちんとノートも取りましょう。そのとき，ただ正解を書き写すだけでなく，後の復習に役立つように，先生が示したポイントなども書き込んでおきましょう。

復習

授業で学習したことをきちんと定着させるためにも復習は欠かせません。おすすめの復習は，授業で扱った問題を解き直してみることです。着眼のポイントや方針の立て方等思い出しながら，実際に手を動かしてみましょう。さらに，余力がある人は授業で扱わなかった問題も解いてみましょう。

添削課題

最低限身につけておきたいという問題で構成されていますので，復習が追いつかないというときでも，この添削課題には，かかさず取り組みましょう。添削が返却されたら，間違えた箇

所はなぜこの解答に至るのかという過程と照らし合わせて見直し，同じタイプの問題が次回出題された時に正解が導けるようにしておきましょう。

３．　テキストの構成

●要点

公式や定理の紹介や例題などで構成されています。授業前に目を通しておきましょう。

※　要点は章ごとに必ずあるわけではありません。

●問題

授業を行うときに中心に扱うコーナーです。次の２つのパートに分かれています。

演習：授業のほとんどは，このパートにある問題の演習と解説を行います。

自習：補充問題です。自宅で復習用として練習してください。

※　自習の問題は章ごとに必ずあるわけではありません。

●添削課題

添削課題の取り組み方については，スタッフ・講師からの指示もしくは受講マニュアルに従ってください。

●問題のレベルについて

Ｚ会の教室のテキストでは，問題のレベルを★の個数によって３段階で表します。

★：基礎　　★★：標準　　★★★：応用（発展）

なお，☆は選抜講座専用問題となっています。

※映像授業をご受講の皆様

・ 映像授業では予習不要です。映像で問題演習の指示が出たら，映像を停止して問題に取り組みましょう。
・ 授業をご受講いただく前に，各講座のオリエンテーション映像をご覧ください。

1章　数と式（1）ー式の展開ー

要点

例題 1

次の問いに答えなさい.

(1) 〔　〕内の文字について，次の単項式の係数と次数を答えなさい.

① $5ax^3$　〔x〕　　② $-8x^2yz^3$　〔y〕

(2) 〔　〕内の文字について，次の整式の次数と定数項を答えなさい.

① $x^2+2ax-a^3$　〔x〕　　② $a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$　〔a〕

(3) 次の整式を x について，降べきの順に整理しなさい.

① $-3x+5x^2+4x-9x^2+4-2x^3$　　② $2x^2y-xy^2+4x^3-3x^2$

■考え方

▼ **単項式**　ax，$-7xy^2$ のように，いくつかの数や文字をかけ合わせた式

◆ 次数 $\cdots$ 着目する文字のかけ合わされている個数.

◆ 係数 $\cdots$ 着目する文字を取り除いた残りの式.

<例> $-4x^2y$

・x と y に着目すると，係数 $\cdots-4$，次数 $\cdots3$

・x に着目すると，係数 $\cdots-4y$，次数 $\cdots2$

・y に着目すると，係数 $\cdots-4x^2$，次数 $\cdots1$

▼ **多項式**　単項式の和でかかれた式

◆ 項 $\cdots$1つ1つの単項式．着目する文字の入っていない項（定数項）も項である.

◆ 同類項 $\cdots$ 項のうちで，係数を除いた式が同じであるもの.

◆ 次数 $\cdots$ 式の各項の次数のうち最大のもの.

<例> $2x^2-3xy+4xy^3$

・x と y に着目すると，次数 $\cdots4$

・x に着目すると，次数 $\cdots2$

・y に着目すると，次数 $\cdots3$

▼ **整式**

単項式と多項式を合わせたもの．次数が n の整式を **n 次式** という．次数が p で項数が q の整式を **p 次 q 項式** という.

注) 多項式を整式の意味で使う場合もある．このとき，係数がすべて整数の式ということではない.

▼ **整式の整理**

① かっこをはずす.

② 着目する文字と定数項を明らかにする.

③ 同類項をまとめる. → **同類項を簡約する.**

④ 着目する文字について, 次数の高い方から順に並べる. → **降べき** の順に整理する.

着目する文字について, 次数の低い方から順に並べる. → **昇べき** の順に整理する.

▼ **分数式** 分母に文字を含む式.

＜例＞ $\dfrac{5}{x^2}$, $\dfrac{7}{y+5}$ など

▼ **有理式** 整式と分数式とを合わせた式.

＜例＞ $x+4+\dfrac{3}{x-1}$ など

▼ **無理式** 根号の中に文字を含む式.

＜例＞ $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x^2-x-3}$ など

▼ **代数式** 有理式と無理式を合わせた式.

＜例＞ $x-7+\sqrt{x+5}$ など

■解答

(1) ① 単項式 $5ax^3 = 5a \times x^3$ より,

係数は $\boldsymbol{5a}$, 次数は **3 次**

② 単項式 $-8x^2yz^3 = -8x^2z^3 \times y$ より,

係数は $\boldsymbol{-8x^2z^3}$, 次数は **1 次**

(2) ① 整式 $x^2+2ax-a^3$ より, 項は x^2, $2ax$, $-a^3$ だから,

次数は **2 次** , 定数項は $\boldsymbol{-a^3}$

② 整式 $a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$ より, 項は a^3, $-3a^2b$, $3ab^2$, b^3 だから,

次数は **3 次** , 定数項は $\boldsymbol{b^3}$

(3) ①
$$\begin{aligned} -3x+5x^2+4x-9x^2+4-2x^3 &= -2x^3+5x^2-9x^2-3x+4x+4 \\ &= \boldsymbol{-2x^3-4x^2+x+4} \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 2x^2y-xy^2+4x^3-3x^2 &= 4x^3+2x^2y-3x^2-xy^2 \\ &= \boldsymbol{4x^3+(2y-3)x^2-y^2x} \end{aligned}$$

例題 2

次の問いに答えなさい.

(1) 次の式を計算しなさい.

① $x^2yz^3(x-3y+2z)$　　② $(2x^2-3)(x^2-3x+4)$

③ $(a^2+4a-1)(a^2-3a+2)$

(2) $(x^2-2x+3)(2x^2-3x+1)$ を展開したときの x^2 の係数を求めなさい.

■考え方

▼ 単項式の乗法

文字 a を n 個かけ合わせたものを $\boldsymbol{a^n}$ とかき, $\boldsymbol{a}$ **の** $\boldsymbol{n}$ **乗** という.

✦ 指数 $\cdots a^n$ とかいたときの n を a^n の**指数**という.

✦ 累乗 $\cdots a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots,\ a^n,\ \cdots$ を総称して, $\boldsymbol{a}$ **の累乗** という.

累乗の計算には, 次の指数法則を用いる.

▼ 指数法則

$m,\ n$ を正の整数としたとき,

① $a^m a^n = a^{m+n}$

② $(a^m)^n = a^{mn}$

③ $(ab)^n = a^n b^n$

＜例＞

$$\begin{aligned}
(-2a^2b)^3 \times (-3ab^3)^2 &= (-2)^3(a^2)^3b^3 \times (-3)^2a^2(b^3)^2 \\
&= (-8)a^{2\times3}b^3 \times 9a^2b^{3\times2} \\
&= -8a^6b^3 \times 9a^2b^6 \\
&= -8 \times 9 \times a^{6+2} \times b^{3+6} \\
&= -72a^8b^9
\end{aligned}$$

▼ 整式の乗法

いくつかの整式の積を1つの整式に直すことを**展開する**という.

＜乗法公式を利用できない式の展開の手順＞

① 分配法則を繰り返し用いて, かっこをはずす.

② 同類項があればそれをまとめ, 降べきの順にまとめる.

▼ 分配法則

① $A(B+C) = AB + AC$

② $(A+B)C = AC + BC$

■解答

(1) ①
$$\begin{aligned} x^2yz^3(x-3y+2z) &= x^2yz^3\cdot x + x^2yz^3\cdot(-3y) + x^2yz^3\cdot 2z \\ &= x^{2+1}yz^3 - 3x^2y^{1+1}z^3 + 2x^2yz^{3+1} \\ &= \boldsymbol{x^3yz^3 - 3x^2y^2z^3 + 2x^2yz^4} \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} (2x^2-3)(x^2-3x+4) =& 2x^2(x^2-3x+4) - 3(x^2-3x+4) \\ =& 2x^2\cdot x^2 + 2x^2\cdot(-3x) + 2x^2\cdot 4 - 3\cdot x^2 - 3\cdot(-3x) - 3\cdot 4 \\ =& 2x^{2+2} - 6x^{2+1} + 8x^2 - 3x^2 + 9x - 12 \\ =& 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 3x^2 + 9x - 12 \\ =& \boldsymbol{2x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 9x - 12} \end{aligned}$$

＜別解＞

縦書きの計算もできる.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2x^2 & & -3 & & \\ \times) & x^2 & -3x & +4 & & \\ \hline & 2x^4 & & -3x^2 & & \\ & & -6x^3 & & +9x & \\ & & & 8x^2 & & -12 \\ \hline & 2x^4 & -6x^3 & +5x^2 & +9x & -12 \end{array}$$

縦書きの計算では，係数だけを抜き出して計算してもよい．この方法を係数分離法という.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2 & & -3 & & \\ \times) & 1 & -3 & 4 & & \\ \hline & 2 & & -3 & & \\ & & -6 & & 9 & \\ & & & 8 & & -12 \\ \hline & 2 & -6 & 5 & 9 & -12 \end{array}$$

③
$$\begin{aligned} &(a^2+4a-1)(a^2-3a+2) \\ =& a^2(a^2-3a+2) + 4a(a^2-3a+2) - (a^2-3a+2) \\ =& a^2\cdot a^2 + a^2\cdot(-3a) + a^2\cdot 2 + 4a\cdot a^2 + 4a\cdot(-3a) + 4a\cdot 2 - a^2 + 3a - 2 \\ =& a^{2+2} - 3a^{2+1} + 2a^2 + 4a^{1+2} - 12a^{1+1} + 8a - a^2 + 3a - 2 \\ =& a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 4a^3 - 12a^2 + 8a - a^2 + 3a - 2 \\ =& a^4 - 3a^3 + 4a^3 + 2a^2 - 12a^2 - a^2 + 8a + 3a - 2 \\ =& \boldsymbol{a^4 + a^3 - 11a^2 + 11a - 2} \end{aligned}$$

＜別解＞

係数分離法で解く.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 4 & -1 & & \\ \times) & 1 & -3 & 2 & & \\ \hline & 1 & 4 & -1 & & \\ & & -3 & -12 & 3 & \\ & & & 2 & 8 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -11 & 11 & -2 \end{array}$$

(2) x^2 の項の係数は，かけて x^2 となる組み合わせを考えて，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 - 2\cdot(-3) + 3\cdot 2 &= 1+6+6 \\ &= \boldsymbol{13} \end{aligned}$$

例題 3

次の式を展開しなさい.

(1) $(2x+3)^3$　　(2) $(3a-2b)^3$

(3) $(x+2)(x^2-2x+4)$　　(4) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

(5) $(3a+2b+c)^2$　　(6) $(x-2y+3z)^2$

■考え方　乗法公式

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　（和の平方）

② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　（差の平方）

③ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　（和と差の積）

④ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

⑤ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　（和の立方）

⑦ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$　（差の立方）

⑧ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

⑨ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑩ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

《⑥の証明》

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+2a^2b+a^2b+ab^2+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

《⑦の証明》

⑥より,

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= \{a+(-b)\}^3\\ &= a^3+3a^2\cdot(-b)+3a\cdot(-b)^2+(-b)^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

《⑧の証明》

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\ &= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

《⑨の証明》

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

《⑩の証明》

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \{a+(b+c)\}^2\\ &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2\\ &= a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\end{aligned}$$

注) $(a+b)(a^2 \boldsymbol{-2ab} + b^2) = a^3+b^3$ などと間違えないように！
もし，覚えているはずの公式に自信がなかったら，$a=1$，$b=1$ を代入してみよう．
このとき等式が成立していなければ，暗記している公式は誤っている．

■解答

(1)
$$\begin{aligned}&(2x+3)^3\\ =&(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2+3^3\\ =&2^3x^3+3\cdot 2^2x^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 9+27\\ =&8x^3+3\cdot 4x^2\cdot 3+54x+27\\ =&\boldsymbol{8x^3+36x^2+54x+27}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(3a-2b)^3\\ =&(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot 2b+3\cdot 3a\cdot(2b)^2-(2b)^3\\ =&3^3a^3-3\cdot 3^2a^2\cdot 2b+3\cdot 3a\cdot 2^2b^2-2^3b^3\\ =&27a^3-3\cdot 9a^2\cdot 2b+3\cdot 3a\cdot 4b^2-8b^3\\ =&\boldsymbol{27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(x+2)(x^2-2x+4) &= x^3+2^3\\ &= \boldsymbol{x^3+8}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}(2a-b)(4a^2+2ab+b^2) &= (2a)^3-b^3\\ &= 2^3a^3-b^3\\ &= \boldsymbol{8a^3-b^3}\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}&(3a+2b+c)^2\\ =&(3a)^2+(2b)^2+c^2+2\cdot 3a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot c+2\cdot c\cdot 3a\\ =&3^2a^2+2^2b^2+c^2+12ab+4bc+6ca\\ =&\boldsymbol{9a^2+4b^2+c^2+12ab+4bc+6ca}\end{aligned}$$

(6) $(x-2y+3z)^2$

$=x^2+(-2y)^2+(3z)^2+2\cdot x\cdot(-2y)+2\cdot(-2y)\cdot 3z+2\cdot 3z\cdot x$

$=x^2+(-2)^2y^2+3^2z^2-4xy-12yz+6zx$

$\boldsymbol{=x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx}$

■発展学習

▼ $(a+b)^n$ の展開

$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ の展開式についてはすでに触れた．$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ も含めて $(a+b)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の展開式をかくと，

$$\begin{array}{rcc}
(a+b)^1 & = & a+b \\
(a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 & = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5 & = & a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{array}$$

次に，$(a+b)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の展開式の係数だけをかくと，

$$\begin{array}{rcc}
(a+b)^1 & = & 1\quad 1 \\
(a+b)^2 & = & 1\quad 2\quad 1 \\
(a+b)^3 & = & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
(a+b)^4 & = & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
(a+b)^5 & = & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1
\end{array}$$

このように $(a+b)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の係数だけを三角形状に並べたものを**パスカルの三角形**という．

これは，

◆ 各行の両端は 1

◆ 各行の連続する 2 数の和は，2 数の間のすぐ下の行の数に等しい．

例題 4

次の式を展開しなさい.

(1) $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

(2) $(x+y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)^2$

■考え方 組み合わせや順序の工夫による展開

◆ 乗法公式が利用できるように，展開の組み合わせやかける順序を工夫する.

◆ $A^nB^n=(AB)^n$ を利用する.

■解答

(1)
$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)\\
=&\left\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\right\}\left\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\right\}\\
=&(a^3+b^3)(a^3-b^3)\\
=&(a^3)^2-(b^3)^2\\
=&a^{3\times 2}-b^{3\times 2}\\
=&\boldsymbol{a^6-b^6}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&(x+y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)^2\\
=&\left\{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)\right\}^2\\
=&\left\{(x^2-y^2)(x^2+y^2)\right\}^2\\
=&\left\{(x^2)^2-(y^2)^2\right\}^2\\
=&\left(x^{2\times 2}-y^{2\times 2}\right)^2\\
=&(x^4-y^4)^2\\
=&(x^4)^2-2x^4y^4+(y^4)^2\\
=&x^{4\times 2}-2x^4y^4+y^{4\times 2}\\
=&\boldsymbol{x^8-2x^4y^4+y^8}
\end{aligned}
$$

例題 5

次の等式が x についての恒等式となるとき，定数 a, b, c の値を求めなさい．

$$(2x+1)(x^2+ax+b)=2x^3+cx^2-x+2$$

■考え方 恒等式

等式に含まれる文字にどのような値を代入しても等号が成り立つとき，その等式を**恒等式**という．

▼ 恒等式であるための条件

$P(x)$, $Q(x)$ を x についての n 次の整式とするとき，

① $P(x)=0$ が恒等式 $\Longleftrightarrow$ $P(x)$ の各項の係数は 0

＜例＞ $ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式　$\Longleftrightarrow a=b=c=0$

② $P(x)=Q(x)$ が恒等式

$\Longleftrightarrow$ $P(x)$, $Q(x)$ の次数は等しく，両辺の同次の項の係数は等しい．

＜例＞ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式 $\Longleftrightarrow a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

▼ 恒等式の未定係数の決定法

文字 x についての恒等式の未定係数を求めるには，以下の 2 通りの方法がある．

① 係数比較法：両辺の対応する（次数の等しい）項の係数が等しいことから未定係数に関する方程式を立て，未定係数を求める．

② 数値代入法：未定係数を求めやすい適当な x の値を代入する．

注) この場合は，最後に逆（十分性）を確かめること．

■解答

左辺を展開して整理すると，

$$\begin{aligned}(2x+1)(x^2+ax+b)&=2x^3+cx^2-x+2\\2x^3+2ax^2+2bx+x^2+ax+b&=2x^3+cx^2-x+2\\2x^3+(2a+1)x^2+(a+2b)x+b&=2x^3+cx^2-x+2\end{aligned}$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases}2a+1=c & \cdots ① \\ a+2b=-1 & \cdots ② \\ b=2 & \cdots ③\end{cases}$$

③を②に代入すると，

$$\begin{aligned}a+2\cdot 2&=-1\\a+4&=-1\\a&=-5\end{aligned}$$

これを①に代入すると，

$$\begin{aligned} 2\cdot(-5)+1&=c\\ -10+1&=c\\ c&=-9 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a=-5,\ b=2,\ c=-9}$

＜別解＞

x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，$x=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (2x+1)(x^2+ax+b)&=2x^3+cx^2-x+2\\ (2\cdot0+1)(0^2+a\cdot0+b)&=2\cdot0^3+c\cdot0^2-0+2\\ b&=2 \end{aligned}$$

$x=1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (2x+1)(x^2+ax+b)&=2x^3+cx^2-x+2\\ (2\cdot1+1)(1^2+a\cdot1+b)&=2\cdot1^3+c\cdot1^2-1+2\\ 3+3a+3b&=3+c\\ 3a+3b-c&=0 \end{aligned}$$

$x=-1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (2x+1)(x^2+ax+b)&=2x^3+cx^2-x+2\\ \{2\cdot(-1)+1\}\left\{(-1)^2+a\cdot(-1)+b\right\}&=2\cdot(-1)^3+c\cdot(-1)^2-(-1)+2\\ -1+a-b&=1+c\\ a-b-c&=2 \end{aligned}$$

となる．これを整理すると，

$$\begin{cases} b=2 & \cdots ① \\ 3a+3b-c=0 & \cdots ② \\ a-b-c=2 & \cdots ③ \end{cases}$$

①を②と③にそれぞれ代入する．

$$\begin{cases} 3a-c=-6 \\ a-c=4 \end{cases}$$

これより，

$$a=-5,\ c=-9$$

を得る．逆を確かめる．

$$\begin{aligned} (2x+1)(x^2-5x+2)&=2x^3-10x^2+4x+x^2-5x+2\\ &=2x^3-9x^2-x+2\\ &=\text{右辺} \end{aligned}$$

となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$$\boldsymbol{a=-5,\ b=2,\ c=-9}$$

発展例題 1

次の式を展開しなさい.

(1) $(a+b+c+1)^2$　　(2) $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

(3) $(a+b+c-d)(a+b-c+d)$

■考え方 式を簡素化し計算する方法

① 式の一部を文字で置き換えて乗法公式を利用する.

② 同じ部分を文字で置き換えて乗法公式を利用する.

③ 式の一部を変形して文字で置き換え，乗法公式を利用する.

注) 式の一部を変形するとき，次のような変形を忘れないこと！

◆ $-a-b=-(a+b)$ ←和に変形

◆ $-a+b=-(a-b)$ ←差に変形

慣れてくればいちいち置き換えなくても，**共通部分をカッコでくくって**乗法公式を利用することができる.

■解答

(1)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c+1)^2\\
=&(A+B)^2 \qquad 〔a+b=A,\ c+1=B \text{ とおく}〕\\
=&A^2+2AB+B^2\\
=&(a+b)^2+2(a+b)(c+1)+(c+1)^2\\
=&a^2+2ab+b^2+2ac+2a+2bc+2b+c^2+2c+1\\
=&\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+2a+2b+2c+1}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)\\
=&\left\{(x^2+y^2)-xy\right\}\left\{(x^2+y^2)+xy\right\}\\
=&(A-xy)(A+xy) \qquad 〔x^2+y^2=A \text{ とおく}〕\\
=&A^2-(xy)^2\\
=&(x^2+y^2)^2-x^2y^2\\
=&(x^2)^2+2x^2y^2+(y^2)^2-x^2y^2\\
=&x^{2\times 2}+x^2y^2+y^{2\times 2}\\
=&\boldsymbol{x^4+x^2y^2+y^4}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c-d)(a+b-c+d)\\
=&\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}\\
=&(A+B)(A-B) \qquad 〔a+b=A,\ c-d=B \text{ とおく}〕\\
=&A^2-B^2\\
=&(a+b)^2-(c-d)^2\\
=&a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2\\
=&\boldsymbol{a^2+b^2-c^2-d^2+2ab+2cd}
\end{aligned}
$$

MEMO

問題

■演習

★
【1】　〔　〕内の文字について，次の単項式の係数と次数を答えなさい.

(1) $-3x^2y^3$　〔x〕

(2) $5ab^2x$　〔a〕

(3) xy^3z^2　〔y〕

(4) $-\dfrac{2x^3yz^4}{3}$　〔z〕

★
【2】　〔　〕内の文字について，次の多項式の次数と定数項を答えなさい.

(1) $x^2 - 2xy + 5y$　〔y〕

(2) $1 - 2x + xy^3 - 2x^2y + 5x$　〔x〕

(3) $4x^5 - 2x^3 + 3xy^2 - y + 2$　〔y〕

(4) $a^2x - by^2 + a^2 - 3axy - b^2x^3 + by^2 - y + 2$　〔x〕

★
【3】　次の整式を x について，降べきの順に整理しなさい.

(1) $2x - 5x^3 + 3 - x^2$

(2) $3x^2y - y + 2x^2 + 7xy$

(3) $3 - x^2 + 2x - 5 + x^2 - x$

(4) $5ax+ab-3bx+2x^3+ax-x^2+5bx-1$

★★
【4】　次の式を計算しなさい.

(1) $3a^2b(a - b + 1)$

(2) $3xy^2(3x - y + 2)$

(3) $3ab^2(a^2 - 2ab + 3b^2)$

(4) $-2ab^2c(3a - 2b + c)$

(5) $(x + 2)(x^2 - 6x + 5)$

(6) $(x - 1)(3x^2 + 2x - 7)$

(7) $(5x - y)(4x^2 - xy + 6y^2)$

(8) $(a - 2b)(6a^2 - ab + 9b^2)$

(9) $(x + y - 3)(3x - 2y + 1)$

(10) $(x^2 - 2x + 3)(2x^3 - 3x^2 + 1)$

(11) $(a^2 - ab + 2b^2)(a^2 + ab - 3b^2)$

(12) $(x^2 + 1 - x)(2x^2 - x - 3)$

★★
【5】　次の式を展開したとき,〔　〕内の文字の係数を求めなさい.

(1) $(x^3-7x)(x^3-3x^2+2)$　〔x^3〕

(2) $(2x^4+6x^3-9x+4)(x^5+2x^2+3x+4)$　〔x^4〕

(3) $(7x^3+12x^2-4x-3)(x^5+3x^3+2x^2-5)$　〔x^5〕

(4) $(5x^3-6x^2+3x-4)^2$　〔x^4〕

(5) $(x^2+x+1)(x^2-x-2)(x^2+2x-1)$　〔x^3〕

★
【6】　次の式を展開しなさい.

(1) $(3x+2)^3$

(2) $(2a-4)^3$

(3) $(x+5y)^3$

(4) $(3a-4b)^3$

(5) $(x+1)(x^2-x+1)$

(6) $(3a-2)(9a^2+6a+4)$

(7) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

(8) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(9) $(x+y+1)^2$

(10) $(a+b-2)^2$

(11) $(2x+y-z)^2$

(12) $(a-2b-3c)^2$

★★
【7】　次の式を展開しなさい.

(1) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(2) $(a-1)(a-2)(a^2+a+1)(a^2+2a+4)$

(3) $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$

(4) $(a+1)(a-1)(a^6-4)(a^4+a^2+1)$

(5) $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2$

(6) $(a-2)^2(a^2+2a+4)^2$

(7) $(x+1)^3(x-1)^3$

(8) $(a+b)^2(a-b)^2(a^4+a^2b^2+b^4)^2$

★★
【8】 次の式を展開しなさい.

(1) $(2x^2 - x + 3)^2$
(2) $(a + b)^3(a^2 - ab + b^2)^3$
(3) $(xy + z)^3$
(4) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$
(5) $(a^3 + a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + a - 1)$
(6) $(25x^2 + 15xy + 9y^2)(5x - 3y)$
(7) $(x^3 + x^2 + x - 1)^2$
(8) $(4x - 3y)^3$
(9) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$
(10) $(a^6 - 8a^3 + 64)(a^2 - 2a + 4)(a + 2)$

★★
【9】 次の等式が x についての恒等式となるとき，定数 a, b, c, d の値を求めなさい.

(1) $a(x - 2)^2 + b(x + 3) + c = x^2 - x - 2$
(2) $4x^2 + 3x + 2 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$
(3) $ax(x + 1) + bx(x - 1) + c(x - 1)(x - 3) = x^2 - 3$
(4) $x^2 + x + 1 = a(x - 1)(x - 2) + b(x - 2)(x - 3) + c(x - 3)(x - 1)$
(5) $(2x - 1)^3 = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$

■自習

★★
【10】　次の式を展開しなさい.

(1) $(a+b-c+1)^2$　　(2) $(a-b+c-1)^2$

(3) $(a-b-c+d)^2$　　(4) $(a+b-c-d)^2$

(5) $(a^2+a+4)(a^2+a-6)$　　(6) $(x^2+3x+2)(x^2-x+2)$

(7) $(x^2-xy+2y^2)(x^2+xy+2y^2)$　　(8) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

(9) $(a-b+c-1)(a+b-c-1)$　　(10) $(1-a+b-c)(1+c-a-b)$

(11) $(1+x+x^2+x^3)(1-x+x^2-x^3)$　　(12) $(8x^3-8x^2+4x-1)(8x^3+8x^2+4x+1)$

★★
【11】　次の問いに答えなさい.

(1) $(x^2-1)(x^3+ax^2+3)$ の展開式において，x^2 の係数が 0 であるような a の値を求めなさい.

(2) $(x^2+ax+b)(x^2+bx+2)$ の展開式において，x^3 および x^2 の係数が 0 のとき，a と b の値を求めなさい.

(3) $(x^2+ax+b)(x^2-2bx+a)$ を展開したとき，x^3 の係数が 7，x^2 の係数が 13 であるような整数 a，b を求めなさい.

(4) $x^4-6x^3+ax^2+6x+b$ が，ある 2 次式の平方となるとき，a と b の値を求めなさい.

★
【12】　次の問いに答えなさい.

(1) 等式 $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$ が成り立つことを証明しなさい.

(2) (1) を用いて，次の式を展開しなさい.

① $(x+1)(x+2)(x+4)$　　② $(a+2)(a+3)(a+4)$

★
【13】　次の問いに答えなさい.

(1) 等式 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$ が成り立つことを証明しなさい.

(2) (1) を用いて，次の式を展開しなさい.

① $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$　② $(a+b-1)(a^2-ab+b^2+a+b+1)$

★★
【14】 次の式を展開しなさい.

(1) $\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$

(2) $(a+b)^3-3ab(a+b)$

(3) $(a-b)^3+3ab(a-b)$

(4) $(a+b)^7$

(5) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

(6) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

(7) $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

(8) $(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$

(9) $(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$

(10) $(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$

☆
【15】 次の式を展開しなさい.

(1) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$

(2) $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3$

(3) $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$

(4) $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$

(5) $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

(6) $(a+b+c)^2-(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2-(a+b-c)^2$

(7) $(a+b+c)(a+b-c)+(a+b-c)(a-b-c)+(a-b-c)(a+b+c)$

(8) $(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b)$