M1JK

本科 1 期 4 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 1 東大数学 K

1章　数と式（1）ー展開と因数分解ー

問題

【1】(1) $-3x^2y^3 = -3y^3 \times x^2$ より，
係数は $\boldsymbol{-3y^3}$，次数は **2 次**

(2) $5ab^2x = 5b^2x \times a$ より，
係数は $\boldsymbol{5b^2x}$，次数は **1 次**

(3) $xy^3z^2 = xz^2 \times y^3$ より，
係数は $\boldsymbol{xz^2}$，次数は **3 次**

(4) $-\dfrac{2x^3yz^4}{3} = -\dfrac{2x^3y}{3} \times z^4$ より，
係数は $\boldsymbol{-\dfrac{2x^3y}{3}}$，次数は **4 次**

【2】(1)

$$x^2 - 2xy + 5y = (-2x+5)y + x^2$$

より，次数は **1 次**，定数項は $\boldsymbol{x^2}$

(2)

$$\begin{aligned}1 - 2x + xy^3 - 2x^2y + 5x &= 1 + 3x + xy^3 - 2x^2y \\ &= -2yx^2 + (3+y^3)x + 1\end{aligned}$$

より，次数は **2 次**，定数項は **1**

(3)

$$4x^5 - 2x^3 + 3xy^2 - y + 2 = 3xy^2 - y + 4x^5 - 2x^3 + 2$$

より，次数は **2 次**，定数項は $\boldsymbol{4x^5 - 2x^3 + 2}$

(4)

$$\begin{aligned}&a^2x - by^2 + a^2 - 3axy - b^2x^3 + by^2 - y + 2 \\ =&a^2x + a^2 - 3axy - b^2x^3 - y + 2 \\ =&-b^2x^3 + (a^2 - 3ay)x + a^2 - y + 2\end{aligned}$$

より，次数は **3 次** ，定数項は $\boldsymbol{a^2 - y + 2}$

【3】(1) x^3 の項の係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned} 1 \times 2 - 7 \times (-3) &= 2 + 21 \\ &= \mathbf{23} \end{aligned}$$

(2) x^4 の項の係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned} 2 \times 4 + 6 \times 3 &= 8 + 18 \\ &= \mathbf{26} \end{aligned}$$

(3) x^5 の項の係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned} 7 \times 2 + 12 \times 3 - 3 \times 1 &= 14 + 36 - 3 \\ &= \mathbf{47} \end{aligned}$$

(4) x^4 の項は係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned} 5 \times 3 - 6 \times (-6) + 3 \times 5 &= 15 + 36 + 15 \\ &= \mathbf{66} \end{aligned}$$

(5) x^3 の項の係数は，係数だけ計算すると，

$$\begin{aligned} &1 \times (-1) \times (-1) + 1 \times (-2) \times 2 + 1 \times 1 \times (-1) + 1 \times (-1) \times 2 \\ &\qquad + 1 \times (-2) \times 1 + 1 \times 1 \times 2 + 1 \times (-1) \times 1 \\ =&1 - 4 - 1 - 2 - 2 + 2 - 1 \\ =&\mathbf{-7} \end{aligned}$$

【4】(1)

$$\begin{aligned} (3x+2)^3 &= (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= 3^3x^3 + 3 \cdot 3^2x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 4 + 8 \\ &= 27x^3 + 3 \cdot 9x^2 \cdot 2 + 36x + 8 \\ &= \boldsymbol{27x^3 + 54x^2 + 36x + 8} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (2a-4)^3 &= (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 2a \cdot 4^2 - 4^3 \\ &= 2^3a^3 - 3 \cdot 2^2a^2 \cdot 4 + 3 \cdot 2a \cdot 16 - 64 \\ &= 8a^3 - 3 \cdot 4a^2 \cdot 4 + 96a - 64 \\ &= \boldsymbol{8a^3 - 48a^2 + 96a - 64} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} (x+5y)^3 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 5y + 3 \cdot x \cdot (5y)^2 + (5y)^3 \\ &= x^3 + 15x^2y + 3 \cdot x \cdot 5^2y^2 + 5^3y^3 \\ &= x^3 + 15x^2y + 3 \cdot x \cdot 25y^2 + 125y^3 \\ &= \boldsymbol{x^3 + 15x^2y + 75xy^2 + 125y^3} \end{aligned}$$

(4) $(3a-4b)^3 = (3a)^3 - 3\cdot(3a)^2\cdot 4b + 3\cdot 3a\cdot(4b)^2 - (4b)^3$
$= 3^3a^3 - 3\cdot 3^2a^2\cdot 4b + 3\cdot 3a\cdot 4^2b^2 - 4^3b^3$
$= 27a^3 - 3\cdot 9a^2\cdot 4b + 3\cdot 3a\cdot 16b^2 - 64b^3$
$= \boldsymbol{27a^3 - 108a^2b + 144ab^2 - 64b^3}$

(5) $(x+1)(x^2-x+1) = x^3 + 1^3$
$= \boldsymbol{x^3 + 1}$

(6) $(3a-2)(9a^2+6a+4) = (3a)^3 - 2^3$
$= 3^3a^3 - 8$
$= \boldsymbol{27a^3 - 8}$

(7) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2) = (2a)^3 - (3b)^3$
$= 2^3a^3 - 3^3b^3$
$= \boldsymbol{8a^3 - 27b^3}$

(8) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2) = x^3 - (2y)^3$
$= x^3 - 2^3y^3$
$= \boldsymbol{x^3 - 8y^3}$

(9) $(x+y+1)^2 = x^2 + y^2 + 1^2 + 2\cdot x\cdot y + 2\cdot y\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot x$
$= x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2y + 2x$
$= \boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1}$

(10) $(a+b-2)^2 = a^2 + b^2 + (-2)^2 + 2\cdot a\cdot b + 2\cdot b\cdot(-2) + 2\cdot(-2)\cdot a$
$= a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4b - 4a$
$= \boldsymbol{a^2 + b^2 + 2ab - 4a - 4b + 4}$

(11) $(2x+y-z)^2 = (2x)^2 + y^2 + (-z)^2 + 2\cdot 2x\cdot y + 2\cdot y\cdot(-z) + 2\cdot(-z)\cdot 2x$
$= 2^2\cdot x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 2yz - 4xz$
$= \boldsymbol{4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 2yz - 4zx}$

(12) $(a-2b-3c)^2$
$= a^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2\cdot a\cdot(-2b) + 2\cdot(-2b)\cdot(-3c) + 2\cdot(-3c)\cdot a$
$= \boldsymbol{a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 4ab + 12bc - 6ca}$

【5】(1) $(2x^2-x+3)^2$
$= (2x^2)^2 + (-x)^2 + 3^2 + 2\cdot 2x^2\cdot(-x) + 2\cdot(-x)\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 2x^2$
$= 4x^4 + x^2 + 9 - 4x^3 - 6x + 12x^2$
$= \boldsymbol{4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 6x + 9}$

(2) $(a+b)^3(a^2-ab+b^2)^3 = \{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}^3$
$= (a^3+b^3)^3$
$= (a^3)^3 + 3\cdot(a^3)^2\cdot b^3 + 3\cdot a^3\cdot(b^3)^2 + (b^3)^3$
$= a^{3\times 3} + 3a^{3\times 2}b^3 + 3a^3b^{3\times 2} + b^{3\times 3}$
$= \boldsymbol{a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9}$

(3) $$(xy+z)^3 = (xy)^3 + 3\cdot(xy)^2\cdot z + 3\cdot xy\cdot z^2 + z^3$$
$$= \boldsymbol{x^3y^3 + 3x^2y^2z + 3xyz^2 + z^3}$$

(4) $$(x^2-2x+3)(x^2+2x-3) = \{x^2-(2x-3)\}\{x^2+(2x-3)\}$$
$$= (x^2)^2-(2x-3)^2$$
$$= x^4-\{(2x)^2-12x+9\}$$
$$= x^4-(4x^2-12x+9)$$
$$= \boldsymbol{x^4-4x^2+12x-9}$$

(5) $$(a^3+a^2+a+1)(a^3-a^2+a-1)$$
$$= (a^3+a+a^2+1)(a^3+a-a^2-1)$$
$$= \{(a^3+a)+(a^2+1)\}\{(a^3+a)-(a^2+1)\}$$
$$= (a^3+a)^2-(a^2+1)^2$$
$$= (a^3)^2+2\cdot a^3\cdot a+a^2-\{(a^2)^2+2a^2+1\}$$
$$= a^6+2a^4+a^2-(a^4+2a^2+1)$$
$$= a^6+2a^4+a^2-a^4-2a^2-1$$
$$= \boldsymbol{a^6+a^4-a^2-1}$$

(6) $$(25x^2+15xy+9y^2)(5x-3y) = (5x)^3-(3y)^3$$
$$= \boldsymbol{125x^3-27y^3}$$

(7) $$(x^3+x^2+x-1)^2$$
$$= \{(x^3+x^2)+(x-1)\}^2$$
$$= (x^3+x^2)^2+2(x^3+x^2)(x-1)+(x-1)^2$$
$$= (x^3)^2+2\cdot x^3\cdot x^2+(x^2)^2+2(x^3\cdot x-x^3+x^2\cdot x-x^2)+x^2-2x+1$$
$$= x^6+2x^5+x^4+2(x^4-x^3+x^3-x^2)+x^2-2x+1$$
$$= x^6+2x^5+x^4+2(x^4-x^2)+x^2-2x+1$$
$$= x^6+2x^5+x^4+2x^4-2x^2+x^2-2x+1$$
$$= \boldsymbol{x^6+2x^5+3x^4-x^2-2x+1}$$

(8) $$(4x-3y)^3 = (4x)^3-3\cdot(4x)^2\cdot 3y+3\cdot 4x\cdot(3y)^2-(3y)^3$$
$$= 64x^3-3\cdot 16x^2\cdot 3y+3\cdot 4x\cdot 9y^2-27y^3$$
$$= \boldsymbol{64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3}$$

(9) $$(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4) = (a^2)^3+(b^2)^3$$
$$= \boldsymbol{a^6+b^6}$$

(10) $$(a^6-8a^3+64)(a^2-2a+4)(a+2)$$
$$= \{(a+2)(a^2-2a+4)\}(a^6-8a^3+64)$$
$$= (a^3+2^3)(a^6-8a^3+64)$$
$$= (a^3+8)(a^6-8a^3+64)$$
$$= (a^3)^3+8^3$$
$$= \boldsymbol{a^9+512}$$

【6】(1) 左辺を展開して整理すると，

$$\begin{aligned} a(x-2)^2+b(x+3)+c &= x^2-x-2 \\ a(x^2-4x+4)+bx+3b+c &= x^2-x-2 \\ ax^2-4ax+4a+bx+3b+c &= x^2-x-2 \\ ax^2+(-4a+b)x+4a+3b+c &= x^2-x-2 \end{aligned}$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases} a=1 & \cdots ① \\ -4a+b=-1 & \cdots ② \\ 4a+3b+c=-2 & \cdots ③ \end{cases}$$

①を②に代入すると

$$\begin{aligned} -4\cdot 1+b &= -1 \\ -4+b &= -1 \\ \therefore\ b &= 3\ \cdots ④ \end{aligned}$$

①，④を③に代入すると，

$$\begin{aligned} 4\cdot 1+3\cdot 3+c &= -2 \\ 4+9+c &= -2 \\ 13+c &= -2 \\ \therefore\ c &= -15 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=-15}$$

＜別解＞
x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，
$x=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a(0-2)^2+b(0+3)+c &= 0^2-0-2 \\ 4a+3b+c &= -2 \end{aligned}$$

$x=2$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a(2-2)^2+b(2+3)+c &= 2^2-2-2 \\ 5b+c &= 0 \end{aligned}$$

$x=-3$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a(-3-2)^2+b(-3+3)+c &= (-3)^2-(-3)-2 \\ 25a+c &= 10 \end{aligned}$$

となる．
これを整理すると，

$$\begin{cases} 4a+3b+c=-2 & \cdots ① \\ 5b+c=0 & \cdots ② \\ 25a+c=10 & \cdots ③ \end{cases}$$

②より，$5b=-c\ \cdots$④

③より，$25a=10-c\ \cdots$⑤

これを ① $\times 25$ に代入すると，

$$
\begin{aligned}
100a+75b+25c&=-50\\
4\cdot 25a+15\cdot 5b+25c&=-50\\
4(10-c)+15\cdot(-c)+25c&=-50\\
40-4c-15c+25c&=-50\\
40+6c&=-50\\
6c&=-90\\
c&=-15
\end{aligned}
$$

これを④に代入して，

$$
\begin{aligned}
&5b=-(-15)\\
&5b=15\\
\therefore\ \ &b=3
\end{aligned}
$$

さらに⑤を代入して，

$$
\begin{aligned}
&25a=10-(-15)\\
&25a=25\\
\therefore\ \ &a=1
\end{aligned}
$$

を得る．逆を確かめる．

$$
\begin{aligned}
1\cdot(x-2)^2+3(x+3)+(-15)&=(x-2)^2+3(x+3)-15\\
&=x^2-4x+4+3x+9-15\\
&=x^2-x-2=\text{右辺}
\end{aligned}
$$

となり，確かに x についての恒等式である，よって，

$$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=-15}$$

(2) 右辺を展開して整理すると，

$$
\begin{aligned}
4x^2+3x+2&=a(x-1)^2+b(x-1)+c\\
4x^2+3x+2&=a(x^2-2x+1)+bx-b+c\\
4x^2+3x+2&=ax^2-2ax+a+bx-b+c\\
4x^2+3x+2&=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c
\end{aligned}
$$

両辺の係数を比較して，

$$
\begin{cases}
a=4 & \cdots ① \\
-2a+b=3 & \cdots ② \\
a-b+c=2 & \cdots ③
\end{cases}
$$

①を②に代入すると，

$$
\begin{aligned}
-2\cdot 4+b&=3\\
-8+b&=3\\
\therefore\ \ b&=11\ \cdots ④
\end{aligned}
$$

①，④を③に代入すると，

$$\begin{aligned} 4-11+c&=2\\ -7+c&=2\\ \therefore\ c&=9 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=4,\ b=11,\ c=9}$$

＜別解＞

x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，

$x=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned} 4\cdot 0^2+3\cdot 0+2&=a(0-1)^2+b(0-1)+c\\ 2&=a-b+c \end{aligned}$$

$x=1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} 4\cdot 1^2+3\cdot 1+2&=a(1-1)^2+b(1-1)+c\\ 4+3+2&=c\\ 9&=c \end{aligned}$$

$x=2$ を代入すると，

$$\begin{aligned} 4\cdot 2^2+3\cdot 2+2&=a(2-1)^2+b(2-1)+c\\ 16+6+2&=a+b+c\\ 24&=a+b+c \end{aligned}$$

となる．これを整理すると，

$$\begin{cases} a-b+c=2 & \cdots ① \\ c=9 & \cdots ② \\ a+b+c=24 & \cdots ③ \end{cases}$$

②を①に代入すると，

$$\begin{aligned} a-b+9&=2\\ a-b&=-7\ \cdots ④ \end{aligned}$$

②を③に代入すると，

$$\begin{aligned} a+b+9&=24\\ a+b&=15\ \cdots ⑤ \end{aligned}$$

④ + ⑤ より，

$$2a=8 \qquad \therefore\ a=4$$

これを⑤に代入して，

$$4+b=15 \qquad \therefore\ b=11$$

を得る．逆を確かめる．

$$\begin{aligned} 4(x-1)^2+11(x-1)+9&=4(x^2-2x+1)+11x-11+9\\ &=4x^2-8x+4+11x-11+9\\ &=4x^2+3x+2=\text{左辺} \end{aligned}$$

となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$$\boldsymbol{a=4,\ b=11,\ c=9}$$

(3) 左辺を展開して整理すると，

$$\begin{aligned}
ax(x+1)+bx(x-1)+c(x-1)(x-3)&=x^2-3\\
ax^2+ax+bx^2-bx+c(x^2-4x+3)&=x^2-3\\
ax^2+ax+bx^2-bx+cx^2-4cx+3c&=x^2-3\\
(a+b+c)x^2+(a-b-4c)x+3c&=x^2-3
\end{aligned}$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases}
a+b+c=1 & \cdots ① \\
a-b-4c=0 & \cdots ② \\
3c=-3 & \cdots ③
\end{cases}$$

③より，

$$\begin{aligned}
3c&=-3\\
c&=-1 \ \cdots ④
\end{aligned}$$

④を①に代入すると，

$$\begin{aligned}
a+b-1&=1\\
a+b&=2 \ \cdots ⑤
\end{aligned}$$

④を②に代入すると，

$$\begin{aligned}
a-b-4\cdot(-1)&=0\\
a-b+4&=0\\
a-b&=-4 \ \cdots ⑥
\end{aligned}$$

⑤ + ⑥ より，

$$2a=-2 \qquad \therefore\ a=-1$$

これを⑤に代入すると，

$$-1+b=2 \qquad \therefore\ b=3$$

よって，

$$\boldsymbol{a=-1,\ b=3,\ c=-1}$$

＜別解＞

x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，

$x=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
a\cdot 0\cdot(0+1)+b\cdot 0\cdot(0-1)+c(0-1)(0-3)&=0^2-3\\
3c&=-3\\
c&=-1 \ \cdots ①
\end{aligned}$$

$x=1$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
a\cdot 1\cdot(1+1)+b\cdot 1\cdot(1-1)+c(1-1)(1-3)&=1^2-3\\
2a&=-2\\
a&=-1 \ \cdots ②
\end{aligned}$$

$x=3$ を代入すると，

$$\begin{aligned} a\cdot 3\cdot(3+1)+b\cdot 3\cdot(3-1)+c(3-1)(3-3)&=3^2-3\\ 12a+6b&=6\\ 2a+b&=1 \ \cdots ③ \end{aligned}$$

となる．

②を③に代入すると，

$$\begin{aligned} 2\cdot(-1)\ +\ b&=1\\ -2+b&=1\\ \therefore\ b&=3 \end{aligned}$$

を得る．逆を確かめる．

$$\begin{aligned} &-1\cdot x(x+1)+3x(x-1)+(-1)\cdot(x-1)(x-3)\\ =&-x^2-x+3x^2-3x-(x^2-4x+3)\\ =&-x^2-x+3x^2-3x-x^2+4x-3\\ =&x^2-3\\ =&\text{右辺} \end{aligned}$$

となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$$\boldsymbol{a=-1,\ b=3,\ c=-1}$$

(4) 右辺を展開して整理すると，

$$\begin{aligned} x^2+x+1&=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)\\ x^2+x+1&=a(x^2-3x+2)+b(x^2-5x+6)+c(x^2-4x+3)\\ x^2+x+1&=ax^2-3ax+2a+bx^2-5bx+6b+cx^2-4cx+3c\\ x^2+x+1&=(a+b+c)x^2+(-3a-5b-4c)x+2a+6b+3c \end{aligned}$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases} a+b+c=1 & \cdots ①\\ -3a-5b-4c=1 & \cdots ②\\ 2a+6b+3c=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

① $\times 4+$ ② より，$a-b=5\ \cdots$ ④

① $\times 3-$ ③ より，$a-3b=2\ \cdots$ ⑤

④ $-$ ⑤ より，

$$2b=3 \qquad \therefore\ b=\frac{3}{2}\ \cdots ⑥$$

⑥を④を代入して，

$$a-\frac{3}{2}=5 \qquad \therefore\ a=\frac{13}{2}\ \cdots ⑦$$

⑥，⑦を①に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{13}{2}+\frac{3}{2}+c&=1\\ 8+c&=1\\ \therefore\ c&=-7 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=\frac{13}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=-7}$$

＜別解＞

x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，$x=1$ を代入すると，

$$\begin{aligned}1^2+1+1&=a(1-1)(1-2)+b(1-2)(1-3)+c(1-3)(1-1)\\3&=2b\\\frac{3}{2}&=b\end{aligned}$$

$x=2$ を代入すると，

$$\begin{aligned}2^2+2+1&=a(2-1)(2-2)+b(2-2)(2-3)+c(2-3)(2-1)\\7&=-c\\-7&=c\end{aligned}$$

$x=3$ を代入すると，

$$\begin{aligned}3^2+3+1&=a(3-1)(3-2)+b(3-2)(3-3)+c(3-3)(3-1)\\13&=2a\\\frac{13}{2}&=a\end{aligned}$$

を得る．逆を確かめる．

$$\begin{aligned}&\frac{13}{2}(x-1)(x-2)+\frac{3}{2}(x-2)(x-3)-7(x-3)(x-1)\\=&\frac{13}{2}(x^2-3x+2)+\frac{3}{2}(x^2-5x+6)-7(x^2-4x+3)\\=&\frac{13}{2}x^2-\frac{39}{2}x+13+\frac{3}{2}x^2-\frac{15}{2}x+9-7x^2+28x-21\\=&x^2+x+1\\=&\text{左辺}\end{aligned}$$

となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$$\boldsymbol{a=\frac{13}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=-7}$$

(5) 両辺を展開して整理すると，

$$\begin{aligned}\text{左辺}=(2x-1)^3=&(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot1+3\cdot2x\cdot1^2-1^3\\=&2^3\cdot x^3-3\cdot2^2\cdot x^2\cdot1+3\cdot2x\cdot1-1\\=&8x^3-12x^2+6x-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺}=&a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d\\=&a(x^3-3x^2+3x-1)+b(x^2-2x+1)+cx-c+d\\=&ax^3-3ax^2+3ax-a+bx^2-2bx+b+cx-c+d\\=&ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x-a+b-c+d\end{aligned}$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases} a=8 & \cdots ① \\ -3a+b=-12 & \cdots ② \\ 3a-2b+c=6 & \cdots ③ \\ -a+b-c+d=-1 & \cdots ④ \end{cases}$$

①に②に代入すると，

$$\begin{aligned} -3\cdot 8+b&=-12 \\ -24+b&=-12 \end{aligned}$$
$$\therefore\ b=12 \ \cdots ⑤$$

①，⑤を③に代入すると，

$$\begin{aligned} 3\cdot 8-2\cdot 12+c&=6 \\ 24-24+c&=6 \\ \therefore\ c&=6 \ \cdots ⑥ \end{aligned}$$

①，⑤，⑥を④に代入すると，

$$\begin{aligned} -8+12-6+d&=-1 \\ -2+d&=-1 \\ \therefore\ d&=1 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a=8,\ b=12,\ c=6,\ d=1}$$

＜別解１＞
x についての恒等式ならば，どんな x についても等式が成り立つから，
$x=0$ を代入して，

$$\begin{aligned} (2\cdot 0-1)^3&=a(0-1)^3+b(0-1)^2+c(0-1)+d \\ -1&=-a+b-c+d \end{aligned}$$

$x=1$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (2\cdot 1-1)^3&=a(1-1)^3+b(1-1)^2+c(1-1)+d \\ 1&=d \end{aligned}$$

$x=2$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (2\cdot 2-1)^3&=a(2-1)^3+b(2-1)^2+c(2-1)+d \\ 27&=a+b+c+d \end{aligned}$$

$x=3$ を代入すると，

$$\begin{aligned} (2\cdot 3-1)^3&=a(3-1)^3+b(3-1)^2+c(3-1)+d \\ 125&=8a+4b+2c+d \end{aligned}$$

となる．これを整理すると，

$$\begin{cases} -a+b-c+d=-1 & \cdots ① \\ d=1 & \cdots ② \\ a+b+c+d=27 & \cdots ③ \\ 8a+4b+2c+d=125 & \cdots ④ \end{cases}$$

②を①，③，④にそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} -a+b-c=-2 & \cdots ⑤ \\ a+b+c=26 & \cdots ⑥ \\ 8a+4b+2c=124 & \cdots ⑦ \end{cases}$$

⑤ + ⑥ より，

$$\begin{aligned} 2b &= 24 \\ b &= 12 \end{aligned}$$

これを⑥，⑦にそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} a+c=14 & \cdots ⑧ \\ 8a+2c=76 & \cdots ⑨ \end{cases}$$

⑨ ÷ 2 − ⑧ より，

$$\begin{aligned} 3a &= 24 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

これを⑧に代入して，

$$\begin{aligned} 8+c &= 14 \\ c &= 6 \end{aligned}$$

を得る．逆を確かめる．

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (2x-1)^3 = 8x^3-12x^2+6x-1 \\ \text{右辺} &= 8(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+1 \\ &= 8(x^3-3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2-1^3)+12(x^2-2x+1)+6x-6+1 \\ &= 8(x^3-3x^2+3x-1)+12x^2-24x+12+6x-6+1 \\ &= 8x^3-24x^2+24x-8+12x^2-24x+12+6x-6+1 \\ &= 8x^3-12x^2+6x-1 \end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺 となり，確かに x についての恒等式である．よって，

$$\boldsymbol{a=8,\ b=12,\ c=6,\ d=1}$$

＜別解 **2** ＞

$x-1=k$ とおくと，$x=k+1$ だから，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \{2(k+1)-1\}^3 \\ &= (2k+2-1)^3 \\ &= (2k+1)^3 \\ &= (2k)^3+3\cdot(2k)^2\cdot 1+3\cdot 2k\cdot 1^2+1^3 \\ &= 2^3\cdot k^3+3\cdot 2^2\cdot k^2\cdot 1+6k+1 \\ &= 8k^3+12k^2+6k+1 \\ &= 8(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+1 \end{aligned}$$

よって，両辺を比較すると，

$$\boldsymbol{a=8,\ b=12,\ c=6,\ d=1}$$

【7】(1)

$$
\begin{aligned}
&(a+b-c+1)^2\\
=&\{(a+b)-(c-1)\}^2\\
=&(A-B)^2 \qquad〔A=a+b,\ B=c-1 \text{ とおく}〕\\
=&A^2-2AB+B^2\\
=&(a+b)^2-2(a+b)(c-1)+(c-1)^2\\
=&a^2+2ab+b^2-(2a+2b)(c-1)+c^2-2c+1\\
=&a^2+2ab+b^2-2a(c-1)-2b(c-1)+c^2-2c+1\\
=&a^2+2ab+b^2-2ac+2a-2bc+2b+c^2-2c+1\\
=&\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca+2a+2b-2c+1}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(a-b+c-1)^2\\
=&(A+B)^2 \qquad〔A=a-b,\ B=c-1 \text{ とおく}〕\\
=&A^2+2AB+B^2\\
=&(a-b)^2+2(a-b)(c-1)+(c-1)^2\\
=&a^2-2ab+b^2+2a(c-1)-2b(c-1)+c^2-2c+1\\
=&a^2-2ab+b^2+2ac-2a-2bc+2b+c^2-2c+1\\
=&\boldsymbol{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca-2a+2b-2c+1}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&(a-b-c+d)^2\\
=&\{(a-b)-(c-d)\}^2\\
=&(A-B)^2 \qquad〔A=a-b,\ B=c-d \text{ とおく}〕\\
=&A^2-2AB+B^2\\
=&(a-b)^2-2(a-b)(c-d)+(c-d)^2\\
=&a^2-2ab+b^2-(2a-2b)(c-d)+c^2-2cd+d^2\\
=&a^2-2ab+b^2-2a(c-d)+2b(c-d)+c^2-2cd+d^2\\
=&a^2-2ab+b^2-2ac+2ad+2bc-2bd+c^2-2cd+d^2\\
=&\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2bc-2ca+2ad-2bd-2cd}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&(a+b-c-d)^2\\
=&\{(a+b)-(c+d)\}^2\\
=&(A-B)^2 \qquad〔A=a+b,\ B=c+d \text{ とおく}〕\\
=&A^2-2AB+B^2\\
=&(a+b)^2-2(a+b)(c+d)+(c+d)^2\\
=&a^2+2ab+b^2-2\{a(c+d)+b(c+d)\}+c^2+2cd+d^2\\
=&a^2+2ab+b^2-2(ac+ad+bc+bd)+c^2+2cd+d^2\\
=&a^2+2ab+b^2-2ac-2ad-2bc-2bd+c^2+2cd+d^2\\
=&\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
(a^2+a+4)(a^2+a-6) &= \{(a^2+a)+4\}\{(a^2+a)-6\}\\
&= (A+4)(A-6) \qquad〔A=a^2+a \text{ とおく}〕\\
&= A^2-2A-24\\
&= (a^2+a)^2-2(a^2+a)-24\\
&= a^4+2a^3+a^2-2a^2-2a-24\\
&= \boldsymbol{a^4+2a^3-a^2-2a-24}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
(x^2+3x+2)(x^2-x+2) &= (x^2+2+3x)(x^2+2-x)\\
&= \{(x^2+2)+3x\}\{(x^2+2)-x\}\\
&= (A+3x)(A-x) \qquad \text{〔}A=x^2+2\ \text{とおく〕}\\
&= A^2+2xA-3x^2\\
&= (x^2+2)^2+2x(x^2+2)-3x^2\\
&= x^4+4x^2+4+2x^3+4x-3x^2\\
&= \boldsymbol{x^4+2x^3+x^2+4x+4}
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
&(x^2-xy+2y^2)(x^2+xy+2y^2)\\
=&(x^2+2y^2-xy)(x^2+2y^2+xy)\\
=&\{(x^2+2y^2)-xy\}\{(x^2+2y^2)+xy\}\\
=&(A-xy)(A+xy) \qquad \text{〔}A=x^2+2y^2\text{とおく〕}\\
=&A^2-(xy)^2\\
=&(x^2+2y^2)^2-x^2y^2\\
=&x^4+2\cdot x^2\cdot 2y^2+4y^4-x^2y^2\\
=&x^4+4x^2y^2+4y^4-x^2y^2\\
=&\boldsymbol{x^4+3x^2y^2+4y^4}
\end{aligned}
$$

(8)

$$
\begin{aligned}
&(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)\\
=&(x^2+4y^2+2xy)(x^2+4y^2-2xy)\\
=&\{(x^2+4y^2)+2xy\}\{(x^2+4y^2)-2xy\}\\
=&(A+2xy)(A-2xy) \qquad \text{〔}A=x^2+4y^2\text{とおく〕}\\
=&A^2-(2xy)^2\\
=&(x^2+4y^2)^2-4x^2y^2\\
=&(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 4y^2+(4y^2)^2-4x^2y^2\\
=&x^4+8x^2y^2+16y^4-4x^2y^2\\
=&\boldsymbol{x^4+4x^2y^2+16y^4}
\end{aligned}
$$

(9)

$$
\begin{aligned}
&(a-b+c-1)(a+b-c-1)\\
=&(a-1-b+c)(a-1+b-c)\\
=&\{(a-1)-(b-c)\}\{(a-1)+(b-c)\}\\
=&(A-B)(A+B) \qquad \text{〔}A=a-1,\ B=b-c\ \text{とおく〕}\\
=&A^2-B^2\\
=&(a-1)^2-(b-c)^2\\
=&a^2-2a+1-(b^2-2bc+c^2)\\
=&\boldsymbol{a^2-2a+1-b^2+2bc-c^2}
\end{aligned}
$$

(10)

$$
\begin{aligned}
&(1-a+b-c)(1+c-a-b)\\
=&(1-a+b-c)(1-a-b+c)\\
=&\{(1-a)+(b-c)\}\{(1-a)-(b-c)\}\\
=&(A+B)(A-B) \qquad \text{〔}A=1-a,\ B=b-c\ \text{とおく〕}\\
=&A^2-B^2\\
=&(1-a)^2-(b-c)^2\\
=&1-2a+a^2-(b^2-2bc+c^2)\\
=&\boldsymbol{1-2a+a^2-b^2+2bc-c^2}
\end{aligned}
$$

(11)
$$
\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3)(1-x+x^2-x^3)\\
=&(1+x^2+x+x^3)(1+x^2-x-x^3)\\
=&\{(1+x^2)+(x+x^3)\}\{(1+x^2)-(x+x^3)\}\\
=&(A+B)(A-B) \qquad 〔A=1+x^2,\ B=x+x^3\text{とおく}〕\\
=&A^2-B^2\\
=&(1+x^2)^2-(x+x^3)^2\\
=&1+2x^2+(x^2)^2-\{x^2+2\cdot x\cdot x^3+(x^3)^2\}\\
=&1+2x^2+x^{2\times 2}-(x^2+2x^{1+3}+x^{3\times 2})\\
=&1+2x^2+x^4-(x^2+2x^4+x^6)\\
=&1+2x^2+x^4-x^2-2x^4-x^6\\
=&\boldsymbol{1+x^2-x^4-x^6}
\end{aligned}
$$

(12)
$$
\begin{aligned}
&(8x^3-8x^2+4x-1)(8x^3+8x^2+4x+1)\\
=&(8x^3+4x-8x^2-1)(8x^3+4x+8x^2+1)\\
=&\{(8x^3+4x)-(8x^2+1)\}\{(8x^3+4x)+(8x^2+1)\}\\
=&(A-B)(A+B) \qquad 〔A=8x^3+4x,\ B=8x^2+1\text{ とおく}〕\\
=&A^2-B^2\\
=&(8x^3+4x)^2-(8x^2+1)^2\\
=&(8x^3)^2+2\cdot 8x^3\cdot 4x+(4x)^2-\{(8x^2)^2+2\cdot 8x^2\cdot 1+1^2\}\\
=&8^2\cdot(x^3)^2+64x^{3+1}+4^2\cdot x^2-\{8^2\cdot(x^2)^2+16x^2+1\}\\
=&64x^{3\times 2}+64x^4+16x^2-(64x^{2\times 2}+16x^2+1)\\
=&64x^6+64x^4+16x^2-(64x^4+16x^2+1)\\
=&64x^6+64x^4+16x^2-64x^4-16x^2-1\\
=&\boldsymbol{64x^6-1}
\end{aligned}
$$

【8】(1) $(x^2-1)(x^3+ax^2+3)$ において，x^2 の係数だけ計算すると $-a+3$ だから，

$$
\begin{aligned}
-a+3&=0\\
a&=\mathbf{3}
\end{aligned}
$$

(2) $(x^2+ax+b)(x^2+bx+2)$ において，x^3 の係数だけ計算すると $a+b$ だから，

$$
\begin{aligned}
a+b&=0\\
b&=-a \ \cdots①
\end{aligned}
$$

x^2 の係数だけ計算すると $2+ab+b$ なので，

$$ab+b+2=0 \ \cdots②$$

①を②に代入すると，

$$
\begin{aligned}
a\cdot(-a)+(-a)+2&=0\\
-a^2-a+2&=0\\
a^2+a-2&=0\\
(a+2)(a-1)&=0\\
a&=-2,\ 1
\end{aligned}
$$

$a=1$ を①に代入すると，$b=-1$

$a=-2$ を①に代入すると，$b=2$

よって，

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ -1),\ (-2,\ 2)}$$

(3) $(x^2+ax+b)(x^2-2bx+a)$ において，x^3 の係数だけ計算すると $a-2b$ だから，

$$\begin{aligned}a-2b&=7\\ a&=2b+7 \ \cdots ①\end{aligned}$$

x^2 の係数だけ計算すると $a-2ab+b$ なので，

$$a-2ab+b=13 \ \cdots ②$$

①を②に代入すると

$$\begin{aligned}(2b+7)-2b(2b+7)+b&=13\\ 2b+7-4b^2-14b+b&=13\\ -4b^2-11b+7&=13\\ -4b^2-11b-6&=0\\ 4b^2+11b+6&=0\\ (b+2)(4b+3)&=0\\ b&=-2,\ -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

b は整数だから，$b=-2$

これを①に代入して，

$$\begin{aligned}a&=2\cdot(-2)+7=-4+7\\ \therefore\ a&=3\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$\boldsymbol{a=3,\ b=-2}$$

(4) x^4 の係数が 1 なので，2 次式を x^2+mx+n とおくと，

$$\begin{aligned}(x^2+mx+n)^2&=(x^2)^2+(mx)^2+n^2+2\cdot x^2\cdot mx+2\cdot mx\cdot n+2\cdot n\cdot x^2\\ &=x^{2\times2}+m^2x^2+n^2+2mx^{2+1}+2mnx+2nx^2\\ &=x^4+m^2x^2+n^2+2mx^3+2mnx+2nx^2\\ &=x^4+2mx^3+(m^2+2n)x^2+2mnx+n^2\end{aligned}$$

これより，

$$x^4-6x^3+ax^2+6x+b=x^4+2mx^3+(m^2+2n)x^2+2mn+n^2$$

となる．両辺の係数を比較すると，

$$\begin{cases}-6=2m & \cdots ①\\ a=m^2+2n & \cdots ②\\ 6=2mn & \cdots ③\\ b=n^2 & \cdots ④\end{cases}$$

を得る．①より，

$$\begin{aligned}2m&=-6\\ m&=-3 \ \cdots ⑤\end{aligned}$$

⑤を③に代入すると，

$$
\begin{aligned}
2n \cdot (-3) &= 6 \\
-6n &= 6 \\
n &= -1 \quad \cdots ⑥
\end{aligned}
$$

⑤，⑥を②に代入して，

$$
\begin{aligned}
a &= (-3)^2 + 2 \cdot (-1) \\
&= 9 - 2 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

⑥を④に代入して，

$$
\begin{aligned}
b &= (-1)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

よって，

$$\boldsymbol{a = 7,\ b = 1}$$

【9】(1)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (x+a)(x+b)(x+c) \\
&= (x+a)(x^2+bx+cx+bc) \\
&= x(x^2+bx+cx+bc) + a(x^2+bx+cx+bc) \\
&= x^3+bx^2+cx^2+bcx+ax^2+abx+acx+abc \\
&= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc \\
&= \text{右辺} \quad \textbf{（証明終）}
\end{aligned}
$$

(2) ①

$$
\begin{aligned}
(x+1)(x+2)(x+4) &= x^3+(1+2+4)x^2+(1\cdot2+2\cdot4+4\cdot1)x+1\cdot2\cdot4 \\
&= \boldsymbol{x^3+7x^2+14x+8}
\end{aligned}
$$

②

$$
\begin{aligned}
(a+2)(a+3)(a+4) &= a^3+(2+3+4)a^2+(2\cdot3+3\cdot4+4\cdot2)a+2\cdot3\cdot4 \\
&= \boldsymbol{a^3+9a^2+26a+24}
\end{aligned}
$$

【10】(1)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^2-(a+b-c)^2 \\
=&\{(a+b+c)+(a+b-c)\}\{(a+b+c)-(a+b-c)\} \\
=&(2a+2b)\cdot 2c \\
=&\boldsymbol{4ac+4bc}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^3-(a+b-c)^3 \\
=&\{(a+b)+c\}^3-\{(a+b)-c\}^3 \\
=&(A+c)^3-(A-c)^3 \quad 〔A=a+b\ \text{とおく}〕 \\
=&A^3+3A^2c+3Ac^2+c^3-(A^3-3A^2c+3Ac^2-c^3) \\
=&A^3+3A^2c+3Ac^2c^3-A^3+3A^2c-3Ac^2+c^3 \\
=&6A^2c+2c^3 \\
=&6c(a+b)^2+2c^3 \\
=&6c(a^2+2ab+b^2)+2c^3 \\
=&\boldsymbol{6a^2c+12abc+6b^2c+2c^3}
\end{aligned}
$$

＜別解＞

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^3-(a+b-c)^3\\
=&\{(a+b)+c\}^3-\{(a+b)-c\}^3\\
=&(A+c)^3-(A-c)^3 \quad 〔A=a+b \text{ とおく}〕\\
=&\{(A+c)-(A-c)\}\{(A+c)^2+(A+c)(A-c)+(A-c)^2\}\\
=&2c(A^2+2Ac+c^2+A^2-c^2+A^2-2Ac+c^2)\\
=&2c(3A^2+c^2)\\
=&6A^2c+2c^3\\
=&6c(a+b)^2+2c^3\\
=&6c(a^2+2ab+b^2)+2c^3\\
=&\boldsymbol{6a^2c+12abc+6b^2c+2c^3}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\\
=&a(a^2-ab-ac+bc)+b(b^2-bc-ab+ca)+c(c^2-ca-bc+ab)\\
=&a^3-a^2b-a^2c+abc+b^3-b^2c-ab^2+abc+c^3-c^2a-c^2b+abc\\
=&\boldsymbol{a^3+b^3+c^3+3abc-a^2b-a^2c-ab^2-b^2c-ac^2-bc^2}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)\\
=&(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\\
=&\{a+(b+c)\}\{-a+(b+c)\}\times\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\\
=&(a+A)(-a+A)\times(a-B)(a+B) \quad 〔A=b+c,\ B=b-c \text{ とおく}〕\\
=&(-a^2+A^2)(a^2-B^2)\\
=&-(a^2-A^2)(a^2-B^2)\\
=&-\{a^4-a^2(A^2+B^2)+A^2B^2\}\\
=&-a^4+a^2(A^2+B^2)-(AB)^2\\
=&-a^4+a^2\{(b+c)^2+(b-c)^2\}-\{(b+c)(b-c)\}^2\\
=&-a^4+a^2(b^2+2bc+c^2+b^2-2bc+c^2)-(b^2-c^2)^2\\
=&-a^4+a^2(2b^2+2c^2)-\{(b^2)^2-2b^2c^2+(c^2)^2\}\\
=&-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-(b^{2\times2}-2b^2c^2+c^{2\times2})\\
=&-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-(b^4-2b^2c^2+c^4)\\
=&-a^4+2a^2b^2+2a^2c^2-b^4+2b^2c^2-c^4\\
=&\boldsymbol{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2\\
=&\{a+(b+c)\}^2+\{-a+(b+c)\}^2+\{a-(b-c)\}^2+\{a+(b-c)\}^2\\
=&(a+A)^2+(-a+A)^2+(a-B)^2+(a+B)^2\\
&\qquad\qquad 〔A=b+c,\ B=b-c \text{ とおく}〕\\
=&a^2+2aA+A^2+a^2-2aA+A^2+a^2-2aB+B^2+a^2+2aB+B^2\\
=&4a^2+2A^2+2B^2\\
=&4a^2+2(b+c)^2+2(b-c)^2\\
=&4a^2+2(b^2+2bc+c^2)+2(b^2-2bc+c^2)\\
=&4a^2+2b^2+4bc+2c^2+2b^2-4bc+2c^2\\
=&\boldsymbol{4a^2+4b^2+4c^2}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)^2-(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2-(a+b-c)^2\\
=&\{(a+b+c)+(-a+b+c)\}\{(a+b+c)-(-a+b+c)\}\\
&\qquad+\{(a-b+c)+(a+b-c)\}\{(a-b+c)-(a+b-c)\}\\
=&(2b+2c)\cdot 2a+2a(-2b+2c)\\
=&4ab+4ac-4ab+4ac\\
=&\boldsymbol{8ac}
\end{aligned}
$$

(7)

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)(a+b-c)+(a+b-c)(a-b-c)+(a-b-c)(a+b+c)\\
=&\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}+\{(a-c)+b\}\{(a-c)-b\}\\
&\qquad+\{a-(b+c)\}\{a+(b+c)\}\\
=&(A+c)(A-c)+(B+b)(B-b)+(a-C)(a+C)\\
&\qquad〔A=a+b,\ B=a-c,\ C=b+c \text{ とおく}〕\\
=&A^2-c^2+B^2-b^2+a^2-C^2\\
=&(a+b)^2-c^2+(a-c)^2-b^2+a^2-(b+c)^2\\
=&a^2+2ab+b^2-c^2+a^2-2ac+c^2-b^2+a^2-(b^2+2bc+c^2)\\
=&a^2+2ab+b^2-c^2+a^2-2ac+c^2-b^2+a^2-b^2-2bc-c^2\\
=&\boldsymbol{3a^2-b^2-c^2+2ab-2bc-2ca}
\end{aligned}
$$

(8)

$$
\begin{aligned}
&(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b)\\
=&\{x^2-(b+c)x+bc\}(b-c)+\{x^2-(c+a)x+ca\}(c-a)\\
&\qquad+\{x^2-(a+b)x+ab\}(a-b)\\
=&(b-c)x^2-(b+c)(b-c)x+bc(b-c)+(c-a)x^2-(c+a)(c-a)x\\
&\qquad+ca(c-a)+(a-b)x^2-(a+b)(a-b)x+ab(a-b)\\
=&(b-c+c-a+a-b)x^2\\
&\qquad-\{(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)\}x\\
&\qquad+bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\\
=&-(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)x+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2\\
=&\boldsymbol{b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2}
\end{aligned}
$$

【11】(1)

$$
\begin{aligned}
&x^3+8\\
=&x^3+2^3\\
=&(x+2)(x^2-2\cdot x+2^2)\\
=&\boldsymbol{(x+2)(x^2-2x+4)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&x^3y^3+1\\
=&(xy)^3+1^3\\
=&(xy+1)\{(xy)^2-1\cdot xy+1^2\}\\
=&\boldsymbol{(xy+1)(x^2y^2-xy+1)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&27a^3-b^3\\
=&(3a)^3-b^3\\
=&(3a-b)\{(3a)^2+3a\cdot b+b^2\}\\
=&\boldsymbol{(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&3a^3-24\\
=&3(a^3-8)\\
=&3(a^3-2^3)\\
=&3\{(a-2)(a^2+a\cdot 2+2^2)\}\\
=&\boldsymbol{3(a-2)(a^2+2a+4)}
\end{aligned}
$$

(5)

$$\begin{aligned}a^4+a&=a(a^3+1)\\&=a\{(a+1)(a^2-a\cdot1+1^2)\}\\&=\boldsymbol{a(a+1)(a^2-a+1)}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}x^3-(y-1)^3&=x^3-A^3\quad〔A=y-1\text{ とおく}〕\\&=(x-A)(x^2+x\cdot A+A^2)\\&=(x-A)(x^2+xA+A^2)\\&=\{x-(y-1)\}\{x^2+x(y-1)+(y-1)^2\}\\&=\boldsymbol{(x-y+1)(x^2+xy-x+y^2-2y+1)}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}(a-b)^4-a+b&=(a-b)^4-(a-b)\\&=A^4-A\quad〔A=a-b\text{ とおく}〕\\&=A(A^3-1)\\&=A(A-1)(A^2+A+1)\\&=(a-b)\{(a-b)-1\}\{(a-b)^2+(a-b)+1\}\\&=\boldsymbol{(a-b)(a-b-1)(a^2-2ab+b^2+a-b+1)}\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}&x^3+y^3-z^3+3xyz\\=&(x+y)^3-3xy(x+y)-z^3+3xyz\\=&\{(x+y)^3-z^3\}-\{3xy(x+y)-3xyz\}\\=&\{(x+y)-z\}\{(x+y)^2+(x+y)z+z^2\}-3xy(x+y-z)\\=&(x+y-z)(x^2+2xy+y^2+xz+yz+z^2)-3xy(x+y-z)\\=&\boldsymbol{(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)}\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}&8x^3-6xy-y^3-1\\=&(2x)^3+(-y)^3+(-1)^3-3\cdot2x\cdot(-y)\cdot(-1)\\=&\{2x+(-y)+(-1)\}\\&\qquad\times\{(2x)^2+(-y)^2+(-1)^2-2x\cdot(-y)-(-y)\cdot(-1)-(-1)\cdot2x\}\\=&\boldsymbol{(2x-y-1)(4x^2+y^2+1+2xy-y+2x)}\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}(a+b)^3-a^3-b^3 &= (a+b)^3-(a^3+b^3)\\ &= (a+b)^3-(a+b)(a^2-ab+b^2)\\ &= (a+b)\{(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)\}\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2-a^2+ab-b^2)\\ &= \boldsymbol{3ab(a+b)}\end{aligned}$$

【12】(1) x と y を交換すると，$12y^2+40yx-12x^2$

$$12y^2+40yx-12x^2 \fallingdotseq\!\!\!\!/\; 12x^2+40xy-12y^2$$
$$12y^2+40yx-12x^2 \neq -(12x^2+40xy-12y^2)$$

よって，**対称式でも交代式でもない**

(2) x と y を交換すると，y^5-x^5

$$y^5-x^5=-(x^5-y^5)$$

よって，**交代式である**

(3) a と b を交換すると，$b^2+5ba+a^2$

$$b^2+5ba+a^2=a^2+5ab+b^2$$

よって，**対称式である**

(4) x と y を交換すると，

$$(y+x)^2(y^2+x^2)+1=(x+y)^2(x^2+y^2)+1$$

よって，**対称式である**

(5) a と b を交換すると，

$$b^3-3b^2a+3ba^2-a^3=-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$

よって，**交代式である**

(6) a と b を交換すると，$3b(b-a)-a(a-b)$

$$3b(b-a)-a(a-b) \neq 3a(a-b)-b(b-a)$$
$$3b(b-a)-a(a-b) \neq -\{3a(a-b)-b(b-a)\}$$

よって，**対称式でも交代式でもない**

(7) ① a と b を交換すると

$$bac+ac+cb+ba+b+a+c+1=abc+bc+ca+ab+a+b+c+1$$

② b と c を交換すると

$$acb+cb+ba+ac+a+c+b+1=abc+bc+ca+ab+a+b+c+1$$

③ a と c を交換すると

$$cba+ba+ac+cb+c+b+a+1=abc+bc+ca+ab+a+b+c+1$$

よって，a, b, c の**対称式である**

(8) ① a と b を交換すると，

$$b^2(a-c)+a^2(c-b)+c^2(b-a)=-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$

② b と c を交換すると，

$$a^2(c-b)+c^2(b-a)+b^2(a-c)=-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$

③ c と a を交換すると，

$$c^2(b-a)+b^2(a-c)+a^2(c-b)=-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$

よって，a, b, c の**交代式である**

(9) ① x と y を交換すると，$y^2 + x^2 + xz - zy - 2yx$

$$y^2 + x^2 + xz - zy - 2yx \neq x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy$$
$$y^2 + x^2 + xz - zy - 2yx \neq -\{x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy\}$$

② y と z を交換すると，$x^2 + z^2 + zy - yx - 2xz$

$$x^2 + z^2 + zy - yz - 2xz \neq x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy$$
$$x^2 + z^2 + zy - yz - 2xz \neq -\{x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy\}$$

③ x と z を交換すると，$z^2 + y^2 + yx - xz - 2zx$

$$z^2 + y^2 + yz - xz - 2zx \neq x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy$$
$$z^2 + y^2 + yz - xz - 2zx \neq -\{x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy\}$$

よって，対称式でも交代式でもない

(10) ① x と y を交換すると，$y(x^2 - z^2) + x(z^2 - y^2) + z(y^2 - x^2)$

$$y(x^2-z^2)+x(z^2-y^2)+z(y^2-x^2) = -\{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)\}$$

② y と z を交換すると，$x(z^2 - y^2) + z(y^2 - x^2) + y(x^2 - z^2)$

$$x(z^2-y^2)+z(y^2-x^2)+y(x^2-z^2) = -\{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)\}$$

③ z と x を交換すると，$z(y^2 - x^2) + y(x^2 - z^2) + x(z^2 - y^2)$

$$z(y^2-x^2)+y(x^2-z^2)+x(z^2-y^2) = -\{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)\}$$

よって，交代式である

(11) ① x と y を交換すると，$y^2x - y^2z + x^2z - x^2y$

$$y^2x - y^2z + x^2z - x^2y = -(x^2y - x^2z + y^2z - y^2x)$$

② y と z を交換すると，$x^2z - x^2y + z^2y - z^2x$

$$x^2z - x^2y + z^2y - z^2x \fallingdotseq x^2y - x^2z + y^2z - y^2x$$
$$x^2z - x^2y + z^2y - z^2x \fallingdotseq -(x^2y - x^2z + y^2z - y^2x)$$

③ x と z を交換すると，$z^2y - z^2x + y^2x - y^2z$

$$z^2y - z^2x + y^2x - y^2z \fallingdotseq x^2y - x^2z + y^2z - y^2x$$
$$z^2y - z^2x + y^2x - y^2z \fallingdotseq -(x^2y - x^2z + y^2z - y^2x)$$

よって，対称式でも交代式でもない

(12) a と b を交換すると，$(ba+1)(b+1)(a+1) + ba$

$$(ba+1)(b+1)(a+1) + ba = (ab+1)(a+1)(b+1) + ab$$

よって，対称式である

【13】(1)

$$
\begin{aligned}
&x^2+\frac{1}{x^2}\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\\
=&4^2-2=\mathbf{14}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&x^3+\frac{1}{x^3}\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\
=&4^3-3\cdot 4=64-12=\mathbf{52}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\cdot x\cdot\frac{1}{x}\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\\
=&4^2-4=16-4=12
\end{aligned}
$$

よって，$x-\dfrac{1}{x}=\pm 2\sqrt{3}$

ここで，$x>1$ より，$x-\dfrac{1}{x}>0$ なので，

$$x-\frac{1}{x}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&x^2-\frac{1}{x^2}\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)\\
=&4\cdot 2\sqrt{3}=\mathbf{8\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

【14】(1)

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\
&=6^2-2\cdot 8\\
&=36-16=\mathbf{20}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz\\
&=6\cdot(20-8)+3\cdot 5\\
&=6\cdot 12+15=\mathbf{87}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2&=(xy+yz+zx)^2-2(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)\\
&=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\\
&=8^2-2\cdot 5\cdot 6\\
&=64-60=\mathbf{4}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
x^4+y^4+z^4&=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\\
&=20^2-2\cdot 4\\
&=400-8=\mathbf{392}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{yz+zx+xy}{xyz}\\
&=\mathbf{\frac{8}{5}}
\end{aligned}
$$

(6)
$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}&=\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{x^2y^2z^2}\\&=\frac{4}{5^2}=\boldsymbol{\frac{4}{25}}\end{aligned}$$

【15】(1) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ は3変数の対称式なので，$x+y$ が因数ならば $y+z$，$z+x$ も因数にもつ．

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\\=&x^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^3+y^2z+z^2x+z^2y+z^3\\&\qquad+2x^2y+2xy^2+2xyz+2xyz+2y^2z+2yz^2+2zx^2\\&\qquad\qquad+2xyz+2z^2x-x^3-y^3-z^3\\=&3x^2y+3x^2z+3xy^2+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz\\=&3(y+z)x^2+3(y^2+z^2+2yz)x+3yz(y+z)\\=&3(y+z)x^2+3(y+z)^2x+3yz(y+z)\\=&3(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}\\=&\boldsymbol{3(y+z)(x+y)(x+z)}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\\=&a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc\\=&(b+c)a^2+(2bc+b^2+c^2)a+(b^2c+bc^2)\\=&(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\end{aligned}$$

3変数の対称式なので，$b+c$ が因数ならば $a+b$，$c+a$ も因数にもつ．よって，

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=\boldsymbol{(b+c)(a+b)(a+c)}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(x+y)z^2+(y+z)x^2+(z+x)y^2+2xyz\\=&xz^2+yz^2+yx^2+zx^2+zy^2+xy^2+2xyz\\=&(y+z)x^2+(z^2+y^2+2yz)x+yz^2+y^2z\\=&(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)\end{aligned}$$

3変数の対称式なので，$y+z$ が因数ならば $x+y$，$z+x$ も因数にもつ．よって，

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}\\&=\boldsymbol{(y+z)(x+y)(x+z)}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc\\=&a(b^2+2bc+c^2)+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc\\=&ab^2+2abc+ac^2+bc^2+2abc+ba^2+ca^2+2abc+cb^2-4abc\\=&(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2\\=&(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\end{aligned}$$

3変数の対称式なので，$b+c$ が因数ならば，$a+b$，$c+a$ も因数にもつ．よって，

$$\begin{aligned}\text{与式}&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=\boldsymbol{(b+c)(a+b)(a+c)}\end{aligned}$$

【16】(1)

$$
\begin{aligned}
&xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)\\
=&x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2\\
=&x^2(y-z)-x(y^2-z^2)+y^2z-yz^2\\
=&x^2(y-z)-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)
\end{aligned}
$$

交代式なので，$(x-y)(y-z)(z-x)$ を因数にもつ.

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}\\
&=(y-z)(x-z)(x-y)\\
&=\boldsymbol{-(x-y)(y-z)(z-x)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)&=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b\\
&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)
\end{aligned}
$$

交代式なので，$(b-c)(c-a)(a-b)$ を因数にもつ.

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\
&=(b-c)(a-b)(a-c)\\
&=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)\\
=&xy^3-xz^3+yz^3-yx^3+zx^3-zy^3\\
=&x(y^3-z^3)-x^3(y-z)-yz(y^2-z^2)\\
=&x(y-z)(y^2+yz+z^2)-x^3(y-z)-yz(y+z)(y-z)\\
=&(y-z)\{x(y^2+yz+z^2)-x^3-yz(y+z)\}\\
=&(y-z)\{xy^2+xyz+xz^2-x^3-y^2z-yz^2\}\\
=&(y-z)\{(x-y)z^2+(xy-y^2)z+xy^2-x^3\}\\
=&(y-z)\{(x-y)z^2+(xy-y^2)z-x(x^2-y^2)\}\\
=&(y-z)\{(x-y)z^2+(xy-y^2)z-x(x+y)(x-y)\}\\
=&(y-z)(x-y)\{z^2+yz-x^2-xy\}\\
=&(y-z)(x-y)\{z^2-x^2+y(z-x)\}\\
=&(y-z)(x-y)\{(z+x)(z-x)+y(z-x)\}\\
=&\boldsymbol{(y-z)(x-y)(z-x)(x+y+z)}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\\
=&a^3b-a^3c+b^3c-b^3a+c^3a-c^3b\\
=&a^3(b-c)+bc(b^2-c^2)-a(b^3-c^3)\\
=&a^3(b-c)+bc(b+c)(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)\\
=&(b-c)\{a^3+bc(b+c)-a(b^2+bc+c^2)\}\\
=&(b-c)\{a^3+b^2c+bc^2-ab^2-abc-ac^2\}\\
=&(b-c)\{(b-a)c^2+(b^2-ab)c+a^3-ab^2\}\\
=&(b-c)\{(b-a)c^2+b(b-a)c-a(b+a)(b-a)\}\\
=&(b-c)(b-a)\{c^2+bc-a(b+a)\}\\
=&(b-c)(b-a)(c^2+bc-ab-a^2)\\
=&(b-c)(b-a)\{(c-a)b+(c+a)(c-a)\}\\
=&(b-c)(b-a)(c-a)(a+b+c)\\
=&\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}
\end{aligned}
$$

問題

【1】(1)

$$|2.71| = \mathbf{2.71}$$

(2)

$$|2-9| = |-7| = \mathbf{7}$$

(3)

$$\begin{aligned}|-3.5| - 3|-1.5| &= 3.5 - 3 \times 1.5 \\ &= 3.5 - 4.5 \\ &= \mathbf{-1}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\left|-\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \mathbf{\frac{5}{6}}\end{aligned}$$

(5) $3-\sqrt{10} < 0$ なので，

$$\begin{aligned}|3-\sqrt{10}| &= -(3-\sqrt{10}) \\ &= \boldsymbol{\sqrt{10} - 3}\end{aligned}$$

(6) $3-\pi < 0$ なので，

$$\begin{aligned}|3-\pi| &= -(3-\pi) \\ &= \boldsymbol{\pi - 3}\end{aligned}$$

【2】(1) (i) $-x \geqq 0$ のとき，

つまり，$x \leqq 0$ のとき，

$$|-x| = \boldsymbol{-x}$$

(ii) $-x < 0$ のとき，

つまり，$x > 0$ のとき，

$$|-x| = -(-x) = \boldsymbol{x}$$

(i)，(ii) より

$$|-x| = \begin{cases} \boldsymbol{-x} & (\ \boldsymbol{x \leqq 0}\ \textbf{のとき}) \\ \boldsymbol{x} & (\ \boldsymbol{x > 0}\ \textbf{のとき}) \end{cases}$$

(2) (i) $7-x \geqq 0$ のとき，

つまり，$x \leqq 7$ のとき，

$$|7-x| = \boldsymbol{7-x}$$

(ii) $7-x < 0$ のとき，

つまり，$x > 7$ のとき

$$|7-x| = -(7-x) = \boldsymbol{-7+x}$$

(i)，(ii) より

$$|7-x| = \begin{cases} \boldsymbol{7-x} & (\ \boldsymbol{x \leqq 7}\ \textbf{のとき}) \\ \boldsymbol{x-7} & (\ \boldsymbol{x > 7}\ \textbf{のとき}) \end{cases}$$

(3) (i) $2+x \geqq 0$ のとき，

つまり，$x \geqq -2$ のとき，

$$x+|2+x| = x+(2+x) = \boldsymbol{2+2x}$$

(ii) $2+x < 0$ のとき，

つまり，$x < -2$ のとき

$$x+|2+x| = x-(2+x) = \boldsymbol{-2}$$

(i), (ii) より

$$x+|2+x|=\begin{cases}\mathbf{2+2}\boldsymbol{x} & (\ \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{-2}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{-2} & (\ \boldsymbol{x} < \mathbf{-2}\ \textbf{のとき})\end{cases}$$

(4)
$$|x|=\begin{cases}x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x<0 \text{ のとき})\end{cases}$$

$$|x+3|=\begin{cases}x+3 & (x+3 \geqq 0,\ \text{すなわち}, x \geqq -3 \text{ のとき}) \\ -x-3 & (x+3<0,\ \text{すなわち}, x<-3 \text{ のとき})\end{cases}$$

よって,

(i) $x<-3$ のとき,

$$\begin{aligned}|x|-|x+3| &= -x+(x+3) \\ &= -x+x+3 \\ &= \mathbf{3}\end{aligned}$$

(ii) $-3 \leqq x<0$ のとき,

$$\begin{aligned}|x|-|x+3| &= -x-(x+3) \\ &= -x-x-3 \\ &= \mathbf{-2}\boldsymbol{x}\mathbf{-3}\end{aligned}$$

(iii) $x \geqq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}|x|-|x+3| &= x-(x+3) \\ &= x-x-3 \\ &= \mathbf{-3}\end{aligned}$$

(i)〜(iii) より,

$$|x|-|x+3|=\begin{cases}\mathbf{3} & (\boldsymbol{x} < \mathbf{-3}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{-2}\boldsymbol{x}\mathbf{-3} & (\ \mathbf{-3} \leqq \boldsymbol{x} < \mathbf{0}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{-3} & (\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}\ \textbf{のとき})\end{cases}$$

(5)
$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & (x-2 \geqq 0,\ \text{すなわち}, x \geqq 2 \text{ のとき}) \\ -x+2 & (x-2<0,\ \text{すなわち}, x<2 \text{ のとき})\end{cases}$$

$$|x+1|=\begin{cases}x+1 & (x+1 \geqq 0,\ \text{すなわち}, x \geqq -1 \text{ のとき}) \\ -x-1 & (x+1<0,\ \text{すなわち}, x<-1 \text{ のとき})\end{cases}$$

(i) $x<-1$ のとき,

$$\begin{aligned}|x-2|-5|x+1| &= -(x-2)+5(x+1) \\ &= -x+2+5x+5 \\ &= \mathbf{4}\boldsymbol{x}\mathbf{+7}\end{aligned}$$

(ii) $-1 \leqq x<2$ のとき,

$$\begin{aligned}|x-2|-5|x+1| &= -(x-2)-5(x+1) \\ &= -x+2-5x-5 \\ &= \mathbf{-6}\boldsymbol{x}\mathbf{-3}\end{aligned}$$

(iii) $x \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} |x-2|-5|x+1| &= (x-2)-5(x+1) \\ &= x-2-5x-5 \\ &= \boldsymbol{-4x-7} \end{aligned}$$

(i)〜(iii) より，

$$|x-2|-5|x+1| = \begin{cases} \boldsymbol{4x+7} & (\boldsymbol{x<-1} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{-6x-3} & (\boldsymbol{-1 \leqq x < 2} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{-4x-7} & (\boldsymbol{x \geqq 2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

【3】 (1)

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2|$$

$2<\sqrt{5}<3$ より，$\sqrt{5}-2>0$ だから，

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} &= |\sqrt{5}-2| \\ &= \boldsymbol{\sqrt{5}-2} \end{aligned}$$

(2)

$$\sqrt{(2\pi-7)^2}-\sqrt{(\pi+1)^2} = |2\pi-7|-|\pi+1|$$

$6<2\pi<7$ より，$2\pi-7<0$ だから，

$$\begin{aligned} \sqrt{(2\pi-7)^2}-\sqrt{(\pi+1)^2} &= |2\pi-7|-|\pi+1| \\ &= -(2\pi-7)-(\pi+1) \\ &= -2\pi+7-\pi-1 \\ &= \boldsymbol{-3\pi+6} \end{aligned}$$

(3)

$$\sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1|$$

(i) $2x-1 \geqq 0$，すなわち $x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned} \sqrt{(2x-1)^2} &= |2x-1| \\ &= \boldsymbol{2x-1} \end{aligned}$$

(ii) $2x-1<0$，すなわち $x<\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned} \sqrt{(2x-1)^2} &= |2x-1| \\ &= -(2x-1) \\ &= \boldsymbol{-2x+1} \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，

$$\sqrt{(2x-1)^2} = \begin{cases} \boldsymbol{2x-1} & \left(\boldsymbol{x \geqq \dfrac{1}{2}} \text{のとき}\right) \\ \boldsymbol{-2x+1} & \left(\boldsymbol{x < \dfrac{1}{2}} \text{のとき}\right) \end{cases}$$

(4) $$\sqrt{9x^2-6x+1}=\sqrt{(3x-1)^2}=|3x-1|$$

(i) $3x-1 \geqq 0$，すなわち $x \geqq \dfrac{1}{3}$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{9x^2-6x+1}&=|3x-1|\\&=\boldsymbol{3x-1}\end{aligned}$$

(ii) $3x-1<0$，すなわち $x<\dfrac{1}{3}$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{9x^2-6x+1}&=|3x-1|\\&=-(3x-1)\\&=\boldsymbol{-3x+1}\end{aligned}$$

(i)，(ii) より，

$$\sqrt{9x^2-6x+1}=\begin{cases}\boldsymbol{3x-1} & \left(\boldsymbol{x \geqq \dfrac{1}{3}}\textbf{のとき}\right)\\ \boldsymbol{-3x+1} & \left(\boldsymbol{x < \dfrac{1}{3}}\textbf{のとき}\right)\end{cases}$$

(5) $$\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=|x-3|-|x+3|$$

であり，

$$|x-3|=\begin{cases}x-3 & (x-3 \geqq 0,\ \text{すなわち},\ x \geqq 3\ \text{のとき})\\ -x+3 & (x-3<0,\ \text{すなわち},\ x<3\ \text{のとき})\end{cases}$$

$$|x+3|=\begin{cases}x+3 & (x+3 \geqq 0,\ \text{すなわち},\ x \geqq -3\ \text{のとき})\\ -x-3 & (x+3<0,\ \text{すなわち},\ x<-3\ \text{のとき})\end{cases}$$

(i) $x<-3$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}&=|x-3|-|x+3|\\&=-(x-3)+(x+3)\\&=-x+3+x+3\\&=\boldsymbol{6}\end{aligned}$$

(ii) $-3 \leqq x<3$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}&=|x-3|-|x+3|\\&=-(x-3)-(x+3)\\&=-x+3-x-3\\&=\boldsymbol{-2x}\end{aligned}$$

(iii) $x \geqq 3$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}&=|x-3|-|x+3|\\&=(x-3)-(x+3)\\&=x-3-x-3\\&=\boldsymbol{-6}\end{aligned}$$

(i)〜(iii) より，

$$\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=\begin{cases}\mathbf{6} & \mathbf{(x<-3\ のとき)}\\ \mathbf{-2x} & \mathbf{(-3\leqq x<3\ のとき)}\\ \mathbf{-6} & \mathbf{(x\geqq 3\ のとき)}\end{cases}$$

(6)
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}&=\sqrt{(x-5)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}\\&=|x-5|-|2x-1|\end{aligned}$$

であり，

$$|x-5|=\begin{cases}x-5 & (x-5\geqq 0,\ すなわち, x\geqq 5\ のとき)\\ -x+5 & (x-5<0,\ すなわち, x<5\ のとき)\end{cases}$$

$$|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \left(2x-1\geqq 0,\ すなわち, x\geqq \frac{1}{2}のとき\right)\\ -2x+1 & \left(2x-1<0,\ すなわち, x<\frac{1}{2}のとき\right)\end{cases}$$

(i) $x<\frac{1}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}&=|x-5|-|2x-1|\\&=-(x-5)+(2x-1)\\&=-x+5+2x-1\\&=\boldsymbol{x+4}\end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2}\leqq x<5$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}&=|x-5|-|2x-1|\\&=-(x-5)-(2x-1)\\&=-x+5-2x+1\\&=\boldsymbol{-3x+6}\end{aligned}$$

(iii) $x\geqq 5$ のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}&=|x-5|-|2x-1|\\&=(x-5)-(2x-1)\\&=x-5-2x+1\\&=\boldsymbol{-x-4}\end{aligned}$$

(i)〜(iii) より，

$$\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2-4x+1}=\begin{cases}\boldsymbol{x+4} & \left(\boldsymbol{x<\frac{1}{2}}\mathbf{のとき}\right)\\ \boldsymbol{-3x+6} & \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}\leqq x<5}\ \mathbf{のとき}\right)\\ \boldsymbol{-x-4} & \mathbf{(\boldsymbol{x\geqq 5}\ のとき)}\end{cases}$$

【4】(1)

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+\sqrt{5})^3 &= (\sqrt{3})^3+3\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^3\\ &= 3\sqrt{3}+9\sqrt{5}+15\sqrt{3}+5\sqrt{5}\\ &= \mathbf{18\sqrt{3}+14\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-1)^3 &= (\sqrt{3})^3-3\cdot(\sqrt{3})^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{3}\cdot 1^2-1^3\\ &= 3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1\\ &= \mathbf{6\sqrt{3}-10}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+2)^3 &= (\sqrt{2})^3+3\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 2+3\cdot\sqrt{2}\cdot 2^2+2^3\\ &= 2\sqrt{2}+12+12\sqrt{2}+8\\ &= \mathbf{14\sqrt{2}+20}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(3\sqrt{2}+1)^3 &= (3\sqrt{2})^3+3\cdot(3\sqrt{2})^2\cdot 1+3\cdot 3\sqrt{2}\cdot 1^2+1^3\\ &= 54\sqrt{2}+54+9\sqrt{2}+1\\ &= \mathbf{63\sqrt{2}+55}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}&(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2\\ =&(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\\ =&2+3+5+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}\\ =&\mathbf{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2\sqrt{10}}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}&(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})^2\\ =&(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{3})+2\cdot(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\\ =&2+3+5-2\sqrt{6}-2\sqrt{15}+2\sqrt{10}\\ =&\mathbf{10-2\sqrt{6}-2\sqrt{15}+2\sqrt{10}}\end{aligned}$$

【5】(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{11+2\sqrt{30}} &= \sqrt{(6+5)+2\sqrt{6\cdot5}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2}\\ &= \left|\sqrt{6}+\sqrt{5}\right|\\ &= \boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{5}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sqrt{7-2\sqrt{12}} &= \sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\cdot3}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}\\ &= \left|\sqrt{4}-\sqrt{3}\right|\\ &= \sqrt{4}-\sqrt{3}\\ &= \boldsymbol{2-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sqrt{11+4\sqrt{7}} &= \sqrt{11+2\sqrt{28}}\\ &= \sqrt{(7+4)+2\sqrt{7\cdot4}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{4})^2}\\ &= \left|\sqrt{7}+\sqrt{4}\right|\\ &= \boldsymbol{\sqrt{7}+2}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sqrt{3+\sqrt{8}} &= \sqrt{3+2\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{(2+1)+2\sqrt{2\cdot1}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{1})^2}\\ &= \left|\sqrt{2}+\sqrt{1}\right|\\ &= \boldsymbol{\sqrt{2}+1}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\sqrt{17+3\sqrt{32}} &= \sqrt{17+\sqrt{288}}\\ &= \sqrt{17+2\sqrt{72}}\\ &= \sqrt{(9+8)+2\sqrt{9\cdot8}}\\ &= \sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{8})^2}\\ &= \left|\sqrt{9}+\sqrt{8}\right|\\ &= \boldsymbol{3+2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\sqrt{3+\sqrt{5}} &= \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{(5+1)+2\sqrt{5\cdot1}}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{1})^2}{2}}\\ &= \frac{\left|\sqrt{5}+\sqrt{1}\right|}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

【6】

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \\ &= \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} \\ &= 9+4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \\ &= \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} \\ &= 9-4\sqrt{5} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} x+y &= (9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5}) \\ &= \mathbf{18} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} xy &= (9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5}) \\ &= 81-80 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= 18^2-2\cdot 1 \\ &= 324-2 = \mathbf{322} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\ &= \frac{322}{1} = \mathbf{322} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 18^3-3\cdot 1\cdot 18 \\ &= 5832-54 = \mathbf{5778} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 \\ &= (x^2+y^2)^2-2(xy)^2 \\ &= 322^2-2\cdot 1^2 \\ &= 103684-2 = \mathbf{103682} \end{aligned}$$

【7】

$$\begin{aligned} x &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= 7-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\ &= 7+4\sqrt{3} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x} &= (7-4\sqrt{3})+(7+4\sqrt{3}) \\ &= \mathbf{14} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x-\frac{1}{x} &= (7-4\sqrt{3})-(7+4\sqrt{3}) \\ &= \boldsymbol{-8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{x^2} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x} \\ &= 14^2-2 \\ &= 196-2 = \mathbf{194} \end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&x^3+\frac{1}{x^3}\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\\
=&\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\
=&14^3-3\cdot 14\\
=&2744-42=\mathbf{2702}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
x^3-\frac{1}{x^3}&=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\\
&=(-8\sqrt{3})^3+3\cdot(-8\sqrt{3})\\
&=-1536\sqrt{3}-24\sqrt{3}\\
&=\boldsymbol{-1560\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

(6) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}+2$ より，

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2&=x+\frac{1}{x}+2\\
&=14+2=16
\end{aligned}
$$

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ より，

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\mathbf{4}$$

【8】(1)

$$\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\frac{6}{3+\sqrt{3}}\times\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$$

$1<\sqrt{3}<2$ より，

$$
\begin{array}{ccccc}
-2 & < & -\sqrt{3} & < & -1\\
3-2 & < & 3-\sqrt{3} & < & -1+3\\
1 & < & 3-\sqrt{3} & < & 2
\end{array}
$$

なので，$\frac{6}{3+\sqrt{3}}$ の整数部分 a は，$a=\mathbf{1}$

(2) 整数部分 $a=1$ なので，

$$
\begin{aligned}
b&=\frac{6}{3+\sqrt{3}}-1=(3-\sqrt{3})-1=2-\sqrt{3}\\
\frac{1}{b}&=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\mathbf{2+\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

(3)

$$\begin{aligned}a^2+3ab+b^2 &= (a+b)^2+ab\\ &= (3-\sqrt{3})^2+1\cdot(2-\sqrt{3})\\ &= (3-\sqrt{3})^2+2-\sqrt{3}\\ &= 9-6\sqrt{3}+3+2-\sqrt{3}\\ &= \mathbf{14-7\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(a+b-1)^3 &= (3-\sqrt{3}-1)^3\\ &= (2-\sqrt{3})^3\\ &= 2^3-3\cdot 2^2\cdot\sqrt{3}+3\cdot 2\cdot(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^3\\ &= 8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}\\ &= \mathbf{26-15\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}b^2+\frac{1}{b^2} &= \left(b+\frac{1}{b}\right)^2-2\cdot b\cdot\frac{1}{b}\\ &= \left(b+\frac{1}{b}\right)^2-2\\ &= (2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})^2-2\\ &= 4^2-2\\ &= 16-2\\ &= \mathbf{14}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\frac{1}{b^3}-b^3 &= \left(\frac{1}{b}-b\right)\left(\frac{1}{b^2}+b\cdot\frac{1}{b}+b^2\right)\\ &= \left(\frac{1}{b}-b\right)\left(\frac{1}{b^2}+1+b^2\right)\\ &= \left\{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\right\}(14+1)\\ &= 2\sqrt{3}\times 15\\ &= \mathbf{30\sqrt{3}}\end{aligned}$$

添削課題

【1】(1)

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & (x+3 \geqq 0,\ \text{すなわち},\ x \geqq -3\ \text{のとき}) \\ -x-3 & (x+3 < 0,\ \text{すなわち},\ x < -3\ \text{のとき}) \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & (x-2 \geqq 0,\ \text{すなわち},\ x \geqq 2\ \text{のとき}) \\ -x+2 & (x-2 < 0,\ \text{すなわち},\ x < 2\ \text{のとき}) \end{cases}$$

(i) $x \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} |x+3| - |x-2| &= (x+3) - (x-2) \\ &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

(ii) $-3 \leqq x < 2$ のとき

$$\begin{aligned} |x+3| - |x-2| &= (x+3) + (x-2) \\ &= \mathbf{2x+1} \end{aligned}$$

(iii) $x < -3$ のとき

$$\begin{aligned} |x+3| - |x-2| &= -(x+3) + (x-2) \\ &= \mathbf{-5} \end{aligned}$$

(i)～(iii) より,

$$|x+3| - |x-2| = \begin{cases} \mathbf{5} & (\boldsymbol{x \geqq 2}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{2x+1} & (\boldsymbol{-3 \leqq x < 2}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{-5} & (\boldsymbol{x < -3}\ \textbf{のとき}) \end{cases}$$

(2) ①

$$\begin{aligned} (3-2\sqrt{3})^3 &= 3^3 - 3\cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{3} + 3\cdot 3\cdot (2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^3 \\ &= 27 - 54\sqrt{3} + 108 - 24\sqrt{3} \\ &= \mathbf{135 - 78\sqrt{3}} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 &= 2+3+5-2\sqrt{6}-2\sqrt{10}+2\sqrt{15} \\ &= \mathbf{10 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} \end{aligned}$$

【2】$(9+4\sqrt{5})^n = A,\ (9-4\sqrt{5})^n = B$ とおくと,

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (A+B)^2 - (A-B)^2 = 4AB \\ &= 4(9+4\sqrt{5})^n(9-4\sqrt{5})^n \\ &= 4\{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})\}^n \\ &= 4\cdot(81-80)^n = 4\cdot 1^n = \mathbf{4} \end{aligned}$$

【3】 $$\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

ここで，$1<\sqrt{3}<2$ より，

$$\begin{aligned}1<&\quad\sqrt{3}\quad<2\\ 2<&\ \sqrt{3}+1\ <3\\ \therefore\ 1<&\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}<\frac{3}{2}\end{aligned}$$

したがって，$\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ の整数部分 a は，$a=1$.

小数部分 b は，$b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

よって，$a+b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$a-b=1-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ だから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}&=\frac{2}{\sqrt{3}+1}+\frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}\\ &=\frac{2(3-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\\ &=\frac{2\cdot 4}{\sqrt{3}\cdot(3-1)}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

【4】 $$x-2=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-2=a+\frac{1}{a}$$

また，

$$x^2-4x=(x-2)^2-4=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\therefore\ \sqrt{x^2-4x}=\left|a-\frac{1}{a}\right|$$

したがって，$a\geqq\dfrac{1}{a}$ $(a>0)$ のとき，すなわち，$1\leqq a$ のとき

$$x-2+\sqrt{x^2-4x}=a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}=\boldsymbol{2a}$$

$a<\dfrac{1}{a}$ $(a>0)$ のとき，すなわち，$0<a<1$ のとき

$$x-2+\sqrt{x^2-4x}=a+\frac{1}{a}-\left(a-\frac{1}{a}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{a}}$$

問題

【1】(1) ①

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 6 \cdot 0 \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} & f\left(-\frac{1}{2}\right) \\ =& \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ =& \frac{1}{4} + 3 = \mathbf{\frac{13}{4}} \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned} f(2+\sqrt{3}) =& (2+\sqrt{3})^2 - 6 \cdot (2+\sqrt{3}) \\ =& 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 12 - 6\sqrt{3} \\ =& \boldsymbol{-5 - 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned} f(1-a) =& (1-a)^2 - 6(1-a) \\ =& 1 - 2a + a^2 - 6 + 6a \\ =& \boldsymbol{a^2 + 4a - 5} \end{aligned}$$

(2) ①

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} f(4) &= 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 \\ &= 32 - 12 + 1 \\ &= \mathbf{21} \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned} f(-1+\sqrt{2}) =& 2 \cdot (-1+\sqrt{2})^2 - 3 \cdot (-1+\sqrt{2}) + 1 \\ =& 2(1 - 2\sqrt{2} + 2) - 3(-1+\sqrt{2}) + 1 \\ =& \boldsymbol{10 - 7\sqrt{2}} \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned} f(a+2) =& 2(a+2)^2 - 3(a+2) + 1 \\ =& 2(a^2 + 4a + 4) - 3(a+2) + 1 \\ =& \boldsymbol{2a^2 + 5a + 3} \end{aligned}$$

【2】 (1) $y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{5}{3}$ のグラフの頂点は $\left(0,\ -\dfrac{5}{3}\right)$ だから,

$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{3}x^2}$ **を** $\boldsymbol{y}$ **軸正の方向に** $\boldsymbol{-\dfrac{5}{3}}$ **平行移動したグラフ**

(2) $y=-3(x+4)^2$ のグラフの頂点は $(-4,\ 0)$ だから,

$\boldsymbol{y=-3x^2}$ **を** $\boldsymbol{x}$ **軸正の方向に** $\boldsymbol{-4}$ **平行移動したグラフ**

(3) $y=-(x-3)^2-7$ のグラフの頂点は $(3,\ -7)$ だから,

$\boldsymbol{y=-x^2}$ **のグラフを** $\boldsymbol{x}$ **軸正の方向に** $\boldsymbol{3}$**,** $\boldsymbol{y}$ **軸正の方向に** $\boldsymbol{-7}$ **平行移動したグラフ**

(4) $y=\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{24}{25}$ のグラフの頂点は $\left(-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{24}{25}\right)$ だから,

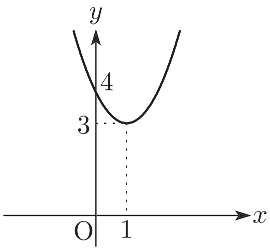
$\boldsymbol{y=\dfrac{3}{2}x^2}$ **のグラフを** $\boldsymbol{x}$ **軸正の方向に** $\boldsymbol{-\dfrac{4}{5}}$**,** $\boldsymbol{y}$ **軸正の方向に** $\boldsymbol{\dfrac{24}{25}}$ **平行移動したグラフ**

【3】(1) 基本形：$y=x^2$

平行移動：x 軸正の方向に 1，y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

軸：$x=1$

頂点：(1，3)

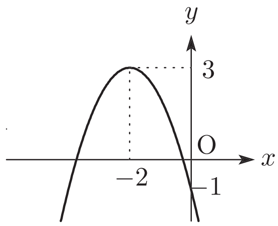


(2) 基本形：$y=-x^2$

平行移動：x 軸正の方向に -2，y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

軸：$x=-2$

頂点：$(-2,\ 3)$

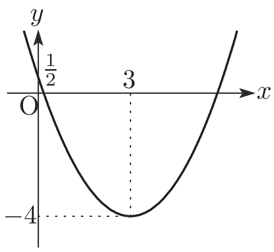


(3) 基本形：$y=\dfrac{1}{2}x^2$

平行移動：x 軸正の方向に 3，y 軸正の方向に -4 平行移動したグラフ

軸：$x=3$

頂点：$(3,\ -4)$

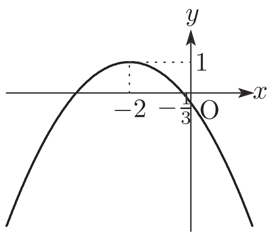


(4) 基本形：$y=-\dfrac{1}{3}x^2$

平行移動：x 軸正の方向に -2，y 軸正の方向に 1 平行移動したグラフ

軸：$x=-2$

頂点：$(-2,\ 1)$

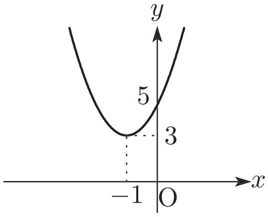


(5) 基本形：$y=2x^2$

平行移動：x 軸正の方向に -1，y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

軸：$x=-1$

頂点：$(-1,\ 3)$

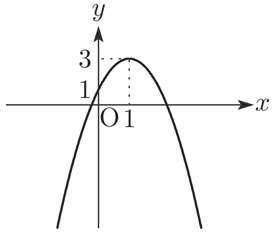


(6) 基本形：$y=-2x^2$

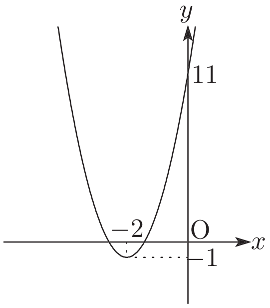
平行移動：x 軸正の方向に 1，y 軸正の方向に 3 平行移動したグラフ

軸：$x=1$

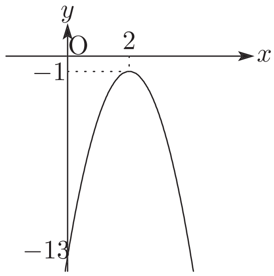
頂点：(1，3)



(7) 基本形：$y=3x^2$
平行移動：x 軸正の方向に -2，y 軸正の方向に -1 平行移動したグラフ
軸：$x=-2$
頂点：$(-2,\ -1)$



(8) 基本形：$y=-3x^2$
平行移動：x 軸正の方向に 2，y 軸正の方向に -1 平行移動したグラフ
軸：$x=2$
頂点：$(2,\ -1)$



【4】(1)
$x^2+4x=\boldsymbol{(x+2)^2-4}$

(2)
$$\begin{aligned}&2x^2-6x\\=&2(x^2-3x)\\=&2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}\\=&\boldsymbol{2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&x^2+2x+5\\=&(x^2+2x)+5\\=&(x+1)^2-1+5\\=&\boldsymbol{(x+1)^2+4}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}x^2-2x-7\\=&\frac{1}{3}(x^2-6x)-7\\=&\frac{1}{3}\left\{(x-3)^2-9\right\}-7\\=&\frac{1}{3}(x-3)^2-3-7\\=&\boldsymbol{\frac{1}{3}(x-3)^2-10}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
&-x^2-8x+4\\
=&-(x^2+8x)+4\\
=&-\{(x+4)^2-16\}+4\\
=&-(x+4)^2+16+4\\
=&\boldsymbol{-(x+4)^2+20}
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
&-2x^2+6x+5\\
=&-2(x^2-3x)+5\\
=&-2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+5\\
=&-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}+5\\
=&\boldsymbol{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{2}}
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}x^2+4x+3\\
=&\sqrt{2}(x^2+2\sqrt{2}x)+3\\
=&\sqrt{2}\left\{(x+\sqrt{2})^2-2\right\}+3\\
=&\boldsymbol{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+3}
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}x^2+3x+1\\
=&\sqrt{3}(x^2+\sqrt{3}x)+1\\
=&\sqrt{3}\left\{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right\}+1\\
=&\boldsymbol{\sqrt{3}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}+1}
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
&x^2+2ax-3a^2\\
=&(x+a)^2-a^2-3a^2\\
=&\boldsymbol{(x+a)^2-4a^2}
\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}
&2ax^2-10ax+3a^2\\
=&2a(x^2-5x)+3a^2\\
=&2a\left\{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right\}+3a^2\\
=&\boldsymbol{2a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{2}a+3a^2}
\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}
&x^2+2(a-1)x+2a\\
=&\{x+(a-1)\}^2-(a-1)^2+2a\\
=&\{x+(a-1)\}^2-a^2+2a-1+2a\\
=&\{x+(a-1)\}^2-a^2+4a-1\\
=&\boldsymbol{(x+a-1)^2-a^2+4a-1}
\end{aligned}$$

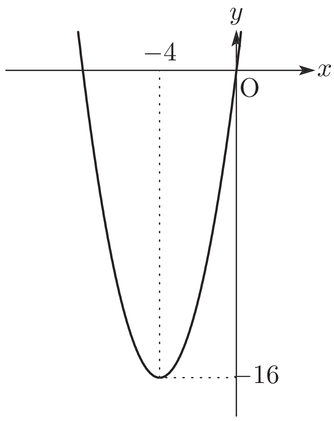
(12)

$$\begin{aligned}
&x^2-(a+2)x+1\\
=&\left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{(a+2)^2}{4}+1\\
=&\left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{a^2+4a+4}{4}+1\\
=&\boldsymbol{\left(x-\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{a^2+4a}{4}}
\end{aligned}$$

【5】(1)

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 8x \\ &= (x+4)^2 - 16 \end{aligned}$$

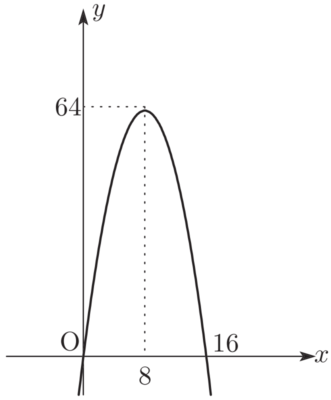
軸：$x = -4$　　頂点：$(-4,\ -16)$



(2)

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 16x \\ &= -(x^2 - 16x) \\ &= -\{(x-8)^2 - 64\} \\ &= -(x-8)^2 + 64 \end{aligned}$$

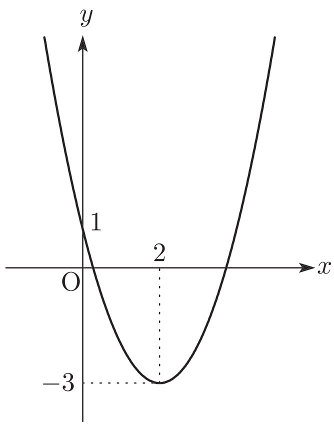
軸：$x = 8$　　頂点：$(8,\ 64)$



(3)

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 1 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 1 \\ &= (x-2)^2 - 3 \end{aligned}$$

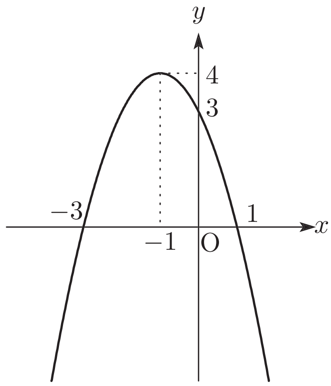
軸：$x = 2$　　頂点：$(2,\ -3)$



(4)

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 2x + 3 \\ &= -(x^2 + 2x) + 3 \\ &= -\{(x+1)^2 - 1\} + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 1 + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

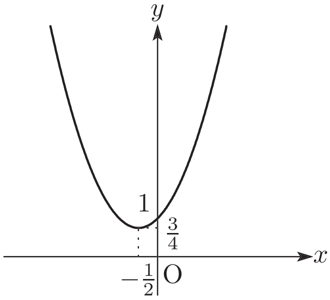
軸：$x = -1$　　頂点：$(-1,\ 4)$



(5)

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 + x + 1 \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

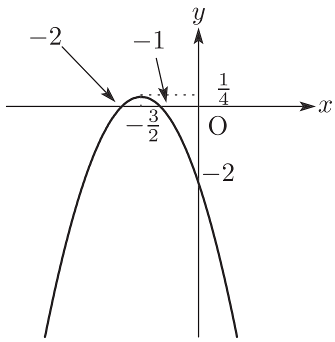
軸：$x = -\dfrac{1}{2}$　　頂点：$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$



(6)

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 - 3x - 2 \\
&= -(x^2 + 3x) - 2 \\
&= -\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} - 2 \\
&= -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} - 2 \\
&= -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

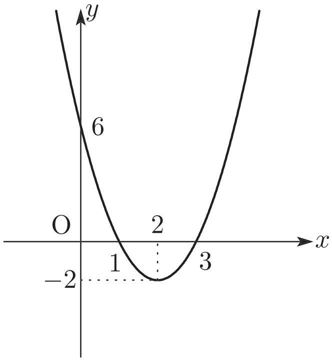
軸：$x = -\dfrac{3}{2}$　　頂点：$\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$



(7)

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 - 8x + 6 \\
&= 2(x^2 - 4x) + 6 \\
&= 2\left\{(x-2)^2 - 4\right\} + 6 \\
&= 2(x-2)^2 - 8 + 6 \\
&= 2(x-2)^2 - 2
\end{aligned}
$$

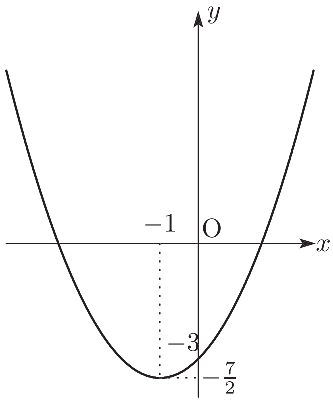
軸：$x = 2$　　頂点：$(2,\ -2)$



(8)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x^2 + x - 3 \\
&= \frac{1}{2}(x^2 + 2x) - 3 \\
&= \frac{1}{2}\left\{(x+1)^2 - 1\right\} - 3 \\
&= \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2} - 3 \\
&= \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

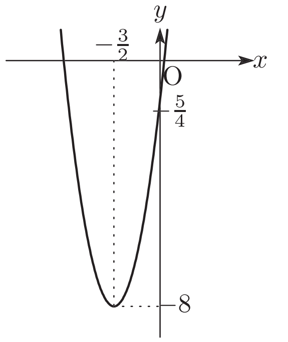
軸：$x = -1$　　頂点：$\left(-1,\ -\dfrac{7}{2}\right)$



(9)

$$
\begin{aligned}
y &= 3x^2 + 9x - \frac{5}{4} \\
&= 3(x^2 + 3x) - \frac{5}{4} \\
&= 3\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} - \frac{5}{4} \\
&= 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} - \frac{5}{4} \\
&= 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 8
\end{aligned}
$$

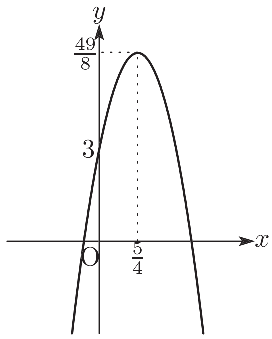
軸：$x = -\dfrac{3}{2}$　　頂点：$\left(-\dfrac{3}{2},\ -8\right)$



(10)

$$
\begin{aligned}
y &= -2x^2 + 5x + 3 \\
&= -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 3 \\
&= -2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right\} + 3 \\
&= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} + 3 \\
&= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}
\end{aligned}
$$

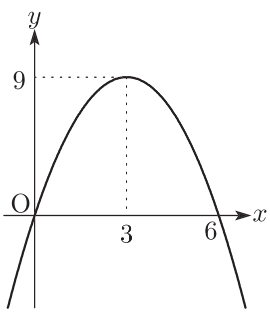
軸：$x = \dfrac{5}{4}$　　頂点：$\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{49}{8}\right)$



(11)

$$
\begin{aligned}
y &= x(6 - x) \\
&= -x^2 + 6x \\
&= -(x^2 - 6x) \\
&= -\left\{(x - 3)^2 - 9\right\} \\
&= -(x - 3)^2 + 9
\end{aligned}
$$

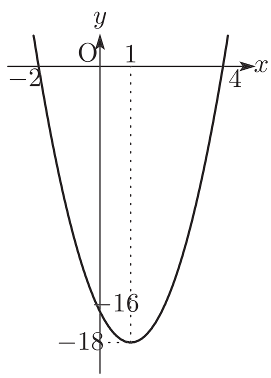
軸：$x = 3$　　頂点：$(3,\ 9)$



(12)

$$
\begin{aligned}
y &= 2(x + 2)(x - 4) \\
&= 2x^2 - 4x - 16 \\
&= 2(x^2 - 2x) - 16 \\
&= 2\{(x - 1)^2 - 1\} - 16 \\
&= 2(x - 1)^2 - 18
\end{aligned}
$$

軸：$x = 1$　　頂点：$(1,\ -18)$



【6】(1) ① グラフが下に凸であることから，$\boldsymbol{a > 0}$

② 軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$

グラフから，軸は $x < 0$ の範囲にあるので，$-\dfrac{b}{2a} < 0$

①より，$a > 0$ なので，$\boldsymbol{b > 0}$

③ グラフの y 切片の符号より，$\boldsymbol{c > 0}$

④ 頂点の y 座標 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a} = 0$ だから，

$$\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$$

⑤ グラフより，$x = 1$ のとき，$y > 0$ だから

$$\boldsymbol{a + b + c > 0}$$

⑥ グラフより，$x = -1$ のとき，$y = 0$ だから

$$\boldsymbol{a - b + c = 0}$$

⑦ グラフより，$0 < c < 1$ なので，

$$a + b + c < a + b + 1$$

⑤より，$a + b + c > 0$ だから，$\boldsymbol{a + b + 1 > 0}$

(2) ① グラフが下に凸であることから，$\boldsymbol{a > 0}$

② 軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$

グラフから，軸は $x < 0$ の範囲にあるので，$-\dfrac{b}{2a} < 0$

①より，$a > 0$ なので，$\boldsymbol{b > 0}$

③ グラフの y 切片の符号より，$\boldsymbol{c < 0}$

④ 頂点の y 座標 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a} < 0$ で $a > 0$ だから，

$$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$$

⑤ グラフより，$x = 1$ のとき，$y = 0$ だから，

$$\boldsymbol{a + b + c = 0}$$

⑥ グラフより，$x = -1$ のとき，$y < 0$ だから，

$$\boldsymbol{a - b + c < 0}$$

⑦ ①，②より，$a > 0$, $b > 0$ なので

$$\boldsymbol{a + b > 0}$$

【7】(1) 求める方程式は，

$$\begin{aligned} y - 4 &= -4(x+2) + 5 \\ y &= -4x - 3 + 4 \\ \therefore\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= -4x + 1} \end{aligned}$$

(2) 求める方程式は，

$$
\begin{aligned}
&y+1=-2(x-1)^2+4(x-1)-1\\
&y+1=-2x^2+4x-2+4x-4-1\\
&\therefore\ \boldsymbol{y=-2x^2+8x-8}
\end{aligned}
$$

(3) $y = -2x^2+4x-1$ を x 軸正の方向に -4，y 軸正の方向に 3 平行移動すると，$y=ax^2+bx+c$ になるので

$$
\begin{aligned}
y-3&=-2(x+4)^2+4(x+4)-1\\
y-3&=-2(x^2+8x+16)+4(x+4)-1\\
y&=-2x^2-12x-14
\end{aligned}
$$

よって，

$$\boldsymbol{a=-2,\ b=-12,\ c=-14}$$

(4) $y=x^2+4x$ の頂点は

$$
\begin{aligned}
y&=x^2+4x\\
&=(x+2)^2-4
\end{aligned}
$$

より，$(-2,\ -4)$ である．
$y=x^2-6x$ の頂点は

$$
\begin{aligned}
y&=x^2-6x\\
&=(x-3)^2-9
\end{aligned}
$$

より，$(3,\ -9)$ である．
したがって，$(-2,\ -4)$ が $(3,\ -9)$ に平行移動するので，

$$\boldsymbol{p=5,\ q=-5}$$

(5) $y=x^2+4x+8$ の頂点は

$$
\begin{aligned}
y&=x^2+4x+8\\
&=(x+2)^2-4+8\\
&=(x+2)^2+4
\end{aligned}
$$

より，頂点は $(-2,\ 4)$
$y=x^2-2x+2$ の頂点は

$$
\begin{aligned}
y&=x^2-2x+2\\
&=(x-1)^2-1+2\\
&=(x-1)^2+1
\end{aligned}
$$

より，頂点は $(1,\ 1)$
$(-2,\ 4)$ が $(1,\ 1)$ に平行移動するので，

$$\boldsymbol{p=3,\ q=-3}$$

(6) 3 点 $(0,\ -8)$, $(1,\ -5)$, $(3,\ -11)$ を通る 2 次関数を求める．
求める 2 次関数を

$$y = dx^2 + ex + f \quad (d \fallingdotseq 0)$$

とおくと，

$$\begin{cases} -8 = f & \cdots ① \\ -5 = d + e + f & \cdots ② \\ -11 = 9d + 3e + f & \cdots ③ \end{cases}$$

①を②，③に代入して

$$\begin{aligned} d + e &= 3 \quad \cdots ②' \\ 9d + 3e &= -3 \quad \cdots ③' \end{aligned}$$

よって，$d = -2$，$e = 5$，$f = -8$

$$\therefore\ y = -2x^2 + 5x - 8$$

これを x 軸正の方向に -1，y 軸正の方向に 2 平行移動したものが，$y = ax^2 + bx + c$ となるので，x を $x + 1$，y を $y - 2$ に置き換えると

$$\begin{aligned} y - 2 &= -2(x+1)^2 + 5(x+1) - 8 \\ &= -2(x^2 + 2x + 1) + 5x + 5 - 8 \\ &= -2x^2 + x - 5 \\ y &= -2x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{a = -2,\ b = 1,\ c = -3}$$

(7) $y = 2x^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動するので

$$y = 2(x - p)^2 + q$$

とおける．これが，$(1,\ 4)$ を通るので

$$4 = 2(1 - p)^2 + q \ \cdots ①$$

また，$(2,\ 6)$ も通るので，

$$6 = 2(2 - p)^2 + q \ \cdots ②$$

①，②より，q を消去して，

$$\begin{aligned} -2 &= 2(1-p)^2 - 2(2-p)^2 \\ &= 2(1 - 2p + p^2) - 2(4 - 4p + p^2) \\ &= -6 + 4p \\ 4p &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{p = 1,\ q = 4}$$

(8) $y = -x^2 + 5x + 4$ を平行移動するので，

$$y = -x^2 + ax + b$$

とおける．

これが，$(-1,\ 1)$，$(3,\ 1)$ を通るので

$$\begin{cases} 1=-1-a+b & \cdots ① \\ 1=-9+3a+b & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より

$$\begin{aligned} 0&=8-4a \\ 4a&=8 \\ a&=2,\ b=4 \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{y=-x^2+2x+4}$$

(9) $y=-2x^2+5x+3$ を x 軸方向に p 平行移動すると

$$y=-2(x-p)^2+5(x-p)+3$$

となる．これが原点を通るので

$$\begin{aligned} 0&=-2(0-p)^2+5(0-p)+3 \\ 0&=-2p^2-5p+3 \\ 2p^2+5p-3&=0 \\ (2p-1)(p+3)&=0 \\ \boldsymbol{p}&\boldsymbol{=\frac{1}{2},\ -3} \end{aligned}$$

(10) $y=x^2+ax-1$ の頂点は

$$\begin{aligned} y&=x^2+ax-1 \\ &=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2-1 \end{aligned}$$

より，$\left(-\frac{1}{2}a,\ -\frac{1}{4}a^2-1\right)$ となる．

これを x 軸正の方向に 1 平行移動すると，頂点は $\left(-\frac{1}{2}a+1,\ -\frac{1}{4}a^2-1\right)$ となり，これが $(2,\ b)$ に一致するので

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+1=2 & \cdots ① \\ -\frac{1}{4}a^2-1=b & \cdots ② \end{cases}$$

①より，$a=-2$

②より，$b=-2$

よって，$\boldsymbol{a=-2,\ b=-2}$

【8】(1) 3 点 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 5)$ のうち，
2 点 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$ の y 座標が同じなの
で，求める 2 次関数は

$y=a(x+1)(x-1)+2 \quad (a \fallingdotseq 0) \cdots ①$

とおける．これが $(2,\ 5)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 5&=a(2+1)(2-1)+2 \\ 5&=3a+2 \\ 3a&=3 \\ a&=1 \end{aligned}$$

これを①に代入すると

$$\begin{aligned} y&=1\cdot(x+1)(x-1)+2 \\ &=x^2-1+2 \\ &=x^2+1 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{y=x^2+1}$

＜別解＞

$y=ax^2+bx+c$ とおく．
$(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 5)$ を通るので

$$\begin{cases} a-b+c=2 & \cdots ① \\ a+b+c=2 & \cdots ② \\ 4a+2b+c=5 & \cdots ③ \end{cases}$$

①，② より，

$b=0$

②，③に代入して

$$\begin{cases} a+c=2 & \cdots ②' \\ 4a+c=5 & \cdots ③' \end{cases}$$

②′，③′ より，

$a=1,\ c=1$

よって，$\boldsymbol{y=x^2+1}$

(2) 3 点 $(-1,\ 2)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 5)$ のうち
2 点 $(-1,\ 2)$, $(2,\ 2)$ の y 座標が同じなの
で，求める 2 次関数は

$y=a(x+1)(x-2)+2 \quad (a \fallingdotseq 0) \cdots ①$

とおける．これが $(3,\ 5)$ を通るので，

$$\begin{aligned} 5&=a(3+1)(3-2)+2 \\ 5&=4a+2 \\ 4a&=3 \\ a&=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

これを①に代入すると，

$$\begin{aligned} y&=\frac{3}{4}(x+1)(x-2)+2 \\ &=\frac{3}{4}(x^2-x-2)+2 \\ &=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$$

＜別解＞

$y=ax^2+bx+c\ (a \fallingdotseq 0)$ とおく．
$(-1,\ 2)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 5)$ を通るので

$$\begin{cases} a-b+c=2 & \cdots ① \\ 4a+2b+c=2 & \cdots ② \\ 9a+3b+c=5 & \cdots ③ \end{cases}$$

①，② より，

$$\begin{aligned} 3a+3b&=0 \\ a+b&=0 \cdots ④ \end{aligned}$$

②，③ より，

$5a+b=3 \cdots ⑤$

④，⑤ より，

$$\begin{aligned} 4a&=3 \\ a&=\frac{3}{4},\ b=-\frac{3}{4} \end{aligned}$$

①に代入して，

$\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}+c=2 \qquad c=\dfrac{1}{2}$

よって，

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}}$$

(3) x 軸に接しているので，求める 2 次関数は

$$y = a(x-p)^2 \quad (a \neq 0)$$

とおける．(2, 1), (6, 9) を通るので

$$1 = a(2-p)^2 \quad \cdots ①$$
$$9 = a(6-p)^2 \quad \cdots ②$$

①，②より，$\dfrac{②}{①}$ を考え，

$$9 = \frac{(6-p)^2}{(2-p)^2}$$
$$9(2-p)^2 = (6-p)^2$$
$$8p^2 - 24p = 0$$
$$8p(p-3) = 0$$
$$p = 0,\ 3$$

$p = 0$ のとき ①より，

$$1 = a(2-0)^2$$
$$1 = 4a$$
$$a = \frac{1}{4}$$

$p = 3$ のとき ①より，

$$1 = a(2-3)^2$$
$$1 = a$$
$$a = 1$$

よって，$a = \dfrac{1}{4}$，$p = 0$ のとき

$$y = \frac{1}{4}(x-0)^2$$
$$= \frac{1}{4}x^2$$

一方，$a = 1$，$p = 3$ のとき

$$y = 1 \cdot (x-3)^2$$
$$= x^2 - 6x + 9$$

したがって，

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x^2,\ y = x^2 - 6x + 9}$$

(4) 放物線 $y = x^2 + 2ax + b$ は x 軸に接しているので，求める 2 次関数は

$$y = (x-p)^2$$

とおける．これが (1, 4) を通るので

$$4 = (1-p)^2$$
$$1 - p = \pm 2$$
$$p = -1,\ 3$$

$p = -1$ のとき，

$$y = (x+1)^2$$
$$= x^2 + 2x + 1$$

$p = 3$ のとき，

$$y = (x-3)^2$$
$$= x^2 - 6x + 9$$

よって，

$$\boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 1),\ (-3,\ 9)}$$

(5) 頂点が $y=4x-3$ 上にあるので，頂点を $(t,\ 4t-3)$ とおける．よって，求める 2 次関数は

$$y=2(x-t)^2+4t-3 \quad \cdots ①$$

とおける．これが $(2,\ 3)$ を通るので

$$\begin{aligned}3&=2(2-t)^2+4t-3\\3&=2(4-4t+t^2)+4t-3\\2t^2-4t+2&=0\\(t-1)^2&=0\\t&=1\end{aligned}$$

よって，①に $t=1$ を代入して

$$\begin{aligned}y&=2(x-1)^2+1\\&=2x^2-4x+3\end{aligned}$$

したがって，

$$\boldsymbol{a=-4,\ b=3}$$

(6) 頂点が $y=x-5$ 上にあるので，頂点を $(t,\ t-5)$ とおける．
よって，求める 2 次関数は

$$y=a(x-t)^2+t-5 \quad (a\neq 0)$$

とおける．これが $(2,\ -3)$，$(3,\ 0)$ を通るので

$$\begin{cases}-3=a(2-t)^2+t-5 & \cdots ①\\0=a(3-t)^2+t-5 & \cdots ②\end{cases}$$

より，

$$\begin{cases}a(2-t)^2=-t+2 & \cdots ①'\\a(3-t)^2=-t+5 & \cdots ②'\end{cases}$$

$t\neq 2$ のもとで，$\dfrac{②'}{①'}$ より，

$$\begin{aligned}\frac{(3-t)^2}{(2-t)^2}&=\frac{-t+5}{-t+2}\\(-t+5)(2-t)^2&=(-t+2)(3-t)^2\\9t^2-24t+20&=8t^2-21t+18\\t^2-3t+2&=0\\(t-1)(t-2)&=0\\t&=1,\ 2\end{aligned}$$

$t\neq 2$ より，$t=1$
$t=1$ のとき，①より

$$\begin{aligned}-3&=a(2-1)^2+1-5\\-3&=a-4\\a&=1\end{aligned}$$

よって，$t=1$，$a=1$ のとき，

$$\begin{aligned} y &= 1\cdot(x-1)^2+1-5 \\ &= x^2-2x+1-4 \\ &= x^2-2x-3 \end{aligned}$$

また，$t=2$ のときは，①$'$ は満たし，②$'$ より

$$\begin{aligned} &0=a(3-2)^2+2-5 \\ &0=a-3 \\ &a=3 \end{aligned}$$

よって，$t=2$，$a=3$ のとき，

$$\begin{aligned} y &= 3(x-2)^2+2-5 \\ &= 3(x^2-4x+4)+2-5 \\ &= 3x^2-12x+12+2-5 \\ &= 3x^2-12x+9 \end{aligned}$$

以上より，

$$\boldsymbol{y=x^2-2x-3,\ y=3x^2-12x+9}$$

M1JK
高 1 東大数学 K

Z-KAI

会員番号		氏　名	