M1JS/M1J

本科1期4月度

解答

Z会東大進学教室

高1選抜東大数学

高1東大数学

問題

【1】(1) $\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{4+1}{2}\right)=\left(\mathbf{-1,\ \dfrac{5}{2}}\right)$　　**(答)**

(2) $\left(\dfrac{1\times(-3)+2\times 1}{2+1}, \dfrac{1\times 4+2\times 1}{2+1}\right)=\left(\mathbf{-\dfrac{1}{3},\ 2}\right)$　　**(答)**

(3) $\left(\dfrac{-2\times(-3)+3\times 1}{3-2}, \dfrac{-2\times 4+3\times 1}{3-2}\right)=\mathbf{(9,\ -5)}$　　**(答)**

(4) $\left(\dfrac{-4\times(-3)+1\times 1}{1-4}, \dfrac{-4\times 4+1\times 1}{1-4}\right)=\left(\mathbf{-\dfrac{13}{3},\ 5}\right)$　　**(答)**

(5) T は AB を 1 : 2 に内分する点だから

$$\mathrm{T}\left(\frac{-3\times 2+1\times 1}{1+2}, \frac{4\times 2+1\times 1}{1+2}\right)=\left(\mathbf{-\frac{5}{3}, 3}\right)$$　　**(答)**

【2】$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ とおくと，それぞれの条件より，

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2,\ \frac{y_1+y_2}{2}=0$$
$$\frac{x_1+x_3}{2}=3,\ \frac{y_1+y_3}{2}=1$$
$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=3,\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=0$$

すなわち，

$$x_1+x_2=4,\ y_1+y_2=0 \quad \cdots ①$$
$$x_1+x_3=6,\ y_1+y_3=2 \quad \cdots ②$$
$$x_1+x_2+x_3=9,\ y_1+y_2+y_3=0 \quad \cdots ③$$

③ − ① より，

$$x_3=5,\ y_3=0$$

③ − ② より，

$$x_2=3,\ y_2=-2$$

これを ① に代入して，

$$x_1=1,\ y_1=2$$

以上より，

A(1, 2), B(3, − 2), C(5, 0)　　**(答)**

【3】 $a=1$ のとき，A(0, -1)，B(0, 5)，C(-3, 4) は同一直線上になく，
$a=4$ のとき，A(0, -1)，B(3, 5)，C(3, 1) は同一直線上にない．
よって，$a \fallingdotseq 1,\ 4$ のもとで考える．
AB の傾きは,

$$\frac{5-(-1)}{(a-1)-0}=\frac{6}{a-1}$$

BC の傾きは,

$$\frac{(-a+5)-5}{(2a-5)-(a-1)}=\frac{-a}{a-4}$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあることより,

$$\frac{6}{a-1}=\frac{-a}{a-4} \qquad \therefore\ 6(a-4)=-a(a-1)$$

整理して,

$$a^2+5a-24=0$$
$$\therefore\ (a+8)(a-3)=0$$

より,

$$\boldsymbol{a=-8,\ 3} \qquad \textbf{(答)}$$

＜別解＞

$a \fallingdotseq 1$ であることをことわってから，次のように, 直線 AB を求め, それが点 C を通るとして解いてもよい.

直線 AB は,

$$y=\frac{6}{a-1}x-1$$

これが C を通るので,

$$-a+5=\frac{6}{a-1}(2a-5)-1$$

整理して,

$$a^2+5a-24=0$$

(以下同様)

【4】 (1) 直線の傾きは, x 軸の正の向きと直線のなす角を θ として, $\tan\theta$ と表される.
よって, 傾きは $\tan 135^\circ=-1$ だから,

$$y=-1(x+1)+3$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y=-x+2} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 2 点 $(3,\ 5)$, $(-6,\ 2)$ を通るから, 求める直線の傾きは

$$\frac{5-2}{3-(-6)} = \frac{1}{3}$$

である. よって, 求める直線の方程式は,

$$y = \frac{1}{3}(x-3)+5$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1}{3}x+4} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) 2 点の x 座標がともに -3 だから，求める直線の方程式は,

$$\boldsymbol{x = -3} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) 2 点 $(3,\ 0)$, $(0,\ -2)$ を通るから, 求める直線の傾きは,

$$\frac{0-(-2)}{3-0} = \frac{2}{3}$$

である. よって, 求める直線の方程式は,

$$y = \frac{2}{3}(x-3)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{2}{3}x-2} \qquad \textbf{(答)}$$

【5】(1) $x-2y+3=0$ より，$y = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

よって, 求める直線は, 傾きが $\frac{1}{2}$ で, 点 $(-1, 2)$ を通るので,

$$y = \frac{1}{2}(x+1)+2$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $2x-y+3=0$ より，$y = 2x+3$

よって, 求める直線の傾きを m とすると,

$$2m = -1 \quad \text{より，} \quad m = -\frac{1}{2}$$

点 $(-1, 2)$ を通るので,

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)+2$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) AB の中点を通り, 直線 AB に垂直な直線を求めればよい. AB の中点は

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1, 2)$$

直線 AB の傾きは,

$$\frac{3-1}{4-(-2)} = \frac{1}{3}$$

よって, 求める直線の傾きを m とすると,

$\frac{1}{3}m = -1$ より, $m = -3$

したがって, 点 $(1, 2)$ を通るので,

$$y = -3(x-1) + 2$$

$\therefore$ $\boldsymbol{y = -3x + 5}$ **(答)**

<別解>

線分 AB の垂直二等分線 $\iff$ 2 点 A, B から等距離にある点の集合

つまり, 求める直線上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は, PA=PB を満たす.

$\therefore$ $\mathrm{PA}^2 = \mathrm{PB}^2$ より, $(x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2$

整理して, $\boldsymbol{3x + y = 5}$ **(答)**

(4) $5(x+2) + 3(y-3) = 10$

$\therefore$ $\boldsymbol{5x + 3y = 9}$ **(答)**

【6】 $\mathrm{Q}(a, b)$ とおくと, 2 点 P, Q を通る直線は, 直線 $l : y = -3x$ と垂直であるから,

$$\frac{b-11}{a-5} = \frac{1}{3}$$

整理して,

$$a - 3b + 28 = 0 \ \cdots ①$$

また, 2 点 P, Q の中点 $\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+11}{2}\right)$ は, 直線 l 上にあるので,

$$3 \times \frac{a+5}{2} + \frac{b+11}{2} = 0$$

$$\therefore\ 3a + b + 26 = 0 \ \cdots ②$$

①, ② より,

$$a = -\frac{53}{5},\ b = \frac{29}{5}$$

したがって,

$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(-\frac{53}{5},\ \frac{29}{5}\right)}$ **(答)**

【7】点 A の ℓ に関する対称点を $\mathrm{A}'(a,\ b)$ とすると，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PB}$$

であるので，AP+PB が最小になるのは，A′P+PB が最小，すなわち P が直線 A′B と ℓ の交点になるときである．
ここで，A′ について，

(i) $\mathrm{A'A}\perp\ell$

(ii) A′A の中点は ℓ 上に存在する

(i) より，A′A の傾きは $\dfrac{b}{a-1}$ であるので，

$$\frac{b}{a-1}\cdot 2=-1$$
$$a+2b=1 \quad \cdots ①$$

(ii) より，A′A の中点は，$\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ であるので，

$$\frac{b}{2}=2\cdot\frac{a+1}{2}+3$$
$$2a-b=-8 \quad \cdots ②$$

①,② を連立して解いて，$(a,\ b)=(-3,\ 2)$
よって，$\mathrm{A}'(-3,\ 2)$ より，直線 A′B の方程式は，

$$y=\frac{0-2}{3-(-3)}(x-3)$$
$$=-\frac{1}{3}x+1 \quad \cdots ③$$

これと，$\ell : y=2x+3$ との交点は ③ と連立させて

$$2x+3=-\frac{1}{3}x+1$$
$$\therefore\ x=-\frac{6}{7},\quad y=\frac{9}{7}$$

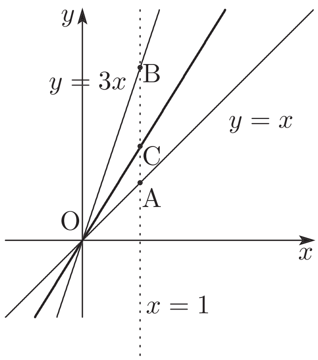
よって，

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}},\ \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}}\right) \quad \textbf{(答)}$$

また，AP+BP の最小値は，

$$\mathrm{A'B}=\sqrt{(-3-3)^2+(2-0)^2}$$
$$=\mathbf{2\sqrt{10}} \quad \textbf{(答)}$$

【8】 求める直線は明らかに原点 O を通る．
また，$y=x$，$y=3x$ と直線 $x=1$ との交点をそれぞれ A，B とすれば，A(1, 1)，B(1, 3) であり，求める直線は $\angle$AOB の二等分線と AB との交点 C を通る．
ここで，OC は $\angle$AOB の二等分線なので，



$$
\begin{aligned}
\mathrm{AC}:\mathrm{BC} &= \mathrm{AO}:\mathrm{BO}\\
&= \sqrt{1^2+1^2}:\sqrt{1^2+3^2}\\
&= \sqrt{2}:\sqrt{10}\\
&= 1:\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

よって，C は線分 AB を $1:\sqrt{5}$ の比に内分する点なので，C$(1,\ y_0)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{\sqrt{5}\cdot 1+1\cdot 3}{1+\sqrt{5}}\\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

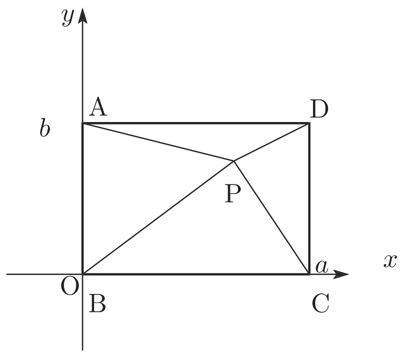
よって，求める直線は，O(0, 0)，$\mathrm{C}\left(1,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ を結ぶ直線なので，

$$\boldsymbol{y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} \qquad \textbf{(答)}$$

【9】 右の図のように座標軸を設定し，

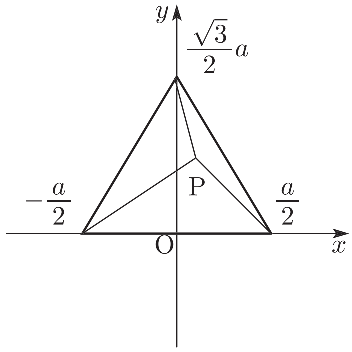
A$(0,b)$，B$(0,0)$，C$(a,0)$，D(a,b)，P(x,y)

とすると，



$$
\begin{aligned}
\mathrm{PA}^2+\mathrm{PC}^2 &= x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2\\
&= x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2\\
&= \mathrm{PB}^2+\mathrm{PD}^2 \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}
$$

【10】 右図のように $A\left(-\frac{a}{2},0\right)$, $B\left(\frac{a}{2},0\right)$, $C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $P(x,y)$ とすると,



$$AP^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2$$

$$BP^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2$$

$$CP^2=x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

だから

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=3x^2+\left(\sqrt{3}y-\frac{a}{2}\right)^2\geqq 0$$

よって示された.　　〔証明終〕

【11】

$$\begin{aligned}
x^2-y^2+4x-2y+3&=0\\
x^2+4x-y^2-2y+3&=0\\
x^2+4x-(y+3)(y-1)&=0\\
(x+y+3)\{x-(y-1)\}&=0\\
(x+y+3)(x-y+1)&=0
\end{aligned}$$

より，与式は 2 直線

$$\begin{cases} x+y+3=0 & \cdots ① \\ x-y+1=0 & \cdots ② \end{cases}$$

を表す．よって①＋②より

$$2x+4=0$$

$$\therefore\ x=-2$$

これと①より

$$y=-1$$

したがって，求める交点の座標は

$(\mathbf{-2},\mathbf{-1})$　　**(答)**

添削課題

【1】(1) 点 P の座標を (x, y) とすると

$$x = \frac{2 \times 3 + 3 \times (-2)}{3+2} = 0$$
$$y = \frac{2 \times 9 + 3 \times 4}{3+2} = 6$$

したがって，$\mathbf{P(0,\ 6)}$　　(答)

(2) 点 Q の座標を (x, y) とすると

$$x = \frac{-1 \times 3 + 2 \times (-2)}{2-1} = -7$$
$$y = \frac{-1 \times 9 + 2 \times 4}{2-1} = -1$$

したがって，$\mathbf{Q(-7,\ -1)}$　　(答)

(3) 点 R の座標を (x, y) とすると，点 C は 2 点 B，R の中点であるから

$$\frac{-2+x}{2} = 2, \qquad \frac{4+y}{2} = 1$$

よって，$x = 6$，$y = -2$
したがって，$\mathbf{R(6,\ -2)}$　　(答)

【2】(1) 求める直線は y 軸に平行ではないので，

$$y = \frac{3-(-3)}{1-(-2)}(x-1) + 3$$
$$\boldsymbol{y = 2x + 1} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) x 軸の正の向きとなす角が 60° より，求める直線の傾きは $\sqrt{3}$ である．
また，(3，6) を通るので

$$y = \sqrt{3}(x-3) + 6$$
$$\therefore\ \boldsymbol{y = \sqrt{3}x + 6 - 3\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める直線は $x + 5y + c = 0$　(ただし, c は定数) とおける．
また，点 (5，-3) を通るので，

$$5 + 5 \cdot (-3) + c = 0 \qquad \therefore c = 10$$

したがって

$$\boldsymbol{x + 5y + 10 = 0} \qquad \textbf{(答)}$$

【3】(1) 2 直線が一致するためには，平行であることが必要なので

$$\begin{aligned} 2k\cdot(-k)-(k+2)(k-1)&=0\\ -3k^2-k+2&=0\\ 3k^2+k-2&=0\\ (3k-2)(k+1)&=0\\ \therefore\ k&=\frac{2}{3},\ -1 \end{aligned}$$

ここで，$k=-1$ のとき，2 直線は，

$$\begin{cases} -2x-2y+1=0 \iff x+y+\dfrac{1}{2}=0\\ x+y+2=0 \end{cases}$$

となり一致しない.

また，$k=\dfrac{2}{3}$ のとき，2 直線は，

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}y+1=0 \iff 4x-y+3=0\\ \dfrac{8}{3}x-\dfrac{2}{3}y+2=0 \iff 4x-y+3=0 \end{cases}$$

より一致する.

以上より，$\boldsymbol{k=\dfrac{2}{3}}$ **(答)**

(2) (1) の議論より，$\boldsymbol{k=-1}$ **(答)**

(3) 2 直線が垂直であるので

$$\begin{aligned} 2k(k+2)+(k-1)(-k)&=0\\ k^2+5k&=0\\ k(k+5)&=0 \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{k=0,\ -5}$ (答)

【4】(1) C$(a,\ b)$ とすると，$l : y = \dfrac{1}{3}x + 1$ に対して，

AC $\perp$ l より，

$$\frac{b}{a+1}\cdot\frac{1}{3} = -1 \iff 3a + b = -3 \ \cdots ①$$

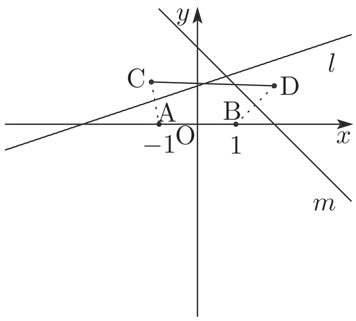
線分 AC の中点 $\left(\dfrac{a-1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ は l 上に存在するので，

$$\frac{a-1}{2} - 3\cdot\frac{b}{2} + 3 = 0 \iff a - 3b = -5 \ \cdots ②$$

①，② より，$(a,\ b) = \left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$ $\quad\therefore$ $\mathbf{C}\left(\boldsymbol{-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{6}{5}}\right)$ **(答)**

(2) B の m に関する対称点を D とすると，

PA $=$ PC, QB $=$ QD



より，AP+PQ+QB=CP+PQ+QD となる．
これが最小となるのは，CD と l，m との交点をそれぞれ P，Q としたときである．
D$(c,\ d)$ とすると，$m : y = -x + 2$ に対して，BD $\perp$ m より，$\dfrac{b}{a-1}\cdot(-1) = -1$

$$a - b = 1 \ \cdots ③$$

線分 BD の中点 $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ は，m 上に存在するので，

$$\frac{a+1}{2} + \frac{b}{2} = 2$$
$$a + b = 3 \ \cdots ④$$

③，④ より，$(a,\ b) = (2,\ 1)$ よって，D$(2,\ 1)$
これより，直線 CD の方程式は

$$y = \frac{1 - \frac{6}{5}}{2 - \left(-\frac{7}{5}\right)}(x-2) + 1$$
$$= -\frac{1}{17}x + \frac{19}{17} \qquad \therefore\ x + 17y = 19$$

これと l との交点は $\begin{cases} x + 17y = 19 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$ より，$(x,\ y) = \left(\dfrac{3}{10},\ \dfrac{11}{10}\right)$

m との交点は $\begin{cases} x + 17y = 19 \\ x + y = 2 \end{cases}$ より，$(x,\ y) = \left(\dfrac{15}{16},\ \dfrac{17}{16}\right)$

よって，$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{10},\ \dfrac{11}{10}}\right)$，$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\dfrac{15}{16},\ \dfrac{17}{16}}\right)$ **(答)**

２章　図形と方程式（２）

問題

【1】(1) 求める長さを d とすると

$$d = \frac{|2 \times (-2) - 3 \times 1 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \boldsymbol{\sqrt{13}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 求める長さを d とすると

$$d = \frac{|2 \times (-4) - 1 \times (-3) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{9\sqrt{5}}{5}} \qquad \textbf{(答)}$$

【2】平行な 2 直線間の距離は, 一方の直線上の点から他方の直線に引いた垂線の長さに等しい. $2x - 3y - 2 = 0$ 上の点 $(1, 0)$ から, $2x - 3y + 6 = 0$ までの距離は,

$$\frac{|2 \times 1 - 3 \times 0 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{8\sqrt{13}}{13}} \qquad \textbf{(答)}$$

【3】

$$(2k+1)x - (k-2)y + 7k - 4 = 0 \quad \cdots ①$$

k について整理すると,

$$x + 2y - 4 + k(2x - y + 7) = 0$$

k がどのような値をとっても成り立つので, k についての恒等式と考えると,

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

これを解くと, $x = -2$, $y = 3$.

このとき, ① はつねに成り立つ.

よって, 定点 $(-2,\ 3)$ を通ること, つまり題意は示された.　　〔証明終〕

＜注＞
① は, 2 直線 $x + 2y - 4 = 0$, $2x - y + 7 = 0$ の交点, つまり, $(-2, 3)$ を通る直線を表している.

【4】直線 $x-2y-2=0$ は，点 $(6,-4)$ を通らないので，求める直線は,

$$4x+3y+12+k(x-2y-2)=0$$

とおける.

点 $(6,-4)$ を通ることによって,

$$\begin{aligned} 4\times 6+3\times(-4)+12+k\{6-2\times(-4)-2\}&=0 \\ 24+12k&=0 \\ \therefore\ k&=-2 \end{aligned}$$

したがって,

$$4x+3y+12-2(x-2y-2)=0$$

整理して,

$$\boldsymbol{2x+7y+16=0} \qquad \text{(答)}$$

<注>

2 直線 $4x+3y+12=0$ と $x-2y-2=0$ の交点を求めると,

$$\left(-\frac{18}{11},-\frac{20}{11}\right)$$

この点と, $(6,-4)$ の 2 点を通る直線としてもできるが, この場合計算がかなり手間である.

【5】$\mathrm{A}(2,5)$，$\mathrm{B}(-4,-1)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=x+3 \\ \therefore\ x-y+3&=0 \end{aligned}$$

であり，これと $\mathrm{C}(6,-3)$ との距離 d は

$$d=\frac{|6-(-3)+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad d=6\sqrt{2}$$

そして，AB の長さは

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\{2-(-4)\}^2+\{5-(-1)\}^2}=6\sqrt{2}$$

だから，AB を底辺とし，d を高さとすると，求める面積は

$$\frac{1}{2}d\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=\mathbf{36} \qquad \text{(答)}$$

【6】①, ② の交点 A の座標を求めると, A(1, 5)
②, ③ の交点 B の座標を求めると, B(5, −1)
③, ① の交点 C の座標を求めると, C(−3, −3)
よって,

$$\mathrm{BC} = \sqrt{(5-(-3))^2 + (-1-(-3))^2} = 2\sqrt{17}$$

さらに，A と BC の距離 d は，A と直線 ③ の距離であるから

$$d = \frac{|1\cdot 1 + 5\cdot(-4) - 9|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{28}{\sqrt{17}}$$

よって,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot\frac{28}{\sqrt{17}} = \mathbf{28} \quad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

【7】求める直線は原点を通るので,

$$y = mx \quad \cdots ①$$

とおける.

① 上の点を $\mathrm{P}(k,\ mk)\quad (k \fallingdotseq 0)$ とすると, ① は $y = x$ と $y = 3x$ のなす角の 2 等分線であるから, P から 2 直線に引いた垂線の足をそれぞれ H, K とすると,

$$\mathrm{PH} = \mathrm{PK}$$

ここで, $y = x$ より, $x - y = 0$ だから,

$$\mathrm{PH} = \frac{|k - mk|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k||1-m|}{\sqrt{2}}$$

また, $y = 3x$ より, $3x - y = 0$ だから,

$$\mathrm{PK} = \frac{|3k - mk|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|k||3-m|}{\sqrt{10}}$$

したがって,

$$\begin{aligned}\frac{|k||1-m|}{\sqrt{2}} &= \frac{|k||3-m|}{\sqrt{10}}\\ \sqrt{5}|1-m| &= |3-m|\\ \therefore\ 5(1-m)^2 &= (3-m)^2\end{aligned}$$

整理して,

$$\begin{aligned}&m^2 - m - 1 = 0\\ \therefore\quad &m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

よって,

$$\boldsymbol{y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x} \qquad \text{(答)}$$

【8】点 P と直線 AB との距離を d とすると,

$$\triangle\mathrm{ABP} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times d$$

ここで, AB は一定であるから, $\triangle$ABP の面積が最小となるには d を最小にすればよい.

点 P の x 座標を t とおくと, $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ で, さらに, 直線 AB の方程式は

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

つまり, $2x - y - 4 = 0$ であるから,

$$d = \frac{|2t - t^2 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|t^2 - 2t + 4|}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{|(t-1)^2 + 3|}{\sqrt{5}}$$

したがって, $t = 1$ のとき, d は最小となる.
よって, 求める点 P の座標は,

$$\mathbf{P(1, 1)} \qquad \text{(答)}$$

また, そのときの $\triangle$ABP の面積 S は,

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

より,

$$S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \mathbf{3} \qquad \text{(答)}$$

＜別解＞

直線 AB : $y = 2x - 4$ に平行な直線 $y = 2x + k$ が放物線 $y = x^2$ と接するとき, 方程式

$$x^2 = 2x + k \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - k = 0$$

は重解をもつので, 判別式を D とすると,

$$D/4 = (-1)^2 - 1 \times (-k) = 0 \qquad \therefore\ k = -1$$

このとき, 接点の座標が求める点 P の座標となり,

$$x^2 = 2x - 1 \qquad \therefore\ x = 1$$

よって，$\mathbf{P(1,1)}$　　(答)

また, そのときの $\triangle$ABP の面積は,

$$S = 10 - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 4\right) = \mathbf{3} \qquad (答)$$

【9】AB を底辺とみると $\triangle$PAB が最小となるのは点 P と直線 AB との距離 d が最小となるときである．ここで

$$y = x^2 + 4x + 11$$

より P の x 座標を p とすると

$$\mathrm{P}(p,\ p^2 + 4p + 11)$$

と表せる．そして，直線 AB の方程式は

$$y = 2x - 1$$
$$\therefore 2x - y - 1 = 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|2p - (p^2 + 4p + 11) - 1\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\left|-p^2 - 2p - 12\right|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left|-(p+1)^2 - 11\right|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(p+1)^2 + 11}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

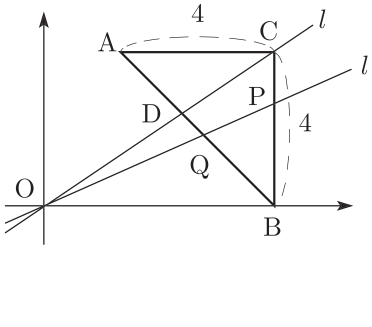
であり，この最小値は $p = -1$ のとき，$\dfrac{11}{\sqrt{5}}$ である．よって，$\triangle$PAB の面積の最小値は，AB=$\sqrt{5}$ より

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{11}{\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{11}{2}} \qquad (答)$$

【10】A(2，4)，B(6，0)，C(6，4) とすると,

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

である．原点を通る直線の方程式を l とする．直線 l が C を通過するときの辺 AB と直線 l との交点を D とすると



$$\triangle\mathrm{ADC} < \triangle\mathrm{DBC}$$

であるから，直線 l が $\triangle$ABC を二等分するとき，l は BC と交わり，その交点を P とすると，点 P の座標は

$$(6,\, m) \qquad (\text{ただし}, 0 \leqq m \leqq 4)$$

とおける．このとき，l の方程式は

$$y = \frac{m}{6}x$$

である．また，直線 AB の方程式は

$$y - 0 = \frac{0-4}{6-2}(x-6) \qquad \therefore\ y = -x + 6$$

であるから，辺 AB と l との交点を Q とし，$m \fallingdotseq -6$ であることに注意して，その座標は

$$\left(\frac{36}{m+6},\ \frac{6m}{m+6}\right)$$

となる．したがって，$\triangle$PQB の面積は

$$\frac{1}{2} \times m \times \left(6 - \frac{36}{m+6}\right) = \frac{3m^2}{m+6}$$

と表され，これが，$\triangle$ABC の面積の半分に等しいことから

$$\frac{3m^2}{m+6} = 4 \qquad \therefore\ 3m^2 - 4m - 24 = 0$$

$$\therefore\ m = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 3 \times 24}}{3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{19}}{3}$$

ここで，$0 \leqq m \leqq 4$ であるから，題意に適する m の値は

$$m = \frac{2 + 2\sqrt{19}}{3}$$

である．

したがって，求める直線の方程式は

$$y = \frac{1}{6} \times \frac{2 + 2\sqrt{19}}{3}x$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y = \frac{1+\sqrt{19}}{9}x} \qquad (\text{答})$$

添削課題

【1】(1) 点 $(4,\ 4)$ と直線 $x-3y+3=0$ との距離を求めればよいから

$$\frac{|4-3\times4+3|}{\sqrt{1+9}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}}\qquad(\text{答})$$

(2) 点 $(1,\ 2)$ と直線 $x-3y+3=0$ との距離を求めればよいから

$$\frac{|1-3\times2+3|}{\sqrt{1+9}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{5}}\qquad(\text{答})$$

【2】(1) 与えられた直線の式を k について整理すると

$$4x+y-8+k(3x+5y-6)=0$$

これを k についての恒等式とみると

$$\begin{cases}4x+y-8=0 & \cdots\cdots① \\ 3x+5y-6=0 & \cdots\cdots②\end{cases}$$

① より

$$y=-4x+8\quad\cdots\cdots①'$$

①′ を ② に代入して

$$3x+5(-4x+8)-6=0\qquad\therefore\ x=2$$

この x の値を ①′ に代入して

$$y=-4\cdot2+8=0$$

よって，求める定点の座標は，**(2, 0)**　(答)

(2) $2x+5y+1=0$ は $(-1,5)$ を通らないので，求める直線の方程式は

$$2x-3y+5+k(2x+5y+1)=0$$

とおける．これが，$(-1,5)$ を通ることから

$$-2-15+5+k(-2+25+1)=0\qquad\therefore\ k=\frac{1}{2}$$

よって，求める直線の方程式は

$$2x-3y+5+\frac{1}{2}(2x+5y+1)=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{6x-y+11=0}\qquad(\text{答})$$

(3) $2x+3y-1=0$ は $4x-y+2=0$ に垂直ではないので，求める直線の方程式は

$$4x+y+3+k(2x+3y-1)=0$$

すなわち

$$(4+2k)x+(1+3k)y+3-k=0$$

とおける．これが，$4x-y+2=0$ に垂直であるから

$$4\cdot(4+2k)+(-1)\cdot(1+3k)=0$$

$$\therefore\ 5k=-15\qquad\therefore\ k=-3$$

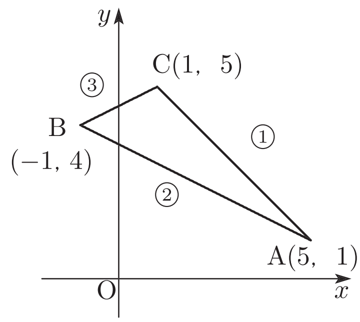
よって，求める直線の方程式は

$$4x+y+3-3(2x+3y-1)=0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x+4y-3=0}\qquad(\text{答})$$

【3】与えられた3直線

$$x+y-6=0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x+2y-7=0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$x-2y+9=0 \quad \cdots\cdots ③$$



について

①，② の交点 A の座標は，(5, 1)

②，③ の交点 B の座標は，(−1, 4)

したがって

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-5)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{5}$$

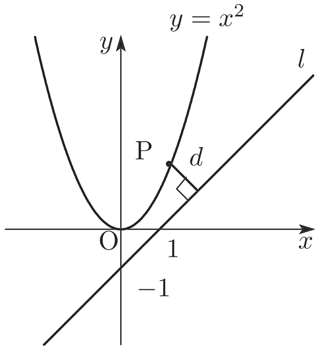
また，①，③ の交点 C は (1, 5) であり，点 C から直線 AB（すなわち ②）までの距離は

$$\frac{|1+2\cdot 5-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

よって，求める三角形の面積は

$$3\sqrt{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{6} \qquad \text{(答)}$$

【4】放物線 $y=x^2$ 上の点 P の座標を $(t,\ t^2)$ とおく．P と l との距離を d とすると



$$d=\frac{|t-t^2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|t^2-t+1|}{\sqrt{2}}$$

ここで

$$t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

はつねに正であるから，$t=\dfrac{1}{2}$ のときに d は最小となる．

よって，求める点 P の座標は

$$\left(\mathbf{\frac{1}{2}},\mathbf{\frac{1}{4}}\right) \qquad \text{(答)}$$

また，このときの P と l との距離は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4}=\mathbf{\frac{3}{8}\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) $\{x-(-1)\}^2+(y-3)^2=2^2$.

よって,

$$(\boldsymbol{x+1})^{\boldsymbol{2}}+(\boldsymbol{y-3})^{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{4} \qquad \text{(答)}$$

(2) 半径を r とすると, $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$. 点 $(-1,5)$ を通るので,

$$(-1-2)^2+(5-1)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=25$$

よって,

$$(\boldsymbol{x-2})^{\boldsymbol{2}}+(\boldsymbol{y-1})^{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{25} \qquad \text{(答)}$$

(3) 円の中心は, 線分 AB の中点だから,

$$\left(\frac{-5+7}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right)=(1,0)$$

半径は, 中心 $(1,0)$ と $\mathrm{A}(-5,2)$ の距離だから,

$$\sqrt{\{1-(-5)\}^2+(0-2)^2}=\sqrt{40}$$

したがって,

$$(\boldsymbol{x-1})^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{40} \qquad \text{(答)}$$

(4) 題意より求める円の半径は 2 だから

$$(\boldsymbol{x-3})^{\boldsymbol{2}}+(\boldsymbol{y+2})^{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{4} \qquad \text{(答)}$$

(5) x 軸および y 軸に接することから, 円の中心は両座標軸から等距離にある. すなわち円の中心は直線 $y=x$ または $y=-x$ 上にある.

ここで, 直線 $y=x$ と $y=x-1$ の交点は存在せず,$y=-x$ と $y=x-1$ の交点の座標は,

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

だから, これが求める円の中心に他ならず, 求める円の方程式は,

$$\left(\boldsymbol{x-\frac{1}{2}}\right)^{\boldsymbol{2}}+\left(\boldsymbol{y+\frac{1}{2}}\right)^{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(6) 題意より求める円の半径は原点と $x-2y+4=0$ の距離 d に等しい．よって

$$d=\frac{|0-2\cdot 0+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

より

$$\boldsymbol{x^2+y^2=\frac{16}{5}} \qquad \text{(答)}$$

(7) 中心は直線 $y=x-5$ 上にあるから，中心の x 座標を t とすると，中心 C の座標 は

$$\mathrm{C}(t, t-5)$$

と表せる．そして題意より原点との距離は $(2,1)$ と C との距離に等しいから

$$\sqrt{t^2+(t-5)^2}=\sqrt{(t-2)^2+(t-5-1)^2}$$

両辺 2 乗して

$$t^2+t^2-10t+25=t^2-4t+4+t^2-12t+36$$

$$\therefore \quad t=\frac{5}{2} \qquad\qquad \therefore \quad \mathrm{C}\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$$

であり，半径は

$$\sqrt{t^2+(t-5)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

したがって，

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-4x+2y+1=0 \\ \Longleftrightarrow & x^2-4x+4+y^2+2y+1-4=0 \\ \Longleftrightarrow & (x-2)^2+(y+1)^2=2^2 \end{aligned}$$

したがって,

中心 $(2,-1)$, 半径 2 の円 (答)

(2) 3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めればよいから, 求める方程式は, $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおける. 点 A を通ることより,

$$9+1+3l+m+n=0$$

整理して,

$$3l+m+n=-10 \quad \cdots\cdots ①$$

点 B を通ることより,

$$1+49-l+7m+n=0$$

整理して,

$$-l+7m+n=-50 \quad \cdots\cdots ②$$

点 C を通ることより,

$$4+16+2l-4m+n=0$$

整理して,

$$2l-4m+n=-20 \quad \cdots\cdots ③$$

①, ②, ③ より, $l=10$, $m=0$, $n=-40$.
よって,

$$\boldsymbol{x^2+y^2+10x-40=0} \quad \text{(答)}$$

(注)
平方完成すると

$$(x+5)^2+y^2=65$$

より, 中心 $(-5,0)$, 半径 $\sqrt{65}$ の円を表している.

【3】与えられた円の方程式を a について整理すると,

$$-2(3x-y-10)a+x^2+y^2-10=0$$

これが a の値にかかわらず, 常に成り立つためには,

$$\begin{cases} 3x-y-10=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-10=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

であればよい. ① より, $y=3x-10$ であるから, ② に代入して,

$$\begin{aligned} x^2+(3x-10)^2-10&=0 \\ 10x^2-60x+90&=0 \\ x^2-6x+9&=0 \\ (x-3)^2&=0 \\ \therefore\ x&=3 \end{aligned}$$

これを ① に代入して,

$$y=3\times 3-10=-1$$

逆にこのとき, 与えられた円の方程式はすべての a の値に対して成り立つ.

以上より, 求める定点の座標は,

(3, − 1) (答)

であり, 題意は示された. 〔証明終〕

(注)

与えられた円の方程式を標準形にすると,

$$(x-3a)^2+(y+a)^2=10(a-1)^2$$

となるので, これが円であるためには $a \fallingdotseq 1$ でなければならないが, $a=1$ のとき, この方程式は

$$(x-3)^2+(y+1)^2=0$$

となり, この方程式の解が $x=3,\ y=-1$ であるので, $a=1$ の場合も題意をみたすことがわかる.

【4】(1) ②は

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$$

と変形できる．

よって①は

中心 $\mathrm{A}(0,0)$,　　半径 $\sqrt{5}$

の円であり，②は

中心 $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$,　　半径 $\frac{\sqrt{26}}{2}$

の円である．そして中心間の距離は

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

であり，2 円の半径の和および差の絶対値

$$\sqrt{5}+\frac{\sqrt{26}}{2}=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{26}}{2},\quad \frac{\sqrt{26}}{2}-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{26}-2\sqrt{5}}{2}$$

と比べると

$$\frac{\sqrt{26}-2\sqrt{5}}{2}<\frac{\sqrt{10}}{2}<\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{26}}{2}$$

だから，2 円は 2 点で交わる．　　〔証明終〕

(2) 求める直線は

$$x^2+y^2-3x-y-4+(-1)(x^2+y^2-5)=0$$

と表せる．よって

$\boldsymbol{3x+y-1=0}$　　(答)

(3) 題意をみたす図形は k を定数として

$$x^2+y^2-3x-y-4+k(x^2+y^2-5)=0 \quad \cdots\cdots①$$

と表せる．これが原点を通るから

$$-4-5k=0 \qquad \therefore\quad k=-\frac{4}{5}$$

これを①に代入して整理すると

$\boldsymbol{x^2+y^2-15x-5y=0}$　　(答)

【5】(1) $y=x-2$ を $x^2+y^2=4$ に代入して,

$$x^2+(x-2)^2=4$$

整理して, $x^2-2x=0$. よって, $x(x-2)=0$ より, $x=0,2$.
それぞれ直線の式に代入して, y 座標を求めると,

$$x=0 \text{ のとき } y=-2,\ x=2 \text{ のとき } y=0$$

以上より,

異なる 2 点 $(0,-2),(2,0)$ で交わる. (答)

(2) $x-y+1=0$ より $y=x+1$.
これを $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ に代入して,

$$(x-1)^2+(x+3)^2=5$$

整理して,

$$2x^2+4x+5=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$D=4^2-4\times2\times5=-24<0$$

よって, この 2 次方程式は解をもたないので, 円と直線は,

共有点をもたない. (答)

(3) $x+3y-12=0$ より, $x=12-3y$.
これを $x^2+y^2+2x-2y-8=0$ に代入して,

$$(12-3y)^2+y^2+2(12-3y)-2y-8=0$$

整理して,

$$y^2-8y+16=0$$

より,

$$(y-4)^2=0 \qquad \therefore y=4$$

このとき, $x=12-3\times4=0$ だから,

点 $(0,4)$ で接する. (答)

(4) $y=x+k$ を $x^2+y^2=1$ に代入して,

$$x^2+(x+k)^2=1$$

整理して,

$$2x^2+2kx+k^2-1=0 \qquad \therefore x=\frac{-k\pm\sqrt{2-k^2}}{2}$$

$y=x+k$ より

$$y=\frac{k\pm\sqrt{2-k^2}}{2} \quad (\text{複号同順})$$

よって

$$\begin{cases} k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k \text{ のとき} & \textbf{共有点をもたない.} \\ k=\sqrt{2} \text{ のとき} & \textbf{点} \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \textbf{で接する.} \\ k=-\sqrt{2} \text{ のとき} & \textbf{点} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \textbf{で接する.} \\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \text{ のとき} & \textbf{異なる 2 点で交わり, 共有点の座標は} \\ & \boldsymbol{\left(\dfrac{-k\pm\sqrt{2-k^2}}{2},\ \dfrac{k\pm\sqrt{2-k^2}}{2}\right)} \quad \textbf{(複号同順)} \end{cases}$$

(答)

(5) $y=kx+3$ を $x^2+(y-1)^2=1$ に代入して,

$$x^2+(kx+2)^2=1$$

整理して,

$$(k^2+1)x^2+4kx+3=0 \qquad \therefore x=\frac{-2k\pm\sqrt{k^2-3}}{k^2+1}$$

$y=kx+3$ より

$$y=\frac{k^2+3\pm k\sqrt{k^2-3}}{k^2+1} \quad (\text{複号同順})$$

よって

$$\begin{cases} -\sqrt{3}<k<\sqrt{3} \text{ のとき} & \textbf{共有点をもたない.} \\ k=\sqrt{3} \text{ のとき} & \textbf{点} \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right) \textbf{で接する.} \\ k=-\sqrt{3} \text{ のとき} & \textbf{点} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right) \textbf{で接する.} \\ k<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<k \text{ のとき} & \textbf{異なる 2 点で交わり, 共有点の座標は} \\ & \boldsymbol{\left(\dfrac{-2k\pm\sqrt{k^2-3}}{k^2+1},\ \dfrac{k^2+3\pm k\sqrt{k^2-3}}{k^2+1}\right)} \\ & \textbf{(複号同順)} \end{cases}$$

(答)

【6】(1) 原点から $y=x+1$ に下ろした垂線の足を H とし，$y=x+1$ と $x^2+y^2=9$ の交点のうち，x 座標の大きい方を A とすると，3 平方の定理より

$$\mathrm{AH}^2=\mathrm{OA}^2-\mathrm{OH}^2$$

ここで

$$\mathrm{OA}=3,\quad \mathrm{OH}=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

だから

$$\mathrm{AH}=\sqrt{3^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{2}}$$

求める長さは 2AH に等しいから

$$2\mathrm{AH}=2\sqrt{\frac{17}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{34}}\qquad \text{(答)}$$

(2) 原点から $y=x+1$ に下ろした垂線の足を H とし，$y=x+1$ と $x^2+y^2=a^2$ の交点のうち x 座標の大きい方を A とすると，3 平方の定理より

$$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{AH}^2\quad\cdots\cdots①$$

ここで

$$\mathrm{OA}=a,\quad \mathrm{OH}=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{AH}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

だから①より

$$\begin{aligned}a^2&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\\&=4\end{aligned}$$

$a>0$ より

$$\boldsymbol{a=2}\qquad \text{(答)}$$

【7】(1) 円上の点 (2, 4) を通ることから，求める直線を，

$$y = m(x-2)+4 = mx+(4-2m)\ (m<0)$$

とおき，円の中心（原点）と直線（接線）の距離は円の半径 $2\sqrt{5}$ に等しいので，

$$\frac{|-2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{5}$$

これを解くと

$$|-2m+4| = 2\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$$
$$(-2m+4)^2 = 20(m^2+1)$$
$$\therefore 4m^2+4m+1=0$$
$$\therefore m = -\frac{1}{2}$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y-4 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

すなわち，

$$\boldsymbol{x+2y=10} \qquad (\text{答})$$

(2) 円上の点 (−3, −1) を通ることから，求める直線を，

$$y = m(x+3)-1 = mx+(3m-1)\ (m<0)$$

とおき，円の中心 (1, 2) と直線（接線）の距離は円の半径 5 に等しいので，

$$\frac{|m-2+3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 5 \qquad \therefore \frac{|4m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$$

これを解くと

$$|4m-3| = 5\sqrt{m^2+1}$$
$$(4m-3)^2 = 25(m^2+1)$$
$$\therefore 9m^2+24m+16=0$$
$$\therefore m = -\frac{4}{3}$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y+1 = -\frac{4}{3}(x+3)$$

すなわち，

$$\boldsymbol{4x+3y=-15} \qquad (\text{答})$$

(3) 求める接線の方程式を $y=2x+n$，すなわち，$2x-y+n=0$ とおくと，$x^2+y^2=3$ と接することより，

$$\frac{|n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$$

$\therefore |n|=\sqrt{15}$ $\qquad$ $\therefore n=\pm\sqrt{15}$

したがって，接線の方程式は，

$\boldsymbol{y=2x\pm\sqrt{15}}$ (答)

(4) 求める接線は点 $(-2,\ 4)$ を通り，直線 $x=-2$ は円の接線でないことから，求める直線を，

$$y=m(x+2)+4=mx+(2m+4)$$

とおき，円の中心（原点）と直線（接線）の距離は円の半径 $\sqrt{10}$ に等しいので，

$$\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

これを解く．

$$|2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$$
$$(2m+4)^2=10(m^2+1)$$
$$\therefore 3m^2-8m-3=0$$
$$\therefore m=-\frac{1}{3},\ 3$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3},\ y=3x+10$$

すなわち，

$\boldsymbol{x+3y=10,\ 3x-y=-10}$ (答)

(5) 求める接線は原点を通り，直線 $x=0$ は円の接線でないことから，求める直線を，

$$y = mx$$

とおき，円の中心 $(3, 1)$ と直線（接線）の距離は円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいので，

$$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

これを解く．

$$|3m-1| = \sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$
$$(3m-1)^2 = 2(m^2+1)$$
$$\therefore 7m^2-6m-1=0$$
$$\therefore m = -\frac{1}{7},\ 1$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{7}x,\ y = x$$

すなわち，

$$\boldsymbol{x+7y=0,\ x-y=0} \qquad \text{(答)}$$

【8】△ABC の重心の座標は,

$$\left(\frac{-3+1+3}{3}, \frac{0+4+0}{3}\right) = \left(\boldsymbol{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}}\right) \qquad (答)$$

また，垂心は各頂点から各辺へ下ろした垂線同士の交点である．ここで，B から AC に下ろした垂線の方程式は,

$$x = 1 \cdots\cdots ①$$

C から AB に下ろした垂線の方程式は，直線 AB の傾きが 1 であることから

$$y = -(x-3) \qquad \therefore y = -x+3 \cdots\cdots ②$$

①，② の交点が △ABC の垂心に他ならないので，①，② より,

$$y = 2$$

よって，求める座標は,

$$(\mathbf{1, 2}) \qquad (答)$$

また, △ABC の外心を $\mathrm{P}(x, y)$ とおくと, $\mathrm{PA} = \mathrm{PB} = \mathrm{PC}$ より,

$$(x+3)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-3)^2 + y^2$$

すなわち,

$$\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 \\ (x+3)^2 + y^2 = (x-3)^2 + y^2 \end{cases}$$

それぞれ整理して,

$$\begin{cases} 8x + 8y - 8 = 0 \\ 12x = 0 \end{cases}$$

これを解いて,

$$x = 0,\ y = 1$$

したがって,

$$\mathrm{P}(\mathbf{0, 1}) \qquad (答)$$

【9】内接円の中心を D$(a,\, b)$ とし，A，B を通る直線を l，B，C を通る直線を m，C，A を通る直線を n とする．$l,\, m,\, n$ の方程式はそれぞれ

$$l : y = \frac{3}{4}x + 12 \qquad \therefore 3x - 4y + 48 = 0$$
$$m : y = -\frac{4}{3}x + 12 \qquad \therefore 4x + 3y - 36 = 0$$
$$n : y = 0$$

であり，D から $l,\, m,\, n$ への距離は等しいから，

$$\frac{|3a - 4b + 48|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = |b| \qquad \therefore |3a - 4b + 48| = 5|b| \cdots\cdots ①$$
$$\frac{|4a + 3b - 36|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = |b| \qquad \therefore |4a + 3b - 36| = 5|b| \cdots\cdots ②$$

ここで ①，② の絶対値をはずすと

$$\begin{cases} 3a - 4b + 48 = 5b \\ 4a + 3b - 36 = 5b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - 4b + 48 = 5b \\ -4a - 3b + 36 = 5b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a + 4b - 48 = 5b \\ 4a + 3b - 36 = 5b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a + 4b - 48 = 5b \\ -4a - 3b + 36 = 5b \end{cases}$$

の 4 通りあり，これらよりそれぞれ，$(a,\, b)$ の組は

$$(14,\, 10),\ (-1,\, 5),\ (-6,\, -30),\ (-21,\, 15)$$

となるが，3 角形の内接円の中心は，その 3 角形の中にあるから，このうち題意をみたすのは

D$\mathbf{(-1,\, 5)}$　　(答)

添削課題

【1】(1) 直径の両端が $(-3,2)$，$(4,\ 6)$ であるから，求める円の中心，半径は

中心：$\left(\dfrac{-3+4}{2},\ \dfrac{2+6}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\ 4\right)$

半径：$\sqrt{\left(4-\dfrac{1}{2}\right)^2+(6-4)^2}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$

以上より，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-4)^2=\frac{65}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 中心が $(-2,3)$ で y 軸に接するから，半径は 2 である．

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-3)^2=4} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおくと

$(-3,-3)$ を通るので

$$9+9-3l-3m+n=0 \qquad \therefore 3l+3m-n=18 \quad \cdots\cdots ①$$

$(5,1)$ を通るので

$$25+1+5l+m+n=0 \qquad \therefore 5l+m+n=-26 \quad \cdots\cdots ②$$

$(-2,0)$ を通るので

$$4-2l+n=0 \qquad \therefore 2l-n=4 \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③ を解くと

$$l=-4,\ m=6,\ n=-12$$

したがって，　$\boldsymbol{x^2+y^2-4x+6y-12=0}$　(答)

【2】(1) $$x^2+y^2-4x=5$$
を標準形にすると
$$(x-2)^2+y^2=9$$
したがって，中心 $(2,\ 0)$，半径 $r=3$ の円である．
円の中心 $(2,\ 0)$ と直線 $4x-3y+7=0$ の距離 d は
$$d=\frac{|8-0+7|}{\sqrt{16+9}}=3$$
これより，$d=r$ であることから，**接する**　　(答)

(2) $$\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=8\\ y=x+k\end{cases}$$
より，y を消去して
$$(x+1)^2+(x+k-1)^2=8$$
これを整理して
$$2x^2+2kx+k^2-2k-6=0 \quad \cdots\cdots ①$$
2 次方程式 ① の判別式を D とすると
$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-2k-6)=-(k+2)(k-6)$$
(i) $D>0$ のとき，すなわち，$-2<k<6$ のとき，2 点で交わる．
(ii) $D=0$ のとき，すなわち，$k=-2, 6$ のとき，接する．
(iii) $D<0$ のとき，すなわち，$k<-2, k>6$ のとき，共有点を持たない．
したがって
$$\begin{cases}\boldsymbol{-2<k<6}\ \text{のとき, 2 点で交わる}\\ \boldsymbol{k=-2, 6}\ \text{のとき，接する}\\ \boldsymbol{k<-2, k>6}\ \text{のとき，共有点を持たない}\end{cases}$$
(答)

【3】(1) 原点をOとすると，OPの傾きは $\dfrac{2}{3}$

よって，求める接線の傾きを m とすると

$$\frac{2}{3}\cdot m=-1 \qquad \therefore m=-\frac{3}{2}$$

求める直線は点(3，2)を通り，傾き $-\dfrac{3}{2}$ の直線であるので

$$y-2=-\frac{3}{2}(x-3)$$

これを整理すると

$$\boldsymbol{3x+2y-13=0} \qquad \text{(答)}$$

(2) $$x^2+y^2-4x-6y-12=0$$

を標準形にすると

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

したがって，円の中心Cの座標は(2，3)であるから，CPの傾きは

$$\frac{3-7}{2-(-1)}=-\frac{4}{3}$$

よって，求める接線の傾きを m とすると

$$m\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-1 \qquad \therefore m=\frac{3}{4}$$

求める直線は点P(−1, 7)を通り，傾きが $\dfrac{3}{4}$ の直線であるので

$$y-7=\frac{3}{4}(x+1)$$

これを整理すると

$$\boldsymbol{3x-4y+31=0} \qquad \text{(答)}$$

【4】求める直線は，点(2, 3)を通る．ここで，直線 $x=2$ は円の接線になる．

また，もう一本の接線の方程式を $y=m(x-2)+3=mx-2m+3 \ \cdots(*)$ とおくと，

円の中心と直線の距離は円の半径2に等しいので，

$$\frac{|-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$|-2m+3|=2\sqrt{m^2+1}$$

$$(-2m+3)^2=4(m^2+1)$$

$$\therefore m=\frac{5}{12}$$

$(*)$ に代入して，$y=\dfrac{5}{12}x+\dfrac{13}{6}$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{x=2,\ y=\frac{5}{12}x+\frac{13}{6}} \quad \text{(答)}$$

M1JS/M1J
高 1 選抜東大数学
高 1 東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	