本科 1 期 4 月度

解答

Z会東大進学教室

高 1 難関大数学 K

問題

【1】(1) $(x+2y)^2 = \boldsymbol{x^2 + 4xy + 4y^2}$ (答)

(2) $$(2x+y)(2x-3y) = 2x(2x-3y) + y(2x-3y)$$
$$= \boldsymbol{4x^2 - 4xy - 3y^2} \quad \text{(答)}$$

(3) $(a-b+c)^2 = \boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca}$ (答)

(4) $(x-2y-z)^2 = \boldsymbol{x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 4yz - 2zx}$ (答)

(5) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2) = \boldsymbol{x^3 - 8y^3}$ (答)

(6) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2) = \boldsymbol{27a^3 - 8b^3}$ (答)

(7) $$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

であるから，

$$(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = (a^3-b^3)(a^3+b^3)$$
$$= \boldsymbol{a^6 - b^6} \quad \text{(答)}$$

(8) $(2x-3y)^3 = \boldsymbol{8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3}$ (答)

【2】(1) $4x^4 - 8x^3 + 6x^2 = \boldsymbol{2x^2(2x^2 - 4x + 3)}$ (答)

(2) $9a^2b^2c - 12abc^2 + 3abc = \boldsymbol{3abc(3ab - 4c + 1)}$ (答)

(3) $4x^2 - 4x + 1 = \boldsymbol{(2x-1)^2}$ (答)

(4) $x^2 - 12xy + 36y^2 = \boldsymbol{(x-6y)^2}$ (答)

(5) $25a^2 + 20ab + 4b^2 = \boldsymbol{(5a+2b)^2}$ (答)

(6) $$9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2$$
$$= \boldsymbol{(3x-4y)(3x+4y)} \quad \text{(答)}$$

(7) $$8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3$$
$$= \boldsymbol{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)} \quad \text{(答)}$$

(8) $27a^3 - 64b^3 = \boldsymbol{(3a-4b)(9a^2 + 12ab + 16b^2)}$ (答)

(9) $$8a^3 - 12a^2 + 6a - 1 = (2a)^3 - 3\cdot(2a)^2\cdot 1 + 3\cdot(2a)\cdot 1^2 - 1^3$$
$$= \boldsymbol{(2a-1)^3} \quad \text{(答)}$$

(10) $$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2$$
$$= (x^2-4)(x^2+4)$$
$$= \boldsymbol{(x-2)(x+2)(x^2+4)} \quad \text{(答)}$$

(11) $$x^4 + 8x^2 - 48 = (x^2 - 4)(x^2 + 12)$$
$$= \mathbf{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 12)} \quad (答)$$

(12) $$x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$$
$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$= \mathbf{(x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)} \quad (答)$$

【3】(1) $2x^2 + 3x + 1 = \mathbf{(2x + 1)(x + 1)}$ (答)

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 1 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & & 1 & \longrightarrow & 2 \\ \hline & & & & 3 \end{array}$$

(2) $2x^2 + 9x - 5 = \mathbf{(x + 5)(2x - 1)}$ (答)

$$\begin{array}{ccccr} 1 & \times & 5 & \longrightarrow & 10 \\ 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline & & & & 9 \end{array}$$

(3) $4x^2 - 4x - 3 = \mathbf{(2x + 1)(2x - 3)}$ (答)

$$\begin{array}{ccccr} 2 & \times & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & & -3 & \longrightarrow & -6 \\ \hline & & & & -4 \end{array}$$

(4) $8x^2 - 7xy - 18y^2 = \mathbf{(x - 2y)(8x + 9y)}$ (答)

$$\begin{array}{ccccr} 1 & \times & -2y & \longrightarrow & -16y \\ 8 & & 9y & \longrightarrow & 9y \\ \hline & & & & -7y \end{array}$$

(5) $$8a^2 - 50b^2 = 2(4a^2 - 25b^2)$$
$$= \mathbf{2(2a - 5b)(2a + 5b)} \quad (答)$$

(6) $$3x^3 - 6x^2 - 45x = 3x(x^2 - 2x - 15)$$
$$= \mathbf{3x(x - 5)(x + 3)} \quad (答)$$

【4】(1)
$$\begin{aligned} x^2+y^2+2xy+x+y &= x^2+2xy+y^2+x+y \\ &= (x+y)^2+(x+y) \\ &= \boldsymbol{(x+y)(x+y+1)} \quad (答) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} a^2+2ab+3a-3b^2+25b-28 &= a^2+(2b+3)a-3b^2+25b-28 \\ &= a^2+(2b+3)a+(3b-4)(-b+7) \\ &= \{a+(3b-4)\}\{a+(-b+7)\} \\ &= \boldsymbol{(a+3b-4)(a-b+7)} \quad (答) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 3x^2-2y^2-5xy+x+5y-2 &= 3x^2+(-5y+1)x-2y^2+5y-2 \\ &= 3x^2+(-5y+1)x+(y-2)(-2y+1) \\ &= \boldsymbol{(3x+y-2)(x-2y+1)} \quad (答) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} -2x^2+xy+y^2-3x-3y+2 &= y^2+(x-3)y-2x^2-3x+2 \\ &= y^2+(x-3)y+(-x-2)(2x-1) \\ &= \{y+(2x-1)\}\{y+(-x-2)\} \\ &= \boldsymbol{(2x+y-1)(-x+y-2)} \quad (答) \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} a^2b+ab^2+a+b-ab-1 &= (a^2b+ab^2-ab)+(a+b-1) \\ &= ab(a+b-1)+(a+b-1) \\ &= \boldsymbol{(ab+1)(a+b-1)} \quad (答) \end{aligned}$$

【5】(1)
$$\begin{aligned} (x^2+x+1)(x^2-x+1) &= \left\{(x^2+1)+x\right\}\left\{(x^2+1)-x\right\} \\ &= (x^2+1)^2-x^2 \\ &= \boldsymbol{x^4+x^2+1} \quad (答) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} (a+b+c+d)(a+b-c-d) &= \{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\} \\ &= (a+b)^2-(c+d)^2 \\ &= \boldsymbol{a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd} \quad (答) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) &= \{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\} \\ &= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6) \\ &= (x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24 \\ &= \boldsymbol{x^4-10x^3+35x^2-50x+24} \quad (答) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} (x-2)(x-1)(x+3)(x+6) &= \{(x-1)(x+6)\}\{(x-2)(x+3)\} \\ &= (x^2+5x-6)(x^2+x-6) \\ &= \left\{(x^2-6)+5x\right\}\left\{(x^2-6)+x\right\} \\ &= (x^2-6)^2+6x(x^2-6)+5x^2 \\ &= \boldsymbol{x^4+6x^3-7x^2-36x+36} \quad (答) \end{aligned}$$

【6】(1)

$$(2a-3)^2-4b^2=(2a-3-2b)(2a-3+2b)$$
$$=\mathbf{(2a-2b-3)(2a+2b-3)} \quad \text{(答)}$$

(2)

$$(3x+2)^2-(2x-1)^2=\{(3x+2)+(2x-1)\}\{(3x+2)-(2x-1)\}$$
$$=\mathbf{(5x+1)(x+3)} \quad \text{(答)}$$

(3)

$$(x^2+1)^2-4x^2=(x^2+1-2x)(x^2+1+2x)$$
$$=\mathbf{(x-1)^2(x+1)^2} \quad \text{(答)}$$

(4)

$$(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=\left\{(x^2+3x)-4\right\}\left\{(x^2+3x)+2\right\}$$
$$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)$$
$$=(x-1)(x+4)(x+1)(x+2)$$
$$=\mathbf{(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)} \quad \text{(答)}$$

(5)

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-8=x(x+3)(x+1)(x+2)-8$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-8$$
$$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-8$$
$$=\mathbf{(x^2+3x+4)(x^2+3x-2)} \quad \text{(答)}$$

(6)

$$(x^2+4x+3)(x^2-6x+8)+24=(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)+24$$
$$=\{(x+3)(x-4)\}\{(x+1)(x-2)\}+24$$
$$=(x^2-x-12)(x^2-x-2)+24$$
$$=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+48$$
$$=(x^2-x-6)(x^2-x-8)$$
$$=\mathbf{(x-3)(x+2)\left(x^2-x-8\right)} \quad \text{(答)}$$

【7】(1)

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$$
$$=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=\mathbf{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} \quad \text{(答)}$$

(2)

$$x^4+3x^2+4=x^4+4x^2+4-x^2$$
$$=(x^2+2)^2-x^2$$
$$=\mathbf{(x^2-x+2)(x^2+x+2)} \quad \text{(答)}$$

(3)

$$x^4-7x^2+1=x^4+2x^2+1-9x^2$$
$$=(x^2+1)^2-9x^2$$
$$=\mathbf{(x^2-3x+1)(x^2+3x+1)} \quad \text{(答)}$$

【8】(1) ①
$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$
$$= \boldsymbol{\alpha^2 - 2\beta} \quad (答)$$

②
$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2$$
$$= (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$
$$= \boldsymbol{\alpha^3 - 3\alpha\beta} \quad (答)$$

③
$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$
$$= \boldsymbol{\alpha^2 - 4\beta} \quad (答)$$

④
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (答)$$

⑤
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\alpha^2 - 2\beta}{\beta^2}} \quad (答)$$

⑥
$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2+y^2}{xy}$$
$$= \frac{\alpha^2 - 2\beta}{\beta}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\alpha^2}{\beta} - 2} \quad (答)$$

(2) ①
$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

となるから,

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx)$$
$$= 3^2 - 2 \cdot 4$$
$$= \mathbf{1} \quad (答)$$

②
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\left\{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)\right\}$$

となるから,

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)\left\{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)\right\} + 3xyz$$
$$= 3(1-4) + 15$$
$$= \mathbf{6} \quad (答)$$

【9】(1)
$$(2a + b + 2c - d)(4a + 2b - 2c + d)$$
$$=\{(2a+b) + (2c-d)\}\{2(2a+b) - (2c-d)\}$$
$$=2(2a+b)^2 + (2a+b)(2c-d) - (2c-d)^2$$
$$=\boldsymbol{8a^2 + 2b^2 - 4c^2 - d^2 + 8ab + 4ac - 2ad + 2bc - bd + 4cd} \quad (答)$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)\\
=&\left\{(a^2+b^2)^2-a^2b^2\right\}(a^4-a^2b^2+b^4)\\
=&(a^4+a^2b^2+b^4)(a^4-a^2b^2+b^4)\\
=&(a^4+b^4)^2-a^4b^4\\
=&\boldsymbol{a^8+a^4b^4+b^8} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2-z^2-(x-y+z)(x-y-z)\\
=&x^2+y^2-z^2-\left\{(x-y)^2-z^2\right\}\\
=&x^2+y^2-(x-y)^2\\
=&\boldsymbol{2xy} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【10】(1) $x-z=A$，$y-z=B$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
(x-z)^3+(y-z)^3-(x+y-2z)^3 &= A^3+B^3-(A+B)^3\\
&= -3A^2B-3AB^2\\
&= -3AB(A+B)\\
&= \boldsymbol{-3(x-z)(y-z)(x+y-2z)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) $(x+1)^2=X$，$(x-1)^2=Y$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
2(x+1)^4+2(x-1)^4+5(x^2-1)^2 &= 2(x+1)^4+2(x-1)^4+5(x+1)^2(x-1)^2\\
&= 2X^2+2Y^2+5XY\\
&= (2X+Y)(X+2Y)\\
&= \boldsymbol{(3x^2+2x+3)(3x^2-2x+3)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【11】(1)

$$
\begin{aligned}
x^2+\frac{1}{x^2} &= \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\\
&= 2^2+2=6
\end{aligned}
$$

であり，また

$$
\begin{aligned}
x^3-\frac{1}{x^3} &= \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)\\
&= 2(6+1)=14
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
x^3-2x^2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3} &= x^3-\frac{1}{x^3}-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\\
&= 14-2\cdot 6\\
&= \boldsymbol{2} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) ①

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2$$
$$= 7+2 = 9$$

$$\therefore \quad x+\frac{1}{x} = \pm 3$$

となるので，

$$x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \pm 3\,(7-1)$$
$$= \mathbf{\pm 18} \qquad (答)$$

②

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = x^5+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}$$

となることを利用すれば，

$$x^5+\frac{1}{x^5} = \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \pm 18\cdot 7 \mp 3 \qquad (複号同順)$$
$$= \pm(126-3)$$
$$= \mathbf{\pm 123} \qquad (答)$$

【12】(1) ①

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{xy+yz+zx}{xyz}$$
$$= \mathbf{\frac{11}{6}} \qquad (答)$$

②

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$
$$= 6^2-2\cdot 11$$
$$= \mathbf{14} \qquad (答)$$

③

$$x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)\left\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\right\}+3xyz$$
$$= 6\,(14-11)+18$$
$$= \mathbf{36} \qquad (答)$$

④

$$x^4+y^4+z^4 = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$$

であり，また

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = (xy+yz+zx)^2-2xyz\,(x+y+z)$$

であることから，

$$x^4+y^4+z^4 = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left\{(xy+yz+zx)^2-2xyz\,(x+y+z)\right\}$$
$$= 14^2-2\left(11^2-2\cdot 6\cdot 6\right)$$
$$= \mathbf{98} \qquad (答)$$

(2)

$$xy+yz+zx = \frac{1}{2}\left\{(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1^2-1\right)$$
$$= \mathbf{0} \qquad (答)$$

添削課題

【1】(1)

$$
\begin{aligned}
(x-y+z)^2 &= \{(x-y)+z\}^2 \\
&= (x-y)^2 + 2(x-y)\times z + z^2 \\
&= \boldsymbol{x^2 - 2xy + y^2 + 2xz - 2yz + z^2} \quad (答)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(x-y+z)^2 - (x+y-z)^2 \\
&=\{(x-y+z)+(x+y-z)\}\{(x-y+z)-(x+y-z)\} \\
&=2x(-2y+2z) \\
&= \boldsymbol{-4xy + 4xz} \quad (答)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&(2x+y-z)(2x-y+z) \\
&=\{2x+(y-z)\}\{2x-(y-z)\} \\
&=(2x)^2-(y-z)^2 \\
&=\boldsymbol{4x^2 - y^2 - z^2 + 2yz} \quad (答)
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7) \\
&=(2x+1)(2x+7)(2x+3)(2x+5) \\
&=(4x^2+16x+7)(4x^2+16x+15) \\
&=(4x^2+16x)^2+22(4x^2+16x)+105 \\
&=16x^4+128x^3+256x^2+88x^2+352x+105 \\
&=\boldsymbol{16x^4+128x^3+344x^2+352x+105} \quad (答)
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
(2x-1)(4x^2+2x+1) &= (2x)^3 - 1^3 \\
&= \boldsymbol{8x^3 - 1} \quad (答)
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
(3x+2y)^3 &= (3x)^3 + 3\times(3x)^2\times 2y + 3\times 3x\times(2y)^2 + (2y)^3 \\
&= \boldsymbol{27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3} \quad (答)
\end{aligned}
$$

【2】(1) $6x^2 - x - 2 = \boldsymbol{(3x-2)(2x+1)}$ (答)

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -2 & \longrightarrow & -4 \\
2 & & 1 & \longrightarrow & 3 \\
\hline
6 & & -2 & & -1
\end{array}
$$

(2) $12x^2 + xy - 6y^2 = \boldsymbol{(3x-2y)(4x+3y)}$ (答)

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -2 & \longrightarrow & -8 \\
4 & & 3 & \longrightarrow & 9 \\
\hline
12 & & -6 & & 1
\end{array}
$$

(3) $(x-y)^2+5(x-y)-6$

$=\mathbf{(}\boldsymbol{x-y}\mathbf{+6)(}\boldsymbol{x-y}\mathbf{-1)}$ (答)

(4) $12a^2-6bc-9ca+8ab$

$=3a(4a-3c)+2b(4a-3c)$

$=\mathbf{(4}\boldsymbol{a}\mathbf{-3}\boldsymbol{c}\mathbf{)(3}\boldsymbol{a}\mathbf{+2}\boldsymbol{b}\mathbf{)}$ (答)

(5) $x^2-xy-6y^2+x+7y-2$

$=x^2-(y-1)x-(6y^2-7y+2)$

$=x^2-(y-1)x-(2y-1)(3y-2)$

$=\{x-(3y-2)\}\{x+(2y-1)\}$

$=\mathbf{(}\boldsymbol{x}\mathbf{-3}\boldsymbol{y}\mathbf{+2)(}\boldsymbol{x}\mathbf{+2}\boldsymbol{y}\mathbf{-1)}$ (答)

(6) $(a^2-3a-3)(a^2-3a+1)-5$

$=(A-3)(A+1)-5$

$=A^2-2A-8$

$=(A-4)(A+2)$

$=(a^2-3a-4)(a^2-3a+2)$

$=\mathbf{(}\boldsymbol{a}\mathbf{-4)(}\boldsymbol{a}\mathbf{+1)(}\boldsymbol{a}\mathbf{-2)(}\boldsymbol{a}\mathbf{-1)}$ (答)

(7) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120$

$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-120$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$

$=(A+4)(A+6)-120$

$=A^2+10A-96$

$=(A-6)(A+16)$

$=(x^2+5x-6)(x^2+5x+16)$

$=\mathbf{(}\boldsymbol{x}\mathbf{-1)(}\boldsymbol{x}\mathbf{+6)(}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\mathbf{+5}\boldsymbol{x}\mathbf{+16)}$ (答)

(8) $(x+2y)^3-(2x-y)^3$

$=\{(x+2y)-(2x-y)\}\{(x+2y)^2+(x+2y)(2x-y)+(2x-y)^2\}$

$=(-x+3y)\{(x^2+4xy+4y^2)+(2x^2+3xy-2y^2)+(4x^2-4xy+y^2)\}$

$=\mathbf{(3}\boldsymbol{y}\mathbf{-}\boldsymbol{x}\mathbf{)(7}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\mathbf{+3}\boldsymbol{xy}\mathbf{+3}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}\mathbf{)}$ (答)

(9) x^4-5x^2+4

$=(x^2-1)(x^2-4)$

$=\mathbf{(}\boldsymbol{x}\mathbf{+1)(}\boldsymbol{x}\mathbf{-1)(}\boldsymbol{x}\mathbf{+2)(}\boldsymbol{x}\mathbf{-2)}$ (答)

(10) $x^6 - 1$

$=(x^3)^2 - 1^2$

$=(x^3+1)(x^3-1)$

$=\mathbf{(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$ (答)

【3】

$$x+y=(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}+\sqrt{2})=2\sqrt{5}$$

$$xy=(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=3$$

であるから,

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{5}}{3}}$ (答)

(2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(2\sqrt{5})^2-2\cdot 3=\mathbf{14}$ (答)

(3) $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3=(x+y)^3-xy(x+y)$

$=40\sqrt{5}-6\sqrt{5}$

$=\boldsymbol{34\sqrt{5}}$ (答)

問題

【1】(1) ①

$$|x| = \begin{cases} \mathbf{4} & (x = -4) \\ \mathbf{1} & (x = -1) \\ \mathbf{2} & (x = 2) \\ \mathbf{5} & (x = 5) \end{cases}$$ （答）

②

$$|3 - x| = \begin{cases} \mathbf{7} & (x = -4) \\ \mathbf{4} & (x = -1) \\ \mathbf{1} & (x = 2) \\ \mathbf{2} & (x = 5) \end{cases}$$ （答）

(2) ① $x + 1 \geqq 0$ を解くと $x \geqq -1$ であるから，

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & (x \geqq -1) \\ -x - 1 & (x < -1) \end{cases}$$ （答）

② $x - 1 \geqq 0$ を解くと $x \geqq 1$，

$x + 3 \geqq 0$ を解くと $x \geqq -3$ であるから，

(i) $x < -3$ のとき

$$\begin{aligned} |x - 1| + |x + 3| &= -(x - 1) - (x + 3) \\ &= -2x - 2 \end{aligned}$$

(ii) $-3 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} |x - 1| + |x + 3| &= -(x - 1) + (x + 3) \\ &= 4 \end{aligned}$$

(iii) $1 < x$ のとき

$$\begin{aligned} |x - 1| + |x + 3| &= (x - 1) + (x + 3) \\ &= 2x + 2 \end{aligned}$$

以上より，

$$|x - 1| + |x + 3| = \begin{cases} -2x - 2 & (x < -3) \\ 4 & (-3 \leqq x \leqq 1) \\ 2x + 2 & (1 < x) \end{cases}$$ （答）

【2】(1) 分母分子に $\sqrt{5} - 1$ をかけて

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5} + 1} &= \frac{2\left(\sqrt{5} - 1\right)}{\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{5} - 1\right)}{5 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{aligned}$$ （答）

(2) 分母分子に $\sqrt{3}+1$ をかけて

$$\frac{\sqrt{27}+3}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{27}+3\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}$$

$$=\mathbf{6+3\sqrt{3}}\qquad(\text{答})$$

(3) 分母分子に $\sqrt{2}-1$ をかけて

$$\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\left(\sqrt{8}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$=\left(\sqrt{8}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$=\mathbf{3-\sqrt{2}}\qquad(\text{答})$$

(4) 分母分子に $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ をかけて

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+3+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$$

$$=\mathbf{1+\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}}\qquad(\text{答})$$

【3】(1)

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(3+5)+2\sqrt{3\times 5}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\mathbf{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\qquad(\text{答})$$

(2)

$$\sqrt{10+\sqrt{84}}=\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{(3+7)+2\sqrt{3\times 7}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2}=\mathbf{\sqrt{3}+\sqrt{7}}\qquad(\text{答})$$

(3)

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\times 1}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{1})^2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}\qquad(\text{答})$$

(4)

$$\begin{aligned}\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}} &= \sqrt{9+4\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\times 1}}}\\ &= \sqrt{9+4\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{1})^2}}\\ &= \sqrt{9+4(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{13+4\sqrt{3}}\\ &= \sqrt{13+2\sqrt{12}} = \sqrt{(1+12)+2\sqrt{1\times 12}}\\ &= \sqrt{(1+\sqrt{12})^2} = 1+\sqrt{12}\\ &= \mathbf{1+2\sqrt{3}} \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

【4】(1) a, b は有理数，$\sqrt{5}$ は無理数であるから，$\boldsymbol{a=3,\ b=-2}$ (答)

(2)

$$(3+\sqrt{3})a+(1-2\sqrt{3})b+3\sqrt{3}-5=0$$

$$\therefore\quad (3a+b-5)+(a-2b+3)\sqrt{3}=0$$

ここで，a, b は有理数，$\sqrt{3}$ は無理数であるから，

$$\begin{cases}3a+b-5=0\\ a-2b+3=0\end{cases}$$

これを解いて

$$\boldsymbol{a=1,\ b=2} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 不等式　$ax>a+1\ \cdots(*)$　において，a の値によって場合を分ける．

(i) $a>0$ のとき．$(*)$ の両辺を a で割って，求める解は

$$x>\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}$$

(ii) $a=0$ のとき．

$$(*)\quad\Longleftrightarrow\quad 0\cdot x>1$$

これをみたす実数 x は存在しない．

(iii) $a<0$ のとき．$(*)$ の両辺を a で割って，求める解は

$$x<\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}$$

以上より，求める解は

$$\begin{cases}\boldsymbol{x>1+\frac{1}{a}} & \textbf{(}\boldsymbol{a>0}\ \textbf{のとき)}\\ \textbf{解なし} & \textbf{(}\boldsymbol{a=0}\ \textbf{のとき)}\\ \boldsymbol{x<1+\frac{1}{a}} & \textbf{(}\boldsymbol{a<0}\ \textbf{のとき)}\end{cases}\qquad\text{(答)}$$

(2) 不等式

$$ax \geqq x - a + 1 \iff (a-1)x \geqq -(a-1) \quad \cdots (\#)$$

において，$a-1$ の値によって場合を分ける．

(i) $a - 1 > 0$ すなわち $a > 1$ のとき．

不等式 (#) の両辺を $a-1$ で割って，求める解は

$$x \geqq -1$$

(ii) $a - 1 = 0$ すなわち $a = 1$ のとき．

$$(\#) \iff 0 \cdot x \geqq 0$$

これは任意の実数 x に対して成立する．

(iii) $a - 1 < 0$ すなわち $a < 1$ のとき．

不等式 (#) の両辺を $a-1$ で割って，求める解は

$$x \leqq -1$$

以上より，求める解は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \geqq -1} & \textbf{(}\boldsymbol{a > 1}\textbf{ のとき)} \\ \textbf{任意の実数} & \textbf{(}\boldsymbol{a = 1}\textbf{ のとき)} \\ \boldsymbol{x \leqq -1} & \textbf{(}\boldsymbol{a < 1}\textbf{ のとき)} \end{cases} \qquad (答)$$

【6】$x = \dfrac{a^2}{4} + 1$ を与式に代入すると

$$\begin{aligned} \sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} &= \sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+1\right)+a} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+1\right)-a} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4}+a+1} - \sqrt{\frac{a^2}{4}-a+1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}-1\right)^2} \\ &= \left|\frac{a}{2}+1\right| - \left|\frac{a}{2}-1\right| \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

したがって

(i) $a \leqq -2$ のとき

$$(*) = -\left(\frac{a}{2}+1\right) + \left(\frac{a}{2}-1\right) = -2$$

(ii) $-2 < a \leqq 2$ のとき

$$(*) = \left(\frac{a}{2}+1\right) + \left(\frac{a}{2}-1\right) = a$$

(iii) $2 < a$ のとき

$$(*) = \left(\frac{a}{2}+1\right) - \left(\frac{a}{2}-1\right) = 2$$

よって

$$\begin{cases} a \leqq -2 \text{ のとき,} & \mathbf{-2} \\ -2 < a \leqq 2 \text{ のとき,} & \boldsymbol{a} \\ 2 < a \text{ のとき,} & \mathbf{2} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【7】 $1 < \sqrt{2} < 2$ より,

$$2 < \sqrt{2} + 1 < 3$$

ゆえに $\sqrt{2}+1$ の整数部分 a は，2 である.
よって，$b = \left(\sqrt{2}+1\right) - 2 = \sqrt{2} - 1$ であるから

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \sqrt{2}+1$$

$2 < \sqrt{2}+1 < 3$ であるから，$\dfrac{1}{b}$ の整数部分は 2 である.
以上より

$$\boldsymbol{a = 2,\quad \frac{1}{b}} \textbf{の整数部分} \mathbf{= 2} \qquad \text{(答)}$$

【8】

$$|x| = \begin{cases} x & (0 \leqq x) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$ であるから，与式は

$$||x| - 1| = \begin{cases} |x - 1| & (0 \leqq x) \\ |-x - 1| & (x < 0) \end{cases}$$

となる．ここで，$0 \leqq x$ において

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & (1 \leqq x) \\ -(x - 1) & (0 \leqq x < 1) \end{cases}$$

であり，また，$x < 0$ において

$$|-x - 1| = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & (-1 \leqq x < 0) \\ -(x + 1) & (x < -1) \end{cases}$$

である．ゆえに,

$$\boldsymbol{||x| - 1| = \begin{cases} x - 1 & (1 \leqq x) \\ -x + 1 & (0 \leqq x < 1) \\ x + 1 & (-1 \leqq x < 0) \\ -x - 1 & (x < -1) \end{cases}} \qquad \text{(答)}$$

【9】与式の分母を有理化すると

$$\frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{\sqrt{11}+3}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)} = \frac{\sqrt{11}+3}{2}$$

ここで $3 < \sqrt{11} < 4$ より，$3 < \dfrac{\sqrt{11}+3}{2} < \dfrac{7}{2}$ であるから与式の整数部分は

3　(答)

【10】$2\sqrt{6} = \sqrt{24}$ より

$$4 = \sqrt{16} < \sqrt{24} < \sqrt{25} = 5$$

ゆえに

$$\frac{4+4}{3} < \frac{4+2\sqrt{6}}{3} < \frac{4+5}{3}$$

$$\frac{8}{3} < \frac{4+2\sqrt{6}}{3} < \frac{9}{3}$$

$$2.66\cdots < \frac{4+2\sqrt{6}}{3} < 3$$

よって，与式に最も近い整数は

3　(答)

添削課題

【1】(1) ① $\mathbf{1}$,　$\mathbf{\sqrt{4}}$

② $\mathbf{-\sqrt{5^2}}$,　$\mathbf{1}$,　$\mathbf{0}$,　$\mathbf{\sqrt{4}}$

③ $\mathbf{0.12}$,　$\mathbf{-\sqrt{5^2}}$,　$\mathbf{1}$,　$\mathbf{-\frac{2}{3}}$,　$\mathbf{0}$,　$\mathbf{\sqrt{4}}$

④ $\mathbf{2\sqrt{3}}$,　$\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) ① $x = 0.0\dot{6}\dot{3}$ とおくと

$$\begin{array}{rl} & 100x = 6.36363\cdots\cdots \\ -) & x = 0.06363\cdots\cdots \\ \hline & 99x = 6.3 \end{array}$$

$$\therefore\ x = \frac{6.3}{99} = \mathbf{\frac{7}{110}} \qquad (答)$$

② $x = 0.\dot{0}6\dot{3}$ とおくと

$$\begin{array}{rl} & 1000x = 63.063063\cdots\cdots \\ -) & x = \ \ 0.063063\cdots\cdots \\ \hline & 999x = 63 \end{array}$$

$$\therefore\ x = \frac{63}{999} = \mathbf{\frac{7}{111}} \qquad (答)$$

【2】(1) $x \geqq 3$ のとき，$x+2>0$, $x-3 \geqq 0$ より，

$|x+2| = x+2$, $|x-3| = x-3$ だから

$$|x+2|+|x-3| = (x+2)+(x-3) = 2x-1$$

$-2 \leqq x < 3$ のとき，$x+2 \geqq 0$, $x-3<0$ より，

$|x+2| = x+2$, $|x-3| = -(x-3)$ だから

$$|x+2|+|x-3| = (x+2)+\{-(x-3)\} = 5$$

$x < -2$ のとき，$x+2<0$, $x-3<0$ より，

$|x+2| = -(x+2)$, $|x-3| = -(x-3)$ だから

$$|x+2|+|x-3| = -(x+2)+\{-(x-3)\} = -2x+1$$

$$(答)\begin{cases} \boldsymbol{x \geqq 3} \text{ のとき} & \mathbf{2x-1} \\ \boldsymbol{-2 \leqq x < 3} \text{ のとき} & \mathbf{5} \\ \boldsymbol{x < -2} \text{ のとき} & \mathbf{-2x+1} \end{cases}$$

(2) $x \geqq 2$ のとき，$2x+1>0$, $2-x \leqq 0$ より，

$|2x+1| = 2x+1$, $|2-x| = x-2$ だから

$$|2x+1|-|2-x| = (2x+1)-(x-2) = x+3$$

$-\frac{1}{2} \leqq x < 2$ のとき，$2x+1 \geqq 0,\ 2-x > 0$ より，
$|2x+1| = 2x+1,\ |2-x| = 2-x$ だから

$$|2x+1| - |2-x| = (2x+1) - (2-x) = 3x-1$$

$x < -\frac{1}{2}$ のとき，$2x+1 < 0,\ 2-x > 0$ より，
$|2x+1| = -(2x+1),\ |2-x| = 2-x$ だから

$$|2x+1| - |2-x| = -(2x+1) - (2-x) = -x-3$$

$$(答)\begin{cases} \boldsymbol{x \geqq 2} \text{ のとき} & \boldsymbol{x+3} \\ \boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq x < 2} \text{ のとき} & \boldsymbol{3x-1} \\ \boldsymbol{x < -\frac{1}{2}} \text{ のとき} & \boldsymbol{-x-3} \end{cases}$$

【3】(1)

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} = \frac{8+2\sqrt{15}}{2} = \boldsymbol{4+\sqrt{15}} \quad \textbf{(答)}$$

(2)

$$\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{4\sqrt{5}}{4} = \boldsymbol{\sqrt{5}} \quad \textbf{(答)}$$

【4】(1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)+2\sqrt{5\times 2}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (答)

(2) $\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{8-2\sqrt{12}} = \sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\times 2}}$

$= \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} = \boldsymbol{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ (答)

【5】 $\sqrt{2}(a+2\sqrt{2}b+1)-3=0$
$\sqrt{2}a+4b+\sqrt{2}-3=0$
$(a+1)\sqrt{2}+4b-3=0$

よって

$$\begin{cases} a+1=0 & \cdots ① \\ 4b-3=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①, ② より，$\boldsymbol{a=-1,\ b=\frac{3}{4}}$ (答)

問題

【1】(1) $f(x) = 2x + 3$ より

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = \mathbf{1} \qquad (答)$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = \mathbf{3} \qquad (答)$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = \mathbf{5} \qquad (答)$$

(2) $f(x) = \dfrac{12}{x}$ より

$$f(-4) = \frac{12}{-4} = \mathbf{-3} \qquad (答)$$

$$f(-2) = \frac{12}{-2} = \mathbf{-6} \qquad (答)$$

$$f(6) = \frac{12}{6} = \mathbf{2} \qquad (答)$$

(3) $f(x) = 2x^2 - ax - a^2$ より

$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 - a \cdot (-3) - a^2 = \boldsymbol{-a^2 + 3a + 18} \qquad (答)$$

$$f(a) = 2 \cdot a^2 - a \cdot a - a^2 = \mathbf{0} \qquad (答)$$

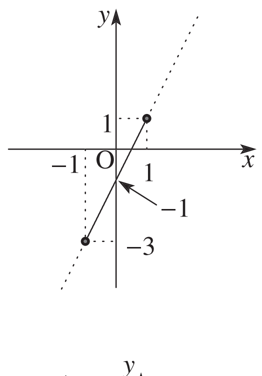
$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) - a^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - a^2 = \mathbf{0} \qquad (答)$$

【2】(1) $y = f(x) = 2x - 1$ より，グラフは右図.

$$f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3$$
$$f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

よって

$$\boldsymbol{-3 \leqq y \leqq 1} \qquad (答)$$

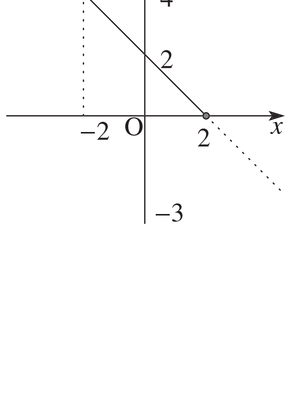


(2) $y = f(x) = -x + 2$ より，グラフは右図.

$$f(-2) = -(-2) + 2 = 4$$
$$f(2) = -2 + 2 = 0$$

よって

$$\boldsymbol{0 \leqq y \leqq 4} \qquad (答)$$

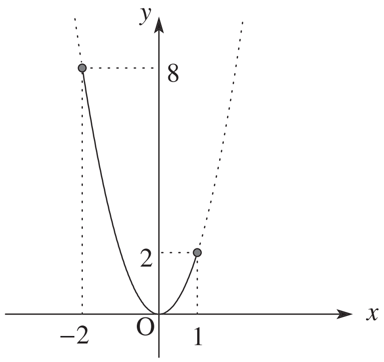


(3) $y = f(x) = 2x^2$ より，グラフは右図.

$$f(-2) = 2 \times (-2)^2 = 8$$

よって

$$\mathbf{0 \leqq y \leqq 8} \qquad \text{(答)}$$

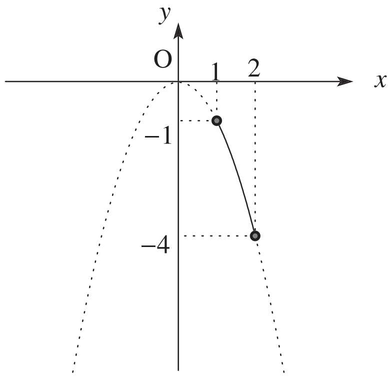


(4) $y = f(x) = -x^2$ より，グラフは右図.

$$f(1) = -1^2 = -1$$
$$f(2) = -2^2 = -4$$

よって

$$\mathbf{-4 \leqq y \leqq -1} \qquad \text{(答)}$$

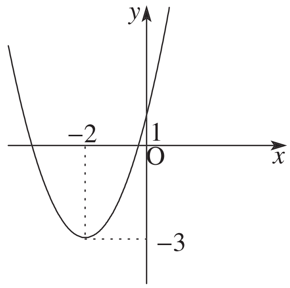


(5) 与えられた方程式を平方完成する.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= (x^2 + 4x + 4) - 4 + 1 \\ &= (x + 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

よってグラフは右図.
また値域は

$$\mathbf{y \geqq -3} \qquad \text{(答)}$$

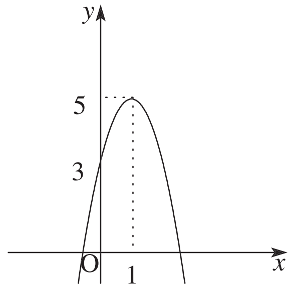


(6) 与えられた方程式を平方完成する.

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4x + 3 \\ &= -2(x^2 - 2x) + 3 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1) + 2 \times 1 + 3 \\ &= -2(x - 1)^2 + 5 \end{aligned}$$

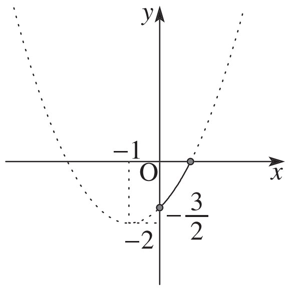
よってグラフは右図.
また値域は

$$\mathbf{y \leqq 5} \qquad \text{(答)}$$



(7) 与えられた方程式を平方完成する．

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2x) - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - \frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2 \end{aligned}$$



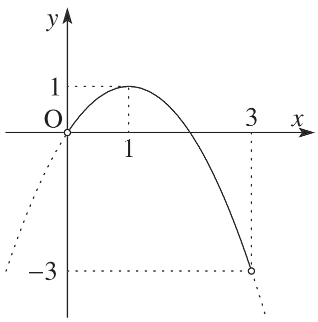
よってグラフは右図．

また値域は

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq y \leqq 0} \qquad \text{(答)}$$

(8) 与えられた方程式を平方完成する．

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2x \\ &= -(x^2 - 2x) \\ &= -(x^2 - 2x + 1) + 1 \times 1 \\ &= -(x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$



よってグラフは右図．

また値域は

$$\boldsymbol{-3 < y \leqq 1} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $y = 2x^2 - 1$ の頂点は，$(0,\ -1)$

したがって，求める放物線の頂点の座標は

$$(0 - 3,\ -1 + 5) = (-3,\ 4)$$

だから，$y = 2(x + 3)^2 + 4$

右辺を展開して整理すると，$\boldsymbol{y = 2x^2 + 12x + 22}$ **(答)**

＜別解＞

$f(x) = 2x^2 - 1$ とすると，求める方程式は $y = f(x + 3) + 5$ と表されるから

$$y = 2(x + 3)^2 - 1 + 5 = \boldsymbol{2x^2 + 12x + 22} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 放物線 $y = -2x^2 + 8x - 7$ を平行移動したグラフは

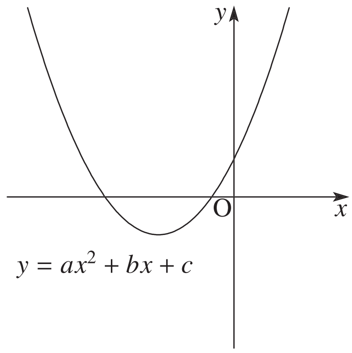
$$y = -2(x - p)^2 + q$$

とおくことができる．

これに，頂点の座標 $(p,\ q) = (3,\ -2)$ を代入して

$$y = -2(x - 3)^2 - 2 = \boldsymbol{-2x^2 + 12x - 20} \qquad \textbf{(答)}$$

【4】題意の放物線は右図のようになる．



(1) 図より，$\boldsymbol{a > 0}$　(答)

(2)

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

と変形できるから，軸の位置より

$$-\frac{b}{2a} < 0$$

$a > 0$ だから

$$\boldsymbol{b > 0} \quad \text{(答)}$$

(3) 図より，$\boldsymbol{c > 0}$　(答)

(4) 頂点の y 座標は負だから

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$$

$a > 0$ より

$$\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0} \quad \text{(答)}$$

【5】(1)

① グラフが上に凸であるから，$\boldsymbol{a < 0}$　(答)

② $y = ax^2 + bx + c$ を変形して

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

より，軸は $x = -\dfrac{b}{2a}$ と表される．

図より，$-\dfrac{b}{2a} > 0$ だから，$a < 0$ より $\boldsymbol{b > 0}$　(答)

③ $x = 0$ のとき，$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c < 0$ より，$\boldsymbol{c < 0}$　(答)

④ 頂点は，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ より

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0 \text{ だから，} \frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$$

ここで，$a < 0$ より

$$\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0} \quad \text{(答)}$$

⑤ $x = -1$ を代入すると，グラフより

$$y = a - b + c < 0$$

よって，$\boldsymbol{a - b + c < 0}$　(答)

(2) (1) より $a < 0,\ b > 0,\ b^2 - 4ac < 0$ より

$$\mathrm{OQ} = \left| -\frac{b}{2a} \right| = \boldsymbol{-\frac{b}{2a}} \qquad \textbf{(答)}$$

$$\mathrm{PQ} = \left| -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right| = \boldsymbol{\frac{b^2 - 4ac}{4a}} \qquad \textbf{(答)}$$

【6】$y = 3x^2 - 5x - 2$ のグラフを，x 軸正方向に p だけ平行移動したとする．すなわち

$$x \longrightarrow x - p$$

として

$$y = 3(x-p)^2 - 5(x-p) - 2 \quad \cdots (*)$$

これが原点を通るから，(0, 0) を代入して

$$0 = 3(-p)^2 - 5(-p) - 2$$

整理して解くと

$$3p^2 + 5p - 2 = 0$$
$$(3p-1)(p+2) = 0$$
$$\therefore \quad p = \frac{1}{3},\ -2$$

$(*)$ に代入．$p = \dfrac{1}{3}$ のとき，

$$y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 5\left(x - \frac{1}{3}\right) - 2 \qquad \therefore \quad y = 3x^2 - 7x$$

$p = -2$ のとき．

$$y = 3(x+2)^2 - 5(x+2) - 2 \qquad \therefore \quad y = 3x^2 + 7x$$

以上より，求める方程式は

$$\boldsymbol{y = 3x^2 - 7x, \quad y = 3x^2 + 7x} \qquad \text{(答)}$$

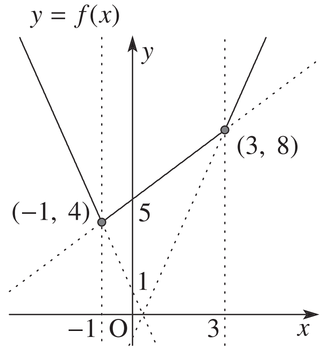
【7】(1) x の値に対して，$x - 3$ と $x + 1$ の符号は次の表のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

ゆえに

$$f(x) = |x-3| + 2|x+1|$$
$$= \begin{cases} -(x-3)-2(x+1) & (x \leqq -1) \\ -(x-3)+2(x+1) & (-1 \leqq x \leqq 3) \\ x-3+2(x+1) & (3 \leqq x) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -3x+1 & (x \leqq -1) \\ x+5 & (-1 \leqq x \leqq 3) \\ 3x-1 & (3 \leqq x) \end{cases}$$

よってグラフは右の実線部のようになる. (答)



(2) グラフより,

最小値 : **4 ($x = -1$ のとき)** (答)

【8】直線 $y = x^2 - 3x - 4$ を x 軸負方向に $p\ (> 0)$ だけ平行移動したとすると,

$$y = (x+p)^2 - 3(x+p) - 4$$

これが原点を通るから, $(0,\ 0)$ を代入して

$$0 = p^2 - 3p - 4$$

$p > 0$ に注意してこれを解くと

$$(p+1)(p-4) = 0$$
$$\therefore \quad p = 4\ (> 0)$$

ゆえに求める放物線の方程式は

$$y = (x+4)^2 - 3(x+4) - 4$$

整理して

$$\boldsymbol{y = x^2 + 5x}$$ (答)

【9】

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (1 \leqq x \leqq 2) \\ x-1 & (2 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

に対して, $g(x) = f(x) - ax$ とおくと,

$$g(x) = \begin{cases} -ax+1 & (1 \leqq x \leqq 2) \\ (1-a)x-1 & (2 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

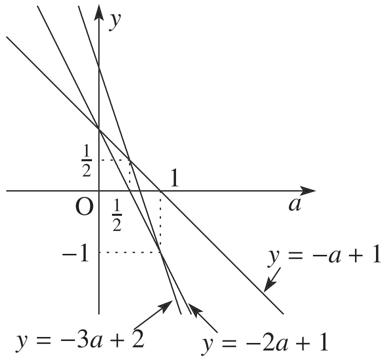
である. ここで, $g(x)$ は各区間で 1 次関数または定数であるから, $g(x)$ が最大値, 最小値をとるのは各区間の端, すなわち

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3$$

のいずれかである. ここで,

$$g(1) = -a + 1$$
$$g(2) = -2a + 1$$
$$g(3) = -3a + 2$$

であり，これらのうち最大のものが $g(x)$ の最大値，最小のものが $g(x)$ の最小値である．これらの大小を比べるために，a を横軸にとってグラフを描くと右図のようになる．



(i) $a \leqq 0$ のとき．

$$V(a) = g(3) - g(1) = -2a + 1$$

(ii) $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき．

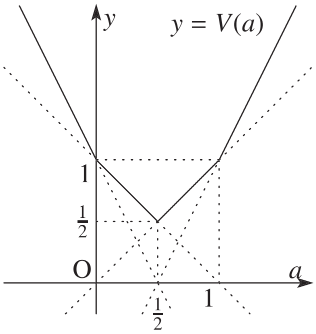
$$V(a) = g(3) - g(2) = -a + 1$$

(iii) $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき．

$$V(a) = g(1) - g(2) = a$$

(iv) $1 \leqq a$ のとき．

$$V(a) = g(1) - g(3) = 2a - 1$$



以上より，$y = V(a)$ のグラフは右のようになるから，

$V(a)$ の最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ $\left(\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}} \text{ のとき}\right)$ (答)

添削課題

【1】(1) $f(0) = -3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 9 = \mathbf{9}$ **(答)**

(2) $f(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 9 = \mathbf{-11}$ **(答)**

(3)
$$\begin{aligned} f(2-\sqrt{3}) &= -3(2-\sqrt{3})^2 + 4(2-\sqrt{3}) + 9 \\ &= -3(7-4\sqrt{3}) + 4(2-\sqrt{3}) + 9 \\ &= \mathbf{-4+8\sqrt{3}} \end{aligned}$$
(答)

(4)
$$\begin{aligned} f(a-3) &= -3(a-3)^2 + 4(a-3) + 9 \\ &= -3(a^2-6a+9) + 4(a-3) + 9 \\ &= \mathbf{-3a^2+22a-30} \end{aligned}$$
(答)

【2】(1) ***y*** **軸方向に -2 だけ平行移動したもの** **(答)**

(2) ***x*** **軸方向に $+2$ だけ平行移動したもの** **(答)**

(3) ***x*** **軸方向に -3，*y* 軸方向に $+5$ だけ平行移動したもの** **(答)**

(4) ***x*** **軸方向に $+\dfrac{1}{2}$，*y* 軸方向に $-\dfrac{7}{2}$ だけ平行移動したもの** **(答)**

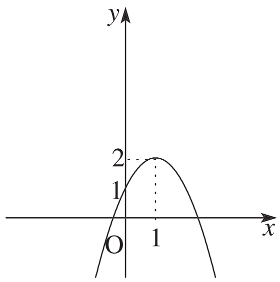
【3】(1) まず，グラフの頂点を求めると

$$-x^2+2x+1 = -(x-1)^2+2$$

よって，軸の方程式は $\boldsymbol{x=1}$ **(答)**

頂点は **(1, 2)** **(答)**

であり，グラフは右図のようになる．



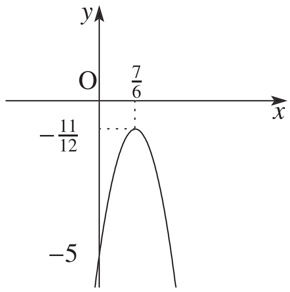
(2) まず，グラフの頂点を求めると

$$y = -3x^2+7x-5 = -3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{11}{12}$$

よって，軸の方程式は $\boldsymbol{x=\dfrac{7}{6}}$ **(答)**

頂点は $\boldsymbol{\left(\dfrac{7}{6},\ -\dfrac{11}{12}\right)}$ **(答)**

であり，グラフは右図のようになる．



【4】(1) $y = 5x^2 + 2x - 5$ を変形すると

$$y = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{26}{5}$$

よって，頂点の座標は $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{26}{5}\right)$
したがって，求める放物線の頂点の座標は

$$\left(-\frac{1}{5} + 4,\ -\frac{26}{5} - 2\right) = \left(\frac{19}{5},\ -\frac{36}{5}\right)$$

だから，求める放物線の方程式は，$y = 5\left(x - \frac{19}{5}\right)^2 - \frac{36}{5}$
右辺を展開して整理すると，$\boldsymbol{y = 5x^2 - 38x + 65}$　**(答)**

(2) 放物線 $y = 3x^2 - 5x + 9$ を平行移動したグラフは

$$y = 3(x - p)^2 + q$$

とおくことができる．
これに，頂点の座標 $(p,\ q) = (4,\ 8)$ を代入して

$$y = 3(x - 4)^2 + 8 = \boldsymbol{3x^2 - 24x + 56} \quad \textbf{(答)}$$

M1TK

高 1 難関大数学 K

Z-KAI

会員番号		氏　名	