M2JC

本科 1 期 4 月度

解答

Z会東大進学教室

高 2 東大理系数学Ⅲ

問題

【1】(1) 0

(2) ∞

(3) $-\infty$

(4) 振動

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{4}{n}}=\frac{1}{3}$

(6)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+(2n)^2}{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{2n}k^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{6}\cdot 2n\cdot(2n+1)(4n+1)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 4=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

(7)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}\\ &= \frac{4}{2}=2\end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{4+\tfrac{1}{n}}-2\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(4+\frac{1}{n}-4\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=3$

(10) (i) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$0<\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n}{1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n}=1$$

(ii) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\cos\theta=\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}=0$$

(iii) $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^n-1}{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^n+1}=-1$$

【2】(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+5}{x^2+1}=\frac{4}{2}=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ は存在しない.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$

(4) $x=-t$ とおくと，　$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ なので

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{-t}=\lim_{t\to\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=-1$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+3}=\frac{3}{4}$

(6)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-(1+x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1-(1+x)^2}{x^2\left\{\sqrt{2x+1}+1+x\right\}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{2x+1}+1+x}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

【3】$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-2a+1}{x^2+x-2}$ が有限の値であり，$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)=0$ であるから

$$\lim_{x\to 1}(x^2+ax-2a+1)=0$$
$$\therefore\quad 1+a-2a+1=0\qquad\qquad\therefore\quad a=2$$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-2a+1}{x^2+x-2}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x+2)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+2}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

【4】(1)　真

(2)　偽　　反例：$a_n=b_n=n$

(3)　偽　　反例：$a_n=\dfrac{1}{n^2}$，　$b_n=n$

(4)　偽　　反例：$a_n=1$，　$b_n=\dfrac{1}{n}$

(5)　偽　　反例：$a_n=(-1)^n$

【5】$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ より

$$\frac{f(x)-g(x)}{(x-p)^2}=\frac{x^2+ax+b-\frac{1}{x+1}}{(x-p)^2}=\frac{x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b-1}{(x+1)(x-p)^2} \qquad \cdots\cdots(*)$$

これが $x\to p$ のとき有限な値となるので，分子は $(x-p)^2$ で割り切れる (→≪注≫).
よって

$$x^3+(a+1)x^2+(a+b)x+b-1=(x-p)^2(x+c) \quad (c:\text{定数})$$

とおけて，右辺を展開して係数比較をすると

$$a+1=c-2p,\ a+b=p^2-2pc,\ b-1=p^2c$$
$$a+1=\frac{b-1}{p^2}-2p,\quad a+b=p^2-2\frac{b-1}{p}$$

これを a, b について解いて

$$a=-2p-\frac{1}{(p+1)^2},\quad b=p^2+\frac{2p+1}{(p+1)^2}$$

また，このとき

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p}\frac{f(x)-g(x)}{(x-p)^2}&=\lim_{x\to p}\frac{(x-p)^2(x+c)}{(x+1)(x-p)^2}\\
&=\lim_{x\to p}\frac{x+c}{x+1}\\
&=\frac{p+c}{p+1}\\
&=\frac{p+1-\frac{1}{(p+1)^2}}{p+1} \quad \left(\because\ c=a+1+2p=1-\frac{1}{(p+1)^2}\right)\\
&=1-\frac{1}{(p+1)^3}
\end{aligned}$$

≪注≫ $\displaystyle\lim_{x\to p}(*)$ が有限な値で $\displaystyle\lim_{x\to p}(\text{分母})=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to p}(\text{分子})=0$
よって，因数定理より分子は $x-p$ で割り切れるから，$(\text{分子})=(x-p)Q(x)$ とかけて

$$\lim_{x\to p}(*)=\lim_{x\to p}\frac{(x-p)Q(x)}{(x+1)(x-p)^2}=\lim_{x\to p}\frac{Q(x)}{(x+1)(x-p)}$$

もう一度同じ議論ができて，$Q(x)$ は $x-p$ で割り切れるから，結局，分子は $(x-p)^2$ で割り切れる.

添削課題

【1】 $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{ax^2+bx+8}{\sqrt[3]{x}-2}=84$ から $\displaystyle\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x}-2)=0$ であるから

$$\lim_{x\to 8}(ax^2+bx+8)=0$$
$$\therefore\quad 64a+8b+8=0 \qquad \therefore\quad b=-8a-1 \qquad \cdots ①$$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 8}\frac{ax^2+bx+8}{\sqrt[3]{x}-2}&=\lim_{x\to 8}\frac{ax^2-(8a+1)x+8}{\sqrt[3]{x}-2}\\&=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(ax-1)}{\sqrt[3]{x}-2}\\&=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(ax-1)}{\sqrt[3]{x}-2}\\&=\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(ax-1)\\&=(4+4+4)(8a-1)\\&=12(8a-1)\end{aligned}$$

これが 84 に等しいので

$$12(8a-1)=84 \qquad \therefore\quad a=1$$

よって ① とから

$$(a,\ b)=(1,\ -9)$$

問題

【1】

(1) $\{a_n\}$ は $\dfrac{5n^2+5n-3}{n^2+n} < a_n < \dfrac{5^{n+1}+4^{n-1}}{5^n}$ $(n=1,\,2,\,\cdots)$ をみたし

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+5n-3}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 5 \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+4^{n-1}}{5^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{5+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\} = 5 \end{cases}$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5$$

(2)　(i) $a = \dfrac{1}{1+b}$　$(b>0)$ とおくと

$$\begin{aligned} na^n &= \frac{n}{(1+b)^n} \\ &= \frac{n}{1+{}_n\mathrm{C}_1 b + {}_n\mathrm{C}_2 b^2 + \cdots + b^n} \quad (\because\ 2\text{ 項定理}) \\ &< \frac{n}{{}_n\mathrm{C}_2 b^2} \quad (\because\ n \geqq 2) \\ &= \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}b^2} \end{aligned}$$

一方，$n \geqq 2$，$0<a<1$ より，$0 < na^n$

$$\therefore\quad 0 < na^n < \frac{2}{(n-1)b^2} \quad \cdots①$$

〔証明終〕

(ii) $\{na^n\}$ は ① をみたし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)b^2} = 0$ より，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} na^n = 0 \quad (0<a<1)$$

【2】$x\to\infty$ とするので $x>1$ としてよい．このとき

$$\begin{array}{rcccl} \log_x x^2 & < & \log_x(x+x^2) & < & \log_x(2x^2) \\ 2\log_x x & < & \log_x(x+x^2) & < & \log_x 2 + \log_x x^2 \\ 2\log_x x & < & \log_x(x+x^2) & < & \dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}x} + 2\log_x x \\ \therefore\qquad 2 & < & \log_x(x+x^2) & < & \dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}x} + 2 \end{array}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log_{10}2}{\log_{10}x}+2\right) = 2$ なので，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty}\log_x(x+x^2) = 2$$

【3】(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}2^{\frac{1}{x}}=\infty,\quad \lim_{x\to -0}2^{\frac{1}{x}}=0$ より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$ は存在しない.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x^2)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x^2)}{3x^2}\cdot\frac{3}{2}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

【4】(1) $n\geqq 3$ のとき

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n-1}a_k \quad と \quad a_n=\sum_{k=1}^{n-2}a_k$$

の辺々をひいて

$$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_k-\sum_{k=1}^{n-2}a_k=a_{n-1}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\quad\cdots ①$$

(2) $a_1>0,\ a_2>0$ と ① から，帰納的に $a_n>0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ なので，① の両辺を a_n で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

いま，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ であるから，

$$b_n=1+\frac{1}{b_{n-1}}\qquad\cdots\cdots ②$$

ここで，$\{b_n\}$ が収束すると仮定したとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n-1}=\alpha$（正の定数）とおくと，① の両辺の lim をとることにより

$$\alpha=1+\frac{1}{\alpha}\qquad\therefore\quad \alpha^2-\alpha-1=0$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\alpha>0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(3)　$c=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，c は $c=1+\dfrac{1}{c}$ $\cdots$③ をみたす．
このとき，

$$\begin{aligned} |b_{n+1}-c| &= \left|1+\frac{1}{b_n}-c\right| \qquad (\because ②) \\ &= \left|\frac{1}{b_n}+1-c\right| \\ &= \left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{c}\right| \qquad (\because ③) \\ &= \frac{|b_n-c|}{cb_n} \qquad (\because c>0,\ b_n>0) \end{aligned}$$

さて，$a_1>0,\ a_2>0$ と ① より $\{a_n\}$ は単調増加数列であるから，

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqq 1$$

に注意すると

$$|b_{n+1}-c|=\frac{|b_n-c|}{cb_n}\leqq\frac{|b_n-c|}{c} \qquad (n=3,\ 4,\ \cdots)$$

次に，この不等式を繰り返し使うと

$$0\leqq|b_n-c|\leqq\frac{|b_{n-1}-c|}{c}\leqq\frac{|b_{n-2}-c|}{c^2}\leqq\cdots\leqq\frac{|b_3-c|}{c^{n-3}}$$

であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|b_3-c|}{c^{n-3}}=0$　$(\because c>1)$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}|b_n-c|=0 \qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty}b_n=c$$

〔証明終〕

【5】(1) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $a_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ を 2 項定理によって展開する.

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + {}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n} + {}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^2} + {}_n\mathrm{C}_3\frac{1}{n^3} + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} \\ &\qquad + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots\cdots \\ &\qquad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots\cdots \\ &\qquad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

これらを比較すると, 第 1, 第 2 項は等しく第 3 項から第 $n+1$ 項までは a_{n+1} の項のほうが大きい. かつ, a_{n+1} が最後の 1 項だけ多いので

$$a_n < a_{n+1} \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

〔証明終〕

(2) ① より, $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots\cdots \\ &\qquad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leqq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 3 \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき, $a_1 = \left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2 < 3$ であるから

$$a_n < 3 \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

〔証明終〕

≪注意≫ (1), (2) の結果から, $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ は単調増加かつ上に有界な数列なので, 収束して $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ が存在する. その極限値は

$$2.718281828459\cdots\cdots$$

という無理数であることが知られており, 記号で e と表し, 自然対数の底と呼ぶのである.

添削課題

【1】(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x} = 1^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(2) $x-\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{4}$ のとき $t\to 0$ であり

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x-\pi}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{4t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{4}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{4}{1} = 4$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot(-1) = 1\cdot(-1) = -1$

問題

【1】

(1)　0　(答)

(2)　∞　(答)

(3)　$-\infty$　(答)

(4)　振動　(答)

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+5n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+5n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{5}{n^2}}\\ &= \frac{\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2}{1}=\frac{1}{3}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+3)-(n^2-2n+3)}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-2n+3}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\frac{4}{2}=2\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{cases}\text{(i)}\quad |a|<1\text{ のとき}\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1+a^n}=\frac{1}{1}=1\\ \text{(ii)}\quad a=1\text{ のとき}\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1+a^n}=\frac{1-1}{1+1}=0\\ \text{(iii)}\quad |a|>1\text{ のとき}\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^n}-1}{\frac{1}{a^n}+1}=\frac{-1}{1}=-1\end{cases}$$

以上から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1+a^n}=\begin{cases}1 & (|a|<1)\\ 0 & (a=1)\\ -1 & (|a|>1)\end{cases}\qquad\text{(答)}$$

(8)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n!}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n-1)(n-2)}\cdot\frac{1}{(n-3)!}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}\cdot\frac{1}{(n-3)!}\\ &=1\cdot 0=0\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【2】

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\sin x)}{x}=\frac{\cos 1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\cos 1$　　(答)

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{x^3+7x^2+16x+12}{x^3+5x^2+8x+4}&=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2(x+3)}{(x+2)^2(x+1)}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x+1}\\&=\frac{1}{-1}=-1 \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(3)

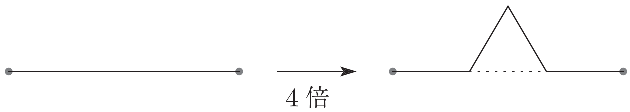
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{(1+x)-1}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)\\&=1\cdot2=2 \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos3x-\cos x}&=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{-2\sin2x\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2x}{\sin2x}\\&=-\frac{1}{4}\cdot1\\&=-\frac{1}{4} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

【3】

多角形 A_n の辺の個数を a_n とおくと，題意から



$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = 4a_n$$

より

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

よって（イ）から，A_n に 1 辺の長さ $\dfrac{1}{3^n}$ の正三角形を a_n 個付け加えたものが A_{n+1} であるから

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \cdot a_n \\ &= S_n + \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 9^n} \times 3 \cdot 4^{n-1} \\ &= S_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \qquad \text{(答)}$$

【4】

(1) $1 < a_n < 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を数学的帰納法を用いて証明する.

(I) $n = 1$ のとき, $a_1 = \dfrac{3}{2}$ より $1 < a_1 < 2$ は成立する.

(II) $n = k\ (\geqq 1)$ で成り立つとすると

$$1 < a_k < 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

このとき, $a_{k+1} = \dfrac{a_k^2 + 4}{2a_k + 3}$ より

$$a_{k+1} - 1 = \frac{a_k^2 + 4 - (2a_k + 3)}{2a_k + 3} = \frac{(a_k - 1)^2}{2a_k + 3} > 0 \qquad (\because\ ①\text{より } a_k > 1)$$

$$2 - a_{k+1} = \frac{4a_k + 6 - (a_k^2 + 4)}{2a_k + 3} = \frac{-(a_k - 2)^2 + 6}{2a_k + 3} > 0$$

$$(\because\ ①\text{より } 1 < a_k < 2)$$

$$\therefore \quad 1 < a_{k+1} < 2$$

よって $n = k + 1$ のとき成立する.

以上, (I)(II) から $1 < a_n < 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots ②$ が示された. （証明終）

(2)

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n + 3} = \frac{a_n - 1}{2a_n + 3}(a_n - 1)$$

ここで ② から

$$0 < \frac{a_n - 1}{2a_n + 3} < \frac{2 - 1}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{1}{5}$$

であるから,

$$a_{n+1} - 1 < \frac{1}{5}(a_n - 1) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

よって示された. （証明終）

(3) (1)(2) から, $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} 0 < a_n - 1 &< \frac{1}{5}(a_{n-1} - 1) \\ &< \left(\frac{1}{5}\right)^2 (a_{n-2} - 1) \\ &\cdots\cdots \\ &< \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} (a_1 - 1) \end{aligned}$$

ここで, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} (a_1 - 1) = 0$ より, はさみうちの原理から

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - 1) = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 1 \qquad (\text{答})$$

【5】

(1) $m(a)$ を単に m と表すと，$x=m$ は $y=x^2$ と $y=a\sin x$ の交点の x 座標であるから，

$$\left|m^2\right| = |a\sin m| = |a||\sin m| \leqq |a| \xrightarrow[a\to+0]{} 0$$

より，はさみうちの原理から

$$\lim_{a\to+0} m^2 = 0$$
$$\therefore \quad \lim_{a\to+0} m(a) = 0\text{（証明終）}$$

(2) 条件より

$$m^2 = a\sin m, \quad m \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{a} = \frac{\sin m}{m} \ \cdots\cdots ①$$

であり，(1) より，$a \to +0$ のとき $m \to 0$ であるから

$$\lim_{a\to+0}\frac{m(a)}{a} = \lim_{m\to 0}\frac{\sin m}{m} \qquad (\because\ ①)$$
$$= 1 \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$ 　　(答)

(2) $x=-t$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)&=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{4t^2+t}-2t\right)\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2+t)-4t^2}{\sqrt{4t^2+t}+2t}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{t}}+2}\\&=\mathbf{\frac{1}{4}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{4}{3}\\&=1\cdot 1\cdot\frac{4}{3}\\&=\mathbf{\frac{4}{3}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(4) $1-\cos x=\theta$ とおくと，$x\to 0$ のとき $\theta\to 0$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{1}{8}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

《注意》

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\&=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

を用いている．これは記憶しておきたい極限である．

M2JC

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	