M2JS/M2J

本科１期４月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２選抜東大数学

高２東大数学

問題

【1】$y = ax^2 + bx + c$ を x 軸に関して対称移動すると

$$y = -ax^2 - bx - c$$

さらに x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動すると

$$y + 1 = -a(x-2)^2 - b(x-2) - c$$
$$\therefore \quad y = -ax^2 + (4a - b)x - 4a + 2b - c - 1$$

これが，$y = 2x^2$ に一致するから

$$-a = 2,\ 4a - b = 0,\ -4a + 2b - c - 1 = 0$$

よって，これを解いて

$$a = -2,\ b = -8,\ c = -9 \qquad (答)$$

＜別解＞

$y = ax^2 + bx + c$ の頂点を $(p,\ q)$ とおく．x 軸に関して対称移動すると $(p, -q)$.
さらに x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動すると $(p+2,\ -q-1)$.
このとき，頂点の座標は $(0,\ 0)$ だから $p = -2,\ q = -1$.
よって

$$y = ax^2 + bx + c = -2(x+2)^2 - 1 = -2x^2 - 8x - 9$$

あるいは，$y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に -2, y 軸方向に 1 だけ平行移動すると

$$y = 2(x+2)^2 + 1 = 2x^2 + 8x + 9$$

このグラフを x 軸に関して対称移動すると

$$y = -2x^2 - 8x - 9$$

となる．よって

$$a = -2,\ b = -8,\ c = -9 \qquad (答)$$

【2】 $f(x)=(x-a)^2-a^2+a$ の軸は $x=a$ であるから

軸	$a<-1$	$-1\leqq a<0$	$0\leqq a<1$	$1\leqq a$
M	$f(1)$	$f(1)$	$f(-1)$	$f(-1)$
m	$f(-1)$	$f(a)$	$f(a)$	$f(1)$

ここで

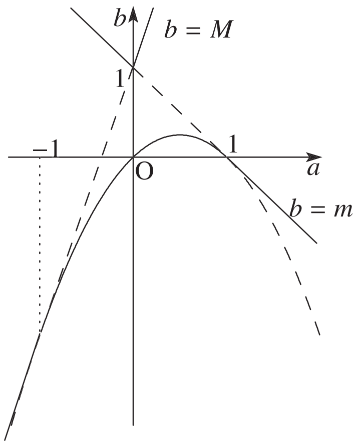
$$\begin{cases} f(1)=1-a \\ f(-1)=1+3a \\ f(a)=-a^2+a \end{cases}$$

であるから

$$M=\begin{cases} -a+1 & (a<0) \\ 3a+1 & (0\leqq a) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

$$m=\begin{cases} 3a+1 & (a<-1) \\ -a^2+a & (-1\leqq a<1) \\ -a+1 & (1\leqq a) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

となる．これを ab 平面上に図示すると



また，このとき

$$-a^2+a=3a+1 \Longrightarrow a^2+2a+1=(a+1)^2=0$$
$$-a^2+a=-a+1 \Longrightarrow a^2-2a+1=(a-1)^2=0$$

より，2 直線 $b=3a+1$, $b=-a+1$ は 放物線 $b=-a^2+a$ と接する．

【3】$f(x)=(x-1)^2+2$ より，軸は $x=1$ であるから

軸	$1<t$	$t \leqq 1 < t+\frac{1}{2}$	$t+\frac{1}{2} \leqq 1 < t+1$	$t+1 \leqq 1$
t	$1<t$	$\frac{1}{2}<t \leqq 1$	$0<t \leqq \frac{1}{2}$	$t \leqq 0$
M	$f(t+1)$	$f(t+1)$	$f(t)$	$f(t)$
m	$f(t)$	$f(1)$	$f(1)$	$f(t+1)$

ここで

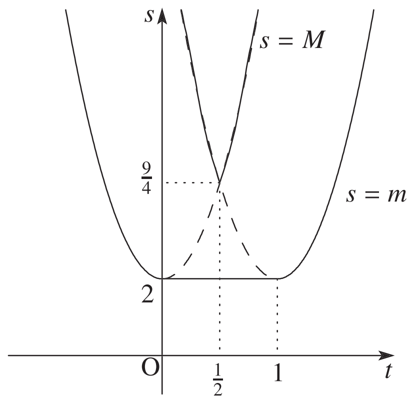
$$\begin{aligned}&f(t)=(t-1)^2+2\\&f(t+1)=t^2+2\\&f(1)=2\end{aligned}$$

であるから

$$M=\begin{cases} t^2+2 & \left(\dfrac{1}{2}<t\right) \\ (t-1)^2+2 & \left(t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

$$m=\begin{cases} (t-1)^2+2 & (1<t) \\ 2 & (0<t \leqq 1) \\ t^2+2 & (t \leqq 0) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

であり，これを ts 平面上に図示すると



【4】(1) $f(x)=x^2+a\ (-1\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値は

$$\text{最大値：}\ f(-1)=f(1)=1+a,\ \text{最小値：}\ f(0)=a$$

であり，$y=f(x)$ のグラフが長方形 R に含まれるための条件は

$$a\geqq -\frac{1}{2}\ \text{かつ}\ 1+a\leqq\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad -\frac{1}{2}\leqq a\leqq -\frac{1}{2}$$

すなわち

$$a=-\frac{1}{2}\qquad \text{(答)}$$

(2) 軸の位置，つまり b の値で場合分けを行う．

(i) $b<-2$ のとき，$g(x)$ の最大値と最小値は

$$\text{最大値：}\ g(-1)=1-b+c,\ \text{最小値：}\ g(1)=1+b+c$$

であり，最大値と最小値の差は

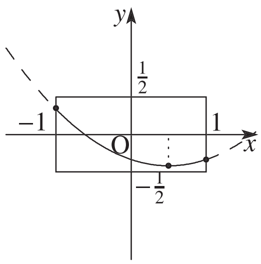
$$g(-1)-g(1)=-2b>2$$

この場合，$y=g(x)$ のグラフが長方形 R に含まれることはない．

(ii) $b>2$ のときも (i) と同様に，不適．

(iii) $-2\leqq b\leqq 0$ のとき，$g(x)$ の最大値と最小値は図 1.1 を参考にして $y=g(x)$ のグラフは図 1.1 のようになり，

図 1.1



$$\text{最大値：}\ g(-1)=1-b+c,\ \text{最小値：}\ g\left(-\frac{b}{2}\right)=c-\frac{b^2}{4}$$

よって，$y=g(x)$ のグラフが長方形 R に含まれるためには

$$1-b+c\leqq\frac{1}{2}\ \text{かつ}\ -\frac{1}{2}\leqq c-\frac{b^2}{4}\qquad\therefore\quad \frac{b^2}{4}-\frac{1}{2}\leqq c\leqq b-\frac{1}{2}$$

ここで，$b-\dfrac{1}{2}\leqq-\dfrac{1}{2}$ より，上式をみたす c が存在するためには

$$\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2}\leqq-\frac{1}{2}\quad\therefore\ b=0$$

であり，このとき

$$c = -\frac{1}{2}$$

(iv) $0 \leqq b \leqq 2$ のとき，(iii) と同様に

$$b = 0,\ c = -\frac{1}{2}$$

したがって，求める b, c の値は

$$b = 0,\ c = -\frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 図 1.2，図 1.3 のように $f(a) = f(a+1)$ を満たす a の値を求める．

図 1.2

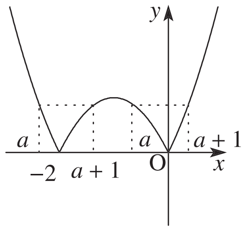
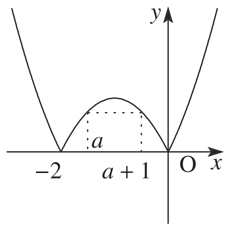


図 1.3



(I) $-3 < a < -2$ のとき

$$f(a) = a^2 + 2a,\ f(a+1) = -(a+1)^2 - 2(a+1)$$

であるから，$-3 < a < -2$ に注意して

$$a^2 + 2a = -a^2 - 4a - 3 \quad \therefore\ 2a^2 + 6a + 3 = 0$$

すなわち

$$a = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$$

(II) $-2 < a < -1$ のとき

$$f(a) = -a^2 - 2a,\ f(a+1) = -(a+1)^2 - 2(a+1)$$

であるから

$$-a^2 - 2a = -a^2 - 4a - 3 \quad \therefore\ 2a = -3$$

すなわち

$$a = -\frac{3}{2}$$

(III) $-1 < a < 0$ のとき

$$f(a) = -a^2 - 2a,\ f(a+1) = (a+1)^2 + 2(a+1)$$

であるから，$-1 < a < 0$ に注意して

$$-a^2 - 2a = a^2 + 4a + 3 \quad \therefore\ 2a^2 + 6a + 3 = 0$$

すなわち

$$a = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$$

次に，a の値で場合を分けて，$f(x)$ の最大値 M を求める．

(i) $a < \dfrac{-3 - \sqrt{3}}{2}$ のとき

$a \leqq x \leqq a+1$ における $y = f(x)$ のグラフは図 1.4 または図 1.5 の実線部分のようになり

$$M = f(a) = a^2 + 2a$$

図 1.4

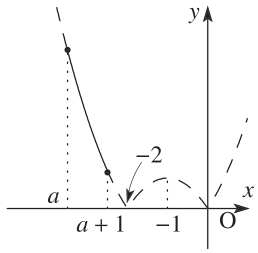
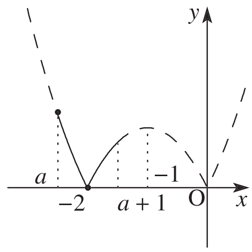


図 1.5



(ii) $\dfrac{-3-\sqrt{3}}{2} \leqq a < -2$ のとき

$a \leqq x \leqq a+1$ における $y = f(x)$ のグラフは図 1.6 の実線部分のようになり

$$M = f(a+1) = -a^2 - 4a - 3$$

図 1.6

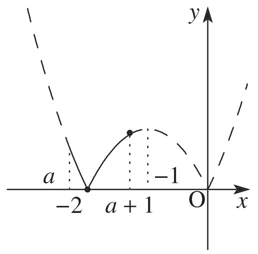
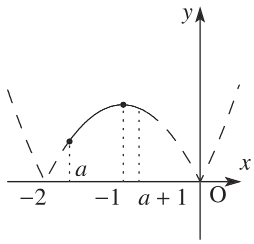


図 1.7



(iii) $-2 \leqq a \leqq -1$ のとき

$a \leqq x \leqq a+1$ における $y = f(x)$ のグラフは図 1.7 の実線部分のようになり

$$M = f(-1) = 1$$

(iv) $-1 < a \leqq \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2}$ のとき

$a \leqq x \leqq a+1$ における $y = f(x)$ のグラフは，図 1.8 の実線部分のようになり

$$M = f(a) = -a^2 - 2a$$

(v) $\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2} < a$ のとき

$a \leqq x \leqq a+1$ における $y = f(x)$ のグラフは，図 1.9 の実線部分のようになり

$$f(a+1) = a^2 + 4a + 3$$

図 1.8

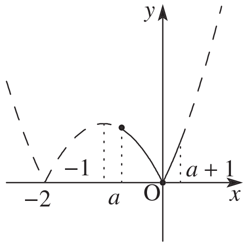
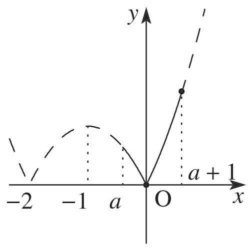


図 1.9

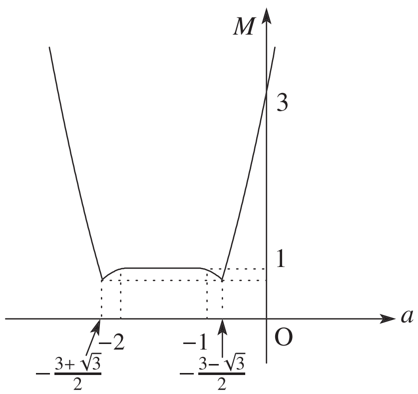


以上より，M の値は

$$\begin{cases} a < -\dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \text{のとき} & a^2+2a \\ -\dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \leqq a < -2 \text{ のとき} & -a^2-4a-3 \\ -2 \leqq a \leqq -1 \text{ のとき} & 1 \\ -1 < a \leqq \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2} \text{のとき} & -a^2-2a \\ \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2} < a \text{ のとき} & a^2+4a+3 \end{cases}$$

よって，グラフは図 1.10 のようになる．

図 1.10



(2) (1) の結果より，求める最小値は，$a = -\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ のとき

$$\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{2}+2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】与式を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 4ax + a + a^2 \\ &= 2(x-a)^2 - a^2 + a \end{aligned}$$

よって，放物線 $y = f(x)$ の軸の方程式は $x = a$ である．以下，a の値で場合を分ける．

図 1.1

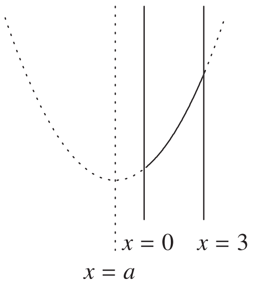


図 1.2

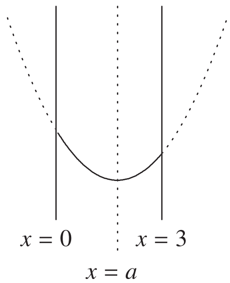
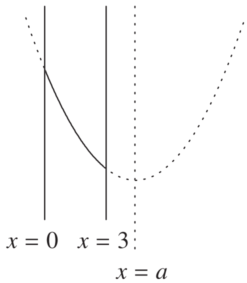


図 1.3



(i) $a < 0$ のとき

グラフは図 1.1 のようになるから，最小値 m は

$$m = f(0) = a^2 + a$$

これが 0 に等しいので

$$\begin{aligned} &a^2 + a = 0 \\ &a(a+1) = 0 \\ &a = -1,\ 0 \end{aligned}$$

$a < 0$ より

$$a = -1$$

(ii) $0 \leqq a \leqq 3$ のとき

グラフは図 1.2 のようになるから，最小値 m は

$$m = f(a) = -a^2 + a$$

これが 0 に等しいので

$$\begin{aligned} &-a^2 + a = 0 \\ &a(a-1) = 0 \\ &a = 0,\ 1 \end{aligned}$$

これらは，ともに $0 \leqq a \leqq 3$ をみたす．

(iii) $a > 3$ のとき

グラフは図 1.3 のようになるから，最小値 m は

$$m = f(3) = a^2 - 11a + 18$$

これが 0 に等しいので

$$
\begin{aligned}
&a^2 - 11a + 18 = 0 \\
&(a-2)(a-9) = 0 \\
&a = 2,\ 9
\end{aligned}
$$

$a > 3$ より

$$a = 9$$

以上より，求める a の値は

$$a = -1,\ 0,\ 1,\ 9 \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】与式を

$$f(x) = x^2 - 2px + 2 - p = (x - p)^2 + 2 - p - p^2$$

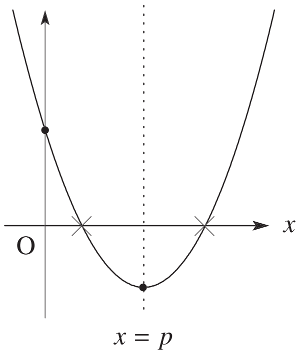
とおく.

(1) 条件は

$$\begin{cases} (\text{軸の } x \text{ 座標}) > 0 \\ (\text{頂点の } y \text{ 座標}) \leqq 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$$

である (図 2.1 参照).

図 2.1



条件より

$$\begin{cases} p > 0 \\ 2 - p - p^2 \leqq 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p > 0 \\ (p + 2)(p - 1) \geqq 0 \\ 2 - p > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p > 0 \\ p \leqq -2 \text{ または } 1 \leqq p \\ p < 2 \end{cases}$$

したがって，求める p の範囲は

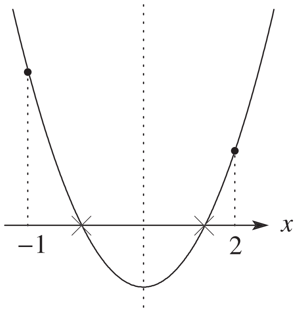
$$1 \leqq p < 2 \qquad (\text{答})$$

(2) 条件は

$$\begin{cases} -1 < (\text{軸の } x \text{ 座標}) < 2 \\ (\text{頂点の } y \text{ 座標}) \leqq 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

である (図 2.2 参照).

図 2.2



条件より

$$\begin{cases} -1 < p < 2 \\ 2 - p - p^2 \leqq 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < p < 2 \\ p \leqq -2 \text{ または } 1 \leqq p \\ p + 3 > 0 \\ 6 - 5p > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -1 < p < 2 \\ p \leqq -2 \text{ または } 1 \leqq p \\ p > -3 \\ p < \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

したがって，求める p の範囲は

$$1 \leqq p < \frac{6}{5} \qquad (答)$$

【2】 $f(x) = x^2 + ax + a + 3$ とおき，$y = f(x)$ のグラフが $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲でつねに x 軸より上にある条件を求める．図をかくと次の場合が考えられる．

図 2.3

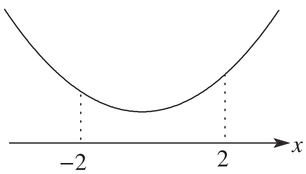


図 2.4

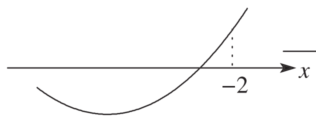
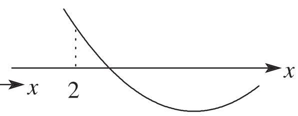


図 2.5



$x^2 + ax + a + 3 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = a^2 - 4(a + 3) = (a + 2)(a - 6)$$

となる．次の 3 つの場合について考える．

(i) $D<0 \iff -2<a<6$ のとき

$y=x^2+ax+a+3$ のグラフは x^2 の係数が正なのでつねに x 軸より上にあるから，$-2 \leqq x \leqq 2$ において

$$x^2+ax+a+3>0$$

が成立する.

(ii) $D=0 \iff a=-2,\ 6$ のとき

$y=x^2+ax+a+3$ のグラフは x 軸に接する．$a=-2$ のとき，$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$ となり，$-2 \leqq x \leqq 2$ において

$$x^2+ax+a+3>0$$

は不成立.

$a=6$ のとき，$y=x^2+6x+9=(x+3)^2$ となり，$-2 \leqq x \leqq 2$ において

$$x^2+ax+a+3>0$$

が成立する.

(iii) $D>0 \iff a<-2,\ 6<a$ のとき

$$f(x)=x^2+ax+a+3=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2-4a-12}{4}$$

とおくと，求める条件は

$$f(-2)>0,\ f(2)>0 \text{ かつ } (\text{軸} <-2 \text{ または } \text{軸} >2)$$

となるときである.

$$f(-2)>0 \text{ より} \quad -a+7>0 \quad \therefore\ a<7$$
$$f(2)>0 \text{ より} \quad 3a+7>0 \quad \therefore\ a>-\frac{7}{3}$$

軸の方程式は $x=-\dfrac{a}{2}$ なので

$$-\frac{a}{2}<-2 \text{ または } -\frac{a}{2}>2 \quad \therefore\ a>4 \text{ または } a<-4$$

以上より

$$6<a<7$$

(i)，(ii)，(iii) より

$$-2<a<7 \qquad (\text{答})$$

【3】(1) $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-(2a^2-a+3)>0 \qquad \therefore\quad a^2+5a-6=(a-1)(a+6)<0$$

すなわち

$$-6<a<1 \qquad (\text{答})$$

(2) $f(x)=0$ の 2 解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2(a-3),\ \alpha\beta=2a^2-a+3$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\ &= \{2(a-3)\}^2-4(2a^2-a+3)\\ &= -4a^2-20a+24\end{aligned}$$

であるから，$\beta-\alpha \geqq 2$ より

$$-4a^2-20a+24 \geqq 4$$

$$\therefore\quad a^2+5a-5 \leqq 0$$

すなわち

$$\frac{-5-3\sqrt{5}}{2} \leqq a \leqq \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}$$

であり，これは (1) をみたす．　　(答)

【4】$x^2-2x-3 \geqq 0$ のとき ($x \leqq -1,\ x \geqq 3$ のとき)

$$|x^2-2x-3| = x^2-2x-3 = (x-1)^2-4$$

となる．

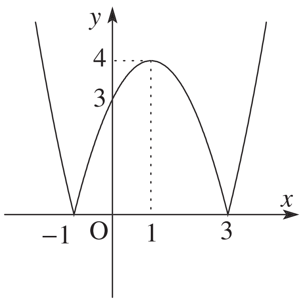
$x^2-2x-3<0$ のとき ($-1<x<3$ のとき)

$$|x^2-2x-3| = -x^2+2x+3 = -(x-1)^2+4$$

となる．

よって，$y=|x^2-2x-3|$ のグラフは図 2.6 のようになる．

図 2.6

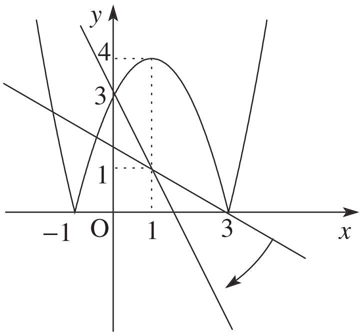


(1) 与式より

$$\begin{cases} y = |x^2 - 2x - 3| & \cdots ① \\ y = k(x-1) + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

とおくと，$x \geqq 0$ で $|x^2 - 2x - 3| \geqq k(x-1) + 1$ となるのは，① のグラフが ② のグラフの下にないときである．ここで，② のグラフはつねに点 (1, 1) を通るので，図 2.7 のようになることが条件である．

図 2.7



よって，② が点 (3, 0), (0, 3) を通る k の値をそれぞれ k_1, k_2 とすると

$$k_2 \leqq k \leqq k_1$$

である．ここで，図 2.7 より

$$k_1 = -\frac{1}{2},\ k_2 = -2$$

であるから

$$-2 \leqq k \leqq -\frac{1}{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) と同様に考える．

$$y = k(x-5) + 11 \ \cdots ③$$

とおくと，$x \geqq 0$ で $|x^2 - 2x - 3| \geqq k(x-5) + 11$ となるためには ① のグラフが ③ のグラフの下にないことが条件である．ここで，③ は点 (5, 11) を通るので図 2.8 のように ③ が ① と接するときを考える．

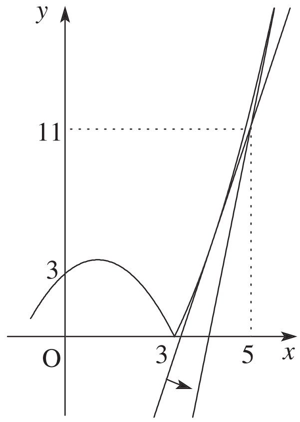
$x \geqq 3$ で考えれば十分なので

$$x^2 - 2x - 3 = k(x-5) + 11$$
$$x^2 - (k+2)x + 5k - 14 = 0$$

接するための条件は，判別式を D とすると

$$D = (k+2)^2 - 4(5k-14) = 0$$

図 2.8



ゆえに

$$(k-6)(k-10)=0 \qquad \therefore \quad k=6,\ 10$$

図 2.8 より，接点の x 座標が 3 より大きいことを調べると x の接点は $\dfrac{k+2}{2}$ より
$k=6$ のとき

$$x=\frac{6+2}{2}=4>3$$

$k=10$ のとき

$$x=\frac{10+2}{2}=6>3$$

よって，求める k の範囲は

$$6 \leqq k \leqq 10 \qquad (答)$$

【5】与方程式を同値変形すると

$$(与方程式) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+ax+1=0 \ \cdots ① \\ \quad または \\ 3x^2+ax-3=0 \ \cdots ② \end{cases}$$

① の判別式を D_1 とすると

$$D_1=a^2-4$$

であるから

$$\begin{cases} D_1>0 \ \Leftrightarrow \ a<-2,\ 2<a \ のとき & ①は相異なる 2 実数解をもつ \\ D_1=0 \ \Leftrightarrow \ a=\pm 2 \ のとき & ①は 1 つの実数解 (重解) をもつ \\ D_1<0 \ \Leftrightarrow \ -2<a<2 \ のとき & ①は実数解をもたない \end{cases}$$

また，② の判別式を D_2 とすると

$$D_2=a^2+36>0$$

であるから，② は任意の a について 2 つの実数解をもつ.
また，① と ② が共通解 α をもつとき

$$\begin{cases}\alpha^2+a\alpha+1=0\\3\alpha^2+a\alpha-3=0\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha^2+a\alpha+1=0\\2\alpha^2-4=0\end{cases}$$

$$\iff \alpha=\pm\sqrt{2},\ a=\mp\frac{3\sqrt{2}}{2}\quad(\text{複号同順})$$

である．以上まとめると，① または ② をみたす x の個数は

$$\begin{cases}a<-2,\ 2<a \text{ かつ } a\neq\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \text{ のとき} & 4\text{ 個}\\ a=\pm2,\ \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \text{ のとき} & 3\text{ 個}\\ -2<a<2 \text{ のとき} & 2\text{ 個}\end{cases}\qquad(\text{答})$$

添削課題

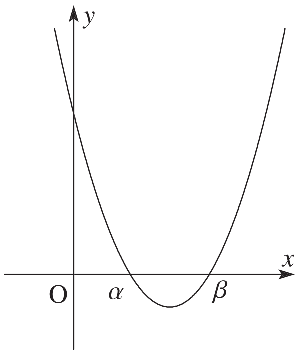
【1】$f(x) = x^2 - (k+4)x + k^2 + 3k + 3$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (k+4)x + k^2 + 3k + 3 \\ &= \left(x - \frac{k+4}{2}\right)^2 - \frac{(k+4)^2}{4} + k^2 + 3k + 3 \\ &= \left(x - \frac{k+4}{2}\right)^2 + \frac{3k^2 + 4k - 4}{4} \end{aligned}$$

よって，$y = f(x)$ の軸の方程式は $x = \dfrac{k+4}{2}$，頂点の y 座標は $\dfrac{3k^2+4k-4}{4}$ となる．

(1) 題意より，$f(x) = 0$ の 2 つの異なる実数解 α, β が $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $\alpha \neq \beta$ となるための条件を求める．

図 2.1



$\alpha < \beta$ として一般性を失なわないので，図 2.1 より

$$\begin{cases} \dfrac{3k^2+4k-4}{4} < 0 \ \cdots ① \\ f(0) = k^2 + 3k + 3 > 0 \ \cdots ② \\ \dfrac{k+4}{2} > 0 \ \cdots ③ \end{cases}$$

となる．① より

$$\begin{aligned} 3k^2 + 4k - 4 &< 0 \\ (k+2)(3k-2) &< 0 \\ \therefore \quad -2 < k &< \frac{2}{3} \end{aligned}$$

② より

$$k^2 + 3k + 3 = \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

であるから，② はつねに成り立つ．③ より

$$k > -4$$

以上より，求める k の範囲は

$$-2 < k < \frac{2}{3} \qquad (答)$$

(2) 題意より，$f(x) = 0$ の 2 つの異なる実数解 α, β が $\alpha < 1 < \beta < 2$ となる条件を求める．

図 2.2

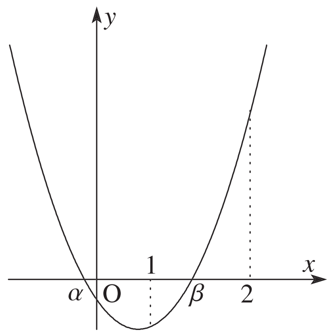


図 2.2 より

$$f(1) < 0 \quad かつ \quad f(2) > 0$$

ゆえに

$$\begin{cases} f(1) = k^2 + 2k < 0 \ \cdots ④ \\ f(2) = k^2 + k - 1 > 0 \ \cdots ⑤ \end{cases}$$

となる．④ より

$$k(k+2) < 0 \qquad \therefore \quad -2 < k < 0$$

⑤ より

$$k < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < k$$

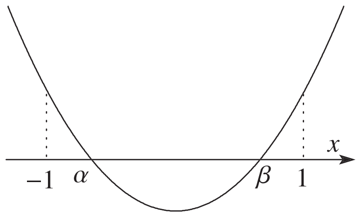
以上より，求める k の範囲は

$$-2 < k < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad (答)$$

(3) 題意より，$f(x) = 0$ の実数解 α, β が $-1 \leqq \alpha \leqq 1, \ -1 \leqq \beta \leqq 1$ となる条件を求める．$\alpha \leqq \beta$ として一般性を失わないので，図 2.3 より

$$\begin{cases} \dfrac{3k^2+4k-4}{4} \leqq 0 \ \cdots ⑥ \\ f(-1) = k^2 + 4k + 8 \geqq 0 \ \cdots ⑦ \\ f(1) = k^2 + 2k \geqq 0 \ \cdots ⑧ \\ -1 \leqq \dfrac{k+4}{2} \leqq 1 \ \cdots ⑨ \end{cases}$$

図 2.3



⑥ より

$$-2 \leqq k \leqq \frac{2}{3}$$

⑦ より

$$(k+2)^2 + 4 \geqq 0$$

であるが，これはつねに成り立つ．⑧ より

$$k \leqq -2,\ k \geqq 0$$

⑨ より

$$-6 \leqq k \leqq -2$$

以上より，求める k の範囲は

$$k = -2 \qquad (答)$$

問題

【1】$k = x^2 - 4xy + 5y^2 - 2y + 2$ とおく．

$$k = (x - 2y)^2 + y^2 - 2y + 2$$

であるから，y を定数とみたとき，k は $x = 2y$ のとき最小値 $y^2 - 2y + 2$ をとる．
このとき

$$k = y^2 - 2y + 2 = (y - 1)^2 + 1$$

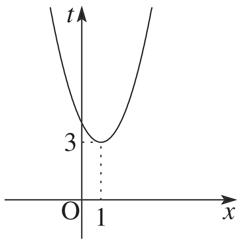
であるから，y を実数全体で変化させたとき，k は $y = 1$ のとき最小値 1 をとる．
すなわち

$$x = 2y \quad \text{かつ} \quad y = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (x,\ y) = (2,\ 1)$$

のとき，k は最小値 1 をとる．　　(答)

【2】$a = 0$ のとき，$f(x) = b$．題意より，$b = a^2 = 0$ となり，$f(x) = 0$．これは $f(0) = 4 - b = 4$ に反するので，$a \fallingdotseq 0$.

図 3.1

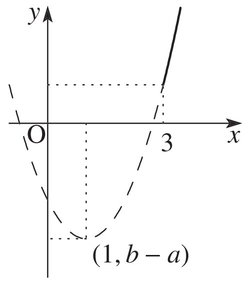


$x^2 - 2x + 4 = t$ とおき，$y = f(x)$ とすると

$$\begin{aligned} y &= at^2 - 2at + b \\ &= a(t - 1)^2 + b - a \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

また，$t = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3$ より，t は $x = 1$ のとき最小値 3 をとる．ゆえに，
$t \geqq 3$　$\cdots\cdots$②
①は $(1, b - a)$ を頂点とし，②の範囲で最小値を持つので，下に凸の放物線である．ゆえに，$a > 0$.

図 3.2



②より，①は $t=3$ のとき最小値をとるので

$$a^2 = 4a + b - a \iff a^2 - 3a - b = 0 \ \cdots ③$$

また，$f(0) = 4 - b$ であるから

$$16a - 8a + b = 4 - b \iff 4a + b = 2 \ \cdots ④$$

③，④より b を消去して

$$a^2 + a - 2 = 0 \iff (a-1)(a+2) = 0$$

$a > 0$ であるから

$$a = 1 \qquad (\text{答})$$

これを④に代入すると

$$b = -2 \qquad (\text{答})$$

よって，$y = t^2 - 2t - 2$ となる．
次に，$y = 6$ のとき

$$\begin{aligned} &t^2 - 2t - 2 = 6 \\ &(t-4)(t+2) = 0 \\ \therefore\quad &t = 4,\ -2 \end{aligned}$$

②より

$$t = 4$$

従って

$$x^2 - 2x + 4 = 4 \iff x(x-2) = 0$$

よって

$$x = 0,\ 2 \qquad (\text{答})$$

【3】 $x+2y+3z=7$ より

$$x=7-2y-3z$$

これを $x^2+y^2+z^2$ に代入して

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 &= (7-2y-3z)^2+y^2+z^2 \\
&= 49-28y-42z+4y^2+12yz+9z^2+y^2+z^2 \\
&= 5y^2+(12z-28)y+10z^2-42z+49 \\
&= 5\left(y+\frac{6z-14}{5}\right)^2-\frac{(6z-14)^2}{5}+10z^2-42z+49 \\
&= 5\left(y+\frac{6z-14}{5}\right)^2+\frac{14}{5}z^2-\frac{42}{5}z+\frac{49}{5} \\
&= 5\left(y+\frac{6z-14}{5}\right)^2+\frac{14}{5}\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2} \\
&\geqq \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

等号は

$$z=\frac{3}{2} \quad \text{かつ} \quad y=-\frac{6z-14}{5} \quad \text{かつ} \quad x+2y+3z=7$$

すなわち

$$z=\frac{3}{2},\ y=1,\ x=\frac{1}{2}$$

のとき，成立.

よって，$x^2+y^2+z^2$ の最小値は $\dfrac{7}{2}$. (答)

＜別解＞

コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
&(1\cdot x+2\cdot y+3\cdot z)^2 \leqq (1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2) \\
&(x+2y+3z)^2 \leqq 14(x^2+y^2+z^2) \\
\therefore\quad &x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{7^2}{14}=\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

等号は，$x:y:z=1:2:3$，すなわち $(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき，成立.

よって，$x^2+y^2+z^2$ の最小値は $\dfrac{7}{2}$. (答)

【4】 (i) まず，x を固定して考える．$x = x_0$ (一定) であるとすると

$$f(x_0,\ y) = ay^2 - 2x_0 y + a{x_0}^2 - 2x_0$$

ここで，$a = 0$ とすると

$$f(x_0,\ y) = -2x_0 y - 2x_0$$

で，y の一次関数となり，最小値は存在しない．

また，$a < 0$ とすると，$z = f(x_0,\ y)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，やはり最小値は存在しない．

よって

$$a > 0 \quad \cdots\cdots①$$

であることが必要である．

さて，このとき

$$f(x_0,\ y) = a\left(y - \frac{x_0}{a}\right)^2 - \frac{{x_0}^2}{a} + a{x_0}^2 - 2x_0$$

より，$f\left(x_0,\ \dfrac{x_0}{a}\right)$ が最小値．

(ii) そこで，次に x_0 を変化させて，$f\left(x_0,\ \dfrac{x_0}{a}\right)$ の最小値を調べる．

$$f\left(x,\ \frac{x}{a}\right) = \frac{a^2 - 1}{a}x^2 - 2x$$

において，$\dfrac{a^2-1}{a} = 0$ のとき，x の一次関数となり，最小値は存在しない．

また，$\dfrac{a^2-1}{a} < 0$ とすると，$z = f\left(x,\ \dfrac{x}{a}\right)$ のグラフは 上に凸の放物線であるから，やはり最小値は存在しない．

よって

$$\frac{a^2-1}{a} > 0 \quad \cdots\cdots②$$

が必要で，このとき，

$$f\left(x,\ \frac{x}{a}\right) = \frac{a^2-1}{a}\left(x - \frac{a}{a^2-1}\right)^2 - \frac{a}{a^2-1}$$

であるので，$x = \dfrac{a}{a^2-1}$ において最小値をとる．

以上から，① かつ ②，すなわち，

$$a > 0 \text{ かつ } a^2 - 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a > 1 \qquad \text{(答)}$$

が求める条件である．

添削課題

【1】まず，(2) の m を求める．

$X = x^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(X) &= X^2 + 2aX - a + 2 \ (X \geqq 0) \\ &= (X+a)^2 - a^2 - a + 2 \ (X \geqq 0) \end{aligned}$$

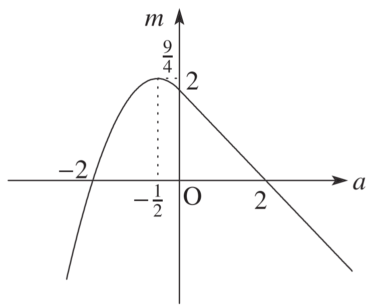
であり，$f(X)$ の最小値 m は

$$\begin{cases} (\text{軸の } X \text{ 座標}) < 0 \text{ のとき} & f(0) \\ (\text{軸の } X \text{ 座標}) \geqq 0 \text{ のとき} & f(-a) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a > 0 \text{ のとき} & -a+2 \\ a \leqq 0 \text{ のとき} & -a^2 - a + 2 \end{cases}$$

よって，m と a の関係をグラフに示すと図 3.1 のようになる．

図 3.1



(1) $f(X) = 0$ が実数解をもたないことは，$m > 0$ となることと同値であるから，求める a の範囲は

$$-2 < a < 2 \qquad (\text{答})$$

(2) 図 3.1 より，m の最大値は $a = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{9}{4}$．　　　(答)

M2JS/M2J

高２選抜東大数学

高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	