M2T

本科 1 期 4 月度

解答

Z会東大進学教室

高 2 難関大数学

問題

【1】(1) x 軸との接点の座標を $(p,\ 0)$ とおくと

$$y = a(x-p)^2$$

とおける．
点 $(0,\ -1)$ を通るので

$$-1 = a(0-p)^2 \qquad \therefore \quad -1 = ap^2 \quad \cdots ①$$

また，点 $(1,\ -4)$ を通るので

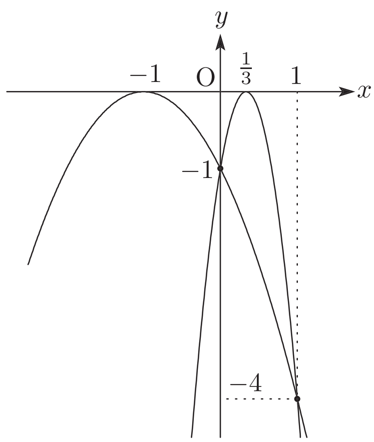
$$-4 = a(1-p)^2 \qquad \therefore \quad -4 = a(p-1)^2 \quad \cdots ②$$

① × 4 − ② より

$$a(p-1)^2 = 4ap^2$$

$a \neq 0$ より

$$\begin{aligned} & (p-1)^2 = 4p^2 \\ \Leftrightarrow \quad & p - 1 = \pm 2p \\ & \therefore \quad p = \frac{1}{3},\ -1 \end{aligned}$$



これより

$$(a,\ p) = \left(-9,\ \frac{1}{3}\right),\ (-1,\ -1)$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y = -9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2,\ y = -(x+1)^2 \qquad \text{(答)}$$

(2) x 軸との一方の交点の座標を $x = \alpha$ とすると，他方は $x = \alpha + 3$ とおけるので

$$y = a(x-\alpha)\{x - (\alpha+3)\}$$

とおける．これが，点 $(0,\ -1)$ を通るので

$$-1 = a(0-\alpha)(0-\alpha-3) \quad \Leftrightarrow \quad -1 = a\alpha(\alpha+3) \quad \cdots ①$$

点 $(3,\ 2)$ を通るので

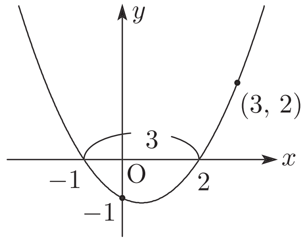
$$2 = a(3-\alpha)(3-\alpha-3) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = a\alpha(\alpha-3) \quad \cdots ②$$

① × 2 + ② より

$$2a\alpha(\alpha+3) + a\alpha(\alpha-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha(\alpha+1) = 0 \quad (\because\ a \neq 0)$$
$$\therefore \quad \alpha = -1 \quad (\because\ \alpha \neq 0)$$

したがって，①より

$$a=\frac{1}{2}$$



よって

$$y=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1 \qquad \text{(答)}$$

(3) 頂点の座標を $(t,\ 2t-1)$ とすると

$$y=a(x-t)^2+2t-1$$

とおける．点 $(-1,\ 3)$ を通るので

$$3=a(-1-t)^2+2t-1 \quad \Leftrightarrow \quad 3=a(t+1)^2+2t-1 \qquad \cdots ①$$

点 $(1,\ 11)$ を通るので

$$11=a(1-t)^2+2t-1 \quad \Leftrightarrow \quad 11=a(t-1)^2+2t-1 \qquad \cdots ②$$

① − ② より

$$a\{(t+1)^2-(t-1)^2\}=-8 \quad \Leftrightarrow \quad 4at=-8 \quad \Leftrightarrow \quad a=-\frac{2}{t}$$

これを①に代入して

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{t}(t+1)^2+2t-1=3 \\ \Leftrightarrow \quad & -2(t+1)^2+t(2t-1)=3t \\ \Leftrightarrow \quad & t=-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

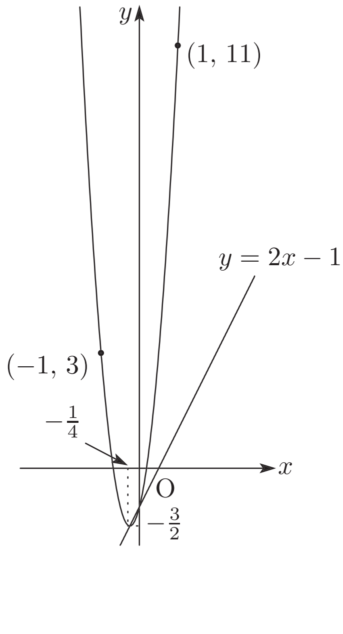
$at=-2$ より

$$a=8$$

よって，頂点の座標が $(t,\ 2t-1)=\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{3}{2}\right)$ である

ことより

$$\begin{aligned} y &= 8\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{2} \\ &= 8x^2+4x-1 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$



【2】(1) $y=(x+1)(x-2)$ のグラフを原点 O に関して対称移動したグラフの方程式は

$$y=-(-x+1)(-x-2)$$
$$\therefore\quad y=-(x-1)(x+2) \qquad \text{(答)}$$

(2) $y=(1-x)(x-2)$ のグラフを定点 $(2,\ 1)$ に関して対称移動したグラフの方程式は

$$y=-\{1-(4-x)\}\{(4-x)-2\}+2$$
$$\therefore\quad y=x^2-5x+8 \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 放物線と x 軸との交点の座標を求める．①で $y=0$ とすると

$$x^2+kx+2k=0\cdots①'$$

すなわち，x の 2 次方程式 ①′ が異なる 2 解をもつことが，① が x 軸と 2 つの共有点をもつための条件である．
①′ の判別式を D とすると，求める条件は

$$D=k^2-8k>0$$
$$k(k-8)>0$$
$$\therefore\quad k<0,\ 8<k \qquad \text{(答)}$$

(2) ①′ を x について解くと

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{D}}{2}$$

であり，x 軸から切り取る線分の長さが 3 であるから

$$\frac{-k+\sqrt{D}}{2}-\frac{-k-\sqrt{D}}{2}=3$$
$$\sqrt{D}=3$$

辺々正より 2 乗して

$$k^2-8k=9$$
$$k^2-8k-9=0$$
$$(k+1)(k-9)=0$$

よって，求める k の値は

$$k=-1,\ 9 \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 与式を平方完成すると

$$C_1 : y = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$$
$$C_2 : y = -x^2 + cx = -\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{4}$$

これより，$\mathrm{A}\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4} + b\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{c}{2},\ \frac{c^2}{4}\right)$ である．

A が C_2 上にあるので

$$-\frac{a^2}{4} + b = -\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + c\left(-\frac{a}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad b + \frac{ac}{2} = 0$$

両辺に $\frac{c^2}{4}$ を加えると

$$\frac{c^2}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + a\left(\frac{c}{2}\right) + b$$

つまり，B が C_1 上にある．　　　〔証明終〕

(2) A，B が $y = x + 2$ 上にあるので

$$\begin{cases} -\frac{a^2}{4} + b = -\frac{a}{2} + 2 & \cdots ① \\ \frac{c^2}{4} = \frac{c}{2} + 2 & \cdots ② \end{cases}$$

②より

$$c^2 - 2c - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c+2)(c-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -2,\ 4$$

$b = -\frac{ac}{2}$ を①に代入して

$$\frac{a^2}{4} + \frac{ac}{2} - \frac{a}{2} + 2 = 0$$

$c = 4$ のとき

$$\frac{a^2}{4} + 2a - \frac{a}{2} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 6a + 8 = (a+4)(a+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -4,\ -2$$

$c = -2$ のとき

$$\frac{a^2}{4} - a - \frac{a}{2} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 6a + 8 = (a-4)(a-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4,\ 2$$

$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ より，$-a \neq c$ だから

$$(a,\ c) = (4,\ -2),\ (-2,\ 4)$$
$$\therefore \quad (a,\ b,\ c) = (4,\ 4,\ -2),\ (-2,\ 4,\ 4) \qquad \text{(答)}$$

【5】点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ で x 軸に接する放物線は

$$y = k(2x+3)^2$$

とおける．点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 4\right)$ を通るので

$$4 = k\left(2\cdot\frac{1}{2}+3\right)^2 \qquad \therefore \quad k = \frac{1}{4}$$

したがって

$$y = \frac{1}{4}(2x+3)^2$$

これを y 軸方向に $-c$ だけ平行移動すると

$$y = \frac{1}{4}(2x+3)^2 - c$$

さらに，原点に関して対称移動すると

$$\begin{aligned} -y &= \frac{1}{4}(-2x+3)^2 - c = \frac{1}{4}(4x^2-12x+9) - c = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - c \\ \Leftrightarrow \quad y &= -x^2 + 3x - \frac{9}{4} + c \end{aligned}$$

これが，$y = ax^2 + bx + 5$ と一致するので

$$a = -1, \quad b = 3, \quad -\frac{9}{4} + c = 5$$

$$\therefore \quad a = -1, \quad b = 3, \quad c = \frac{29}{4} \qquad \text{(答)}$$

【6】与式を平方完成すると

$$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \quad \cdots ①$$

(1) ①より

$$頂点 \left(-\frac{p}{2},\ -\frac{p^2}{4} + q\right) \quad \cdots ②$$

となり, これが $y = -\dfrac{1}{2}x - 3$ 上にあるので

$$\begin{aligned} & -\frac{p^2}{4} + q = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{p}{2}\right) - 3 \\ \Leftrightarrow \quad & q = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}p - 3 \quad \cdots ③ \\ \Leftrightarrow \quad & q = \frac{1}{4}\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad q \geqq -\frac{49}{16} \qquad (答)$$

(2) ①が原点を通るので

$$q = 0$$

このとき, ③より

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}p - 3 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad p^2 + p - 12 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (p-3)(p+4) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad p = 3,\ -4 \end{aligned}$$

となるので

$$(p,\ q) = (3,\ 0), (-4,\ 0)$$

よって, ②より, 頂点の座標は

$$\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right),\ (2,\ -4) \qquad (答)$$

(3) ①が x 軸と異なる 2 点で交わるので

$$D = p^2 - 4q > 0$$

となり, ③を代入すると

$$\begin{aligned} p^2 - 4\left(\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}p - 3\right) > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad -p + 12 > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad p < 12 \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

このとき, ①と x 軸との交点の x 座標は

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

となり, x 軸から切り取る線分の長さが 2 だから

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} - \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{p^2 - 4q} = 2$$

両辺 2 乗すると

$$p^2 - 4q = 4$$

となるので, ③を代入すると

$$\begin{aligned} p^2 - 4\left(\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}p - 3\right) = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad -p + 12 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad p = 8 \end{aligned}$$

これは④をみたし適するので, ③に代入して

$$q = \frac{1}{4} \times 8^2 + \frac{1}{4} \times 8 - 3 = 15$$
$$\therefore \quad (p,\ q) = (8,\ 15)$$

よって, ②より, 頂点の座標は

$(-4,\ -1)$　　(答)

問題

【1】(1) 与式より

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$$

よって

最大値 : なし，　最小値 : -1　($x = 2$ のとき)　　(答)

(2) 与式より

$$y = x^2 + 2$$

$1 \leqq x \leqq 4$ より

最大値 : 18　($x = 4$ のとき)，　最小値 : 3　($x = 1$ のとき)　　(答)

(3) 与式より

$$y = -x^2 + 2x + 5 = -(x-1)^2 + 6$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ より

最大値 : 6 ($x = 1$ のとき)，　最小値 : 2 ($x = -1$ のとき)　　(答)

【2】(1) $k = x^2 - 2x$ とおくと

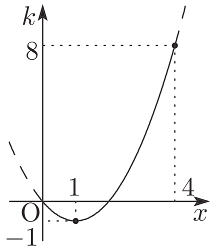
$$k = (x-1)^2 - 1 \ (0 \leqq x \leqq 4)$$

であるから，この関数のグラフは右の図の実線部分のようになる．

したがって

$$-1 \leqq x^2 - 2x \leqq 8 \qquad \text{(答)}$$

$k = x^2 - 2x$



(2) (1) より

$$-1 \leqq k \leqq 8$$

であり，

$$l = (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x)$$

とおくと

$$l = k^2 - 4k = (k-2)^2 - 4$$

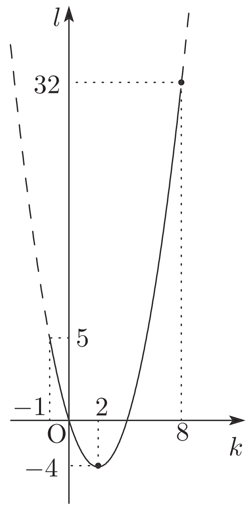
であるから，この関数のグラフは右の図の実線部分のようになる．

したがって

$k = 8$ のとき最大で, $k = 2$ のとき最小

である．

$l = k^2 - 4k$



$k = 8$ のとき，(1) のグラフより，$x = 4$

$k = 2$ のとき

$$x^2 - 2x = 2$$

$$\therefore \quad x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$0 \leqq x \leqq 4$ より，$x = 1 - \sqrt{3}$ は不適だから

$$\begin{cases} \text{最大値 } 32 \ (x = 4) \\ \text{最小値 } -4 \ (x = 1 + \sqrt{3}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3】$f(x)=(x-a)^2-a^2+a$ の軸は $x=a$ であるから，$f(x)$ の最大値，最小値は下表の通りとなる．

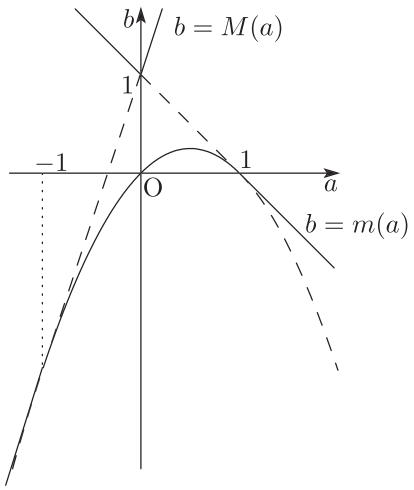
軸	$a<-1$	$-1 \leqq a<0$	$0 \leqq a<1$	$1 \leqq a$
$M(a)$	$f(1)$	$f(1)$	$f(-1)$	$f(-1)$
$m(a)$	$f(-1)$	$f(a)$	$f(a)$	$f(1)$

ここで，$\begin{cases} f(1)=1-a \\ f(-1)=1+3a \\ f(a)=-a^2+a \end{cases}$ であるから

$$b=M(a)=\begin{cases} -a+1 & (a<0) \\ 3a+1 & (0 \leqq a) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

$$b=m(a)=\begin{cases} 3a+1 & (a<-1) \\ -a^2+a & (-1 \leqq a<1) \\ -a+1 & (1 \leqq a) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

図示すると



また，このとき

$$\begin{aligned} -a^2+a=3a+1 &\iff a^2+2a+1=(a+1)^2=0 \\ -a^2+a=-a+1 &\iff a^2-2a+1=(a-1)^2=0 \end{aligned}$$

より，2 直線 $b=3a+1$，$b=-a+1$ は 放物線 $b=-a^2+a$ と接する．

【4】 $f(x)=x^2-2ax+2$ とおく．$y=(x-a)^2-a^2+2$ より，$y=f(x)$ の軸は $x=a$ である．

(i) $a \leqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}\text{最小値}: f(3) &= -6a+11=1\\ \therefore\quad a &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

これは $a \leqq 3$ に適する．

(ii) $3<a<5$ のとき

$$\begin{aligned}\text{最小値}: f(a) &= -a^2+2=1\\ \therefore\quad a &= \pm 1\end{aligned}$$

これは $3<a<5$ に適さない．

(iii) $a \geqq 5$ のとき

$$\begin{aligned}\text{最小値}: f(5) &= -10a+27=1\\ \therefore\quad a &= \frac{13}{5}\end{aligned}$$

これは $a \geqq 5$ に適さない．

以上より

$$a=\frac{5}{3} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $y=6-x \geqq 0$ より

$$x \leqq 6 \qquad \therefore \quad 0 \leqq x \leqq 6$$

$$\begin{aligned} x^2-xy+y^2 &= (x+y)^2-3xy = 36-3x(6-x) \\ &= 3(x^2-6x)+36 = 3(x-3)^2+9 \end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq 6$ のとき

最大値： 36 $\big((x,\ y)=(0,\ 6),\ (6,\ 0)$ のとき$\big)$
最小値： 9 $\big((x,\ y)=(3,\ 3)$ のとき$\big)$ (答)

(2) $x^2+y^2=1$ より

$$x^2=1-y^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -1 \leqq y \leqq 1$$

ここで

$$2x^2+y=2(1-y^2)+y=-2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$$

$y=\dfrac{1}{4}$ のとき

$$x^2=1-y^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

$$\therefore \quad x=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

このとき，最大値 $\dfrac{17}{8}$ をとる．
$y=-1$ のとき

$$x^2=1-y^2=0 \quad \text{つまり} \quad x=0$$

このとき，最小値 -1 をとる．
したがって

最大値： $\dfrac{17}{8}$ $\left(x=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4},\ y=\dfrac{1}{4}\text{ のとき}\right)$
最小値： -1 $\big(x=0,\quad y=-1$ のとき$\big)$ (答)

添削課題

【1】$f(x)=(x-1)^2+2$ より，軸は $x=1$ であるから，$f(x)$ の最大値，最小値は下表の通りとなる．

軸	$1<t$	$t \leqq 1 < t+\frac{1}{2}$	$t+\frac{1}{2} \leqq 1 < t+1$	$t+1 \leqq 1$
t	$1<t$	$\frac{1}{2}<t \leqq 1$	$0<t \leqq \frac{1}{2}$	$t \leqq 0$
$M(t)$	$f(t+1)$	$f(t+1)$	$f(t)$	$f(t)$
$m(t)$	$f(t)$	$f(1)$	$f(1)$	$f(t+1)$

ここで

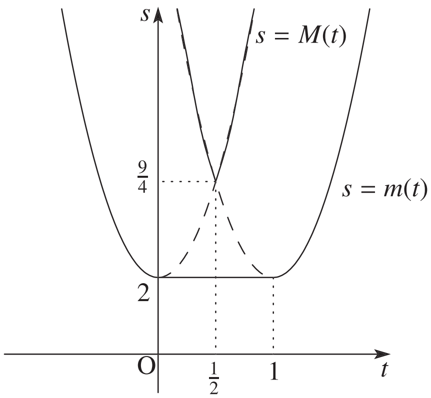
$$f(t)=(t-1)^2+2$$
$$f(t+1)=t^2+2$$
$$f(1)=2$$

であるから，求めるグラフは

$$s=M(t)=\begin{cases} t^2+2 & \left(\dfrac{1}{2}<t\right) \\ (t-1)^2+2 & \left(t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad (答)$$

$$s=m(t)=\begin{cases} (t-1)^2+2 & (1<t) \\ 2 & (0<t \leqq 1) \\ t^2+2 & (t \leqq 0) \end{cases} \qquad (答)$$

であり，図示すると，下図のようになる．



問題

【1】(1) $f(0) = a + 2 < 0$ より

$a < -2$　　(答)

(2) $f(0) = a + 2 > 0$ より

$a > -2$　$\cdots$①

また，$f(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} & D/4 = a^2 - (a+2) \geqq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a+1)(a-2) \geqq 0 \\ \Leftrightarrow\ & a \leqq -1,\ a \geqq 2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

さらに，$y = f(x)$ の軸の方程式は，$x = a$ となるので

$x = a > 0$　$\cdots$③

①, ②, ③より

$a \geqq 2$　　(答)

(3) $f(0) = a + 2 > 0$ より

$a > -2$　$\cdots$①

また，$D \geqq 0$ より

$a \leqq -1,\ a \geqq 2$　$\cdots$②

さらに，$y = f(x)$ の軸の方程式は，$x = a$ となるので

$x = a < 0$　$\cdots$③

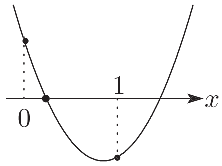
①, ②, ③より

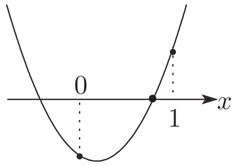
$-2 < a \leqq -1$　　(答)

【2】 $f(x) = ax^2 + (a+7)x + 2a - 7$ とおく．次の (I)〜(III) の場合に分けられる．

(I) 0 と 1 の間に 1 つの解をもつとき

$$\begin{aligned} & f(0)f(1) \\ = \ & (2a-7)(a+a+7+2a-7) \\ = \ & (2a-7)(4a) \ < \ 0 \\ & \therefore \quad 0 < a < \frac{7}{2} \end{aligned}$$





(II) 0 と 1 の間に 2 つの解をもつとき

$f(x) = 0$ の判別式 D について

$$\begin{aligned} D &= (a+7)^2 - 4a(2a-7) \\ &= a^2 + 14a + 49 - 8a^2 + 28a \\ &= -7a^2 + 42a + 49 \\ &= -(7a+7)(a-7) \ \geqq \ 0 \qquad \therefore \quad -1 \leqq a \leqq 7 \end{aligned}$$

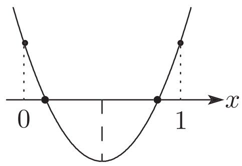
この条件の下で

(i) $a > 0$ のとき

$$f(0) > 0, \quad f(1) > 0, \quad 0 < -\frac{a+7}{2a} < 1$$

$$\iff \begin{cases} 2a - 7 > 0 \\ a > 0 \\ 0 < -(a+7) < 2a \end{cases}$$

これらの共通解なし．

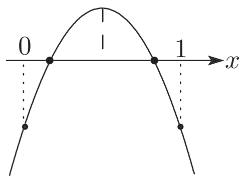


(ii) $a < 0$ のとき

$$f(0) < 0, \quad f(1) < 0, \quad 0 < -\frac{a+7}{2a} < 1$$

$$\iff \begin{cases} 2a - 7 < 0 \\ a < 0 \\ 0 > -(a+7) > 2a \end{cases}$$

これらの共通解なし．



(III) $x = 0$ または $x = 1$ を解にもつとき

$f(0) = 0$ のとき, $a = \dfrac{7}{2}$ である．

このとき

$$f(x) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{21}{2}x = \frac{7}{2}x(x+3)$$

$f(x) = 0$ の解は $x = 0,\ -3$ となり，不適．

$f(1) = 0$ のとき, $a = 0$ である．

このとき

$$f(x) = 7x - 7 = 7(x-1)$$

$f(x) = 0$ の解は $x = 1$ のみとなり, 不適．

(I)〜(III) より

$$0 < a < \frac{7}{2} \qquad \text{(答)}$$

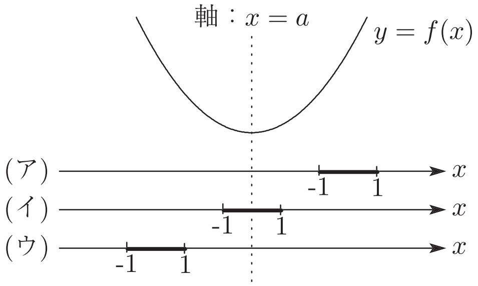
【3】 条件より

$$f(x) = x^2 - 2ax - (a-6) = (x-a)^2 - a^2 - a + 6$$

となるので, 題意をみたすためには

“ $-1 \leqq x \leqq 1$ において, ($f(x)$ の最小値) > 0 となればよい ”

ここで, $y = f(x)$ のグラフを描くと



となるので

(ア) $a \leqq -1$ のとき

$$f(-1) = a + 7 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > -7$$
$$\therefore \quad -7 < a \leqq -1$$

(イ) $-1 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(a) = -a^2 - a + 6 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + a - 6 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a-2)(a+3) < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 < a < 2 \end{aligned}$$
$$\therefore \quad -1 \leqq a \leqq 1$$

(ウ) $a \geqq 1$ のとき

$$f(1) = -3a + 7 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < \frac{7}{3}$$
$$\therefore \quad 1 \leqq a < \frac{7}{3}$$

よって, (ア)〜(ウ) より

$$-7 < a < \frac{7}{3} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $y=|x^2-2x|=|(x-1)^2-1|$ のグラフは

図 2 のようであり, 直線 $y=a$ との交点の数を考えると

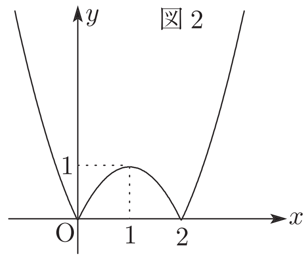


図 2

$$\begin{cases} a<0 \text{ のとき,} & 0 \text{ 個} \\ a=0,\ a>1 \text{ のとき,} & 2 \text{ 個} \\ a=1 \text{ のとき,} & 3 \text{ 個} \\ 0<a<1 \text{ のとき,} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$ (答)

(2) $y=|x^2-4x+3|$ とおく.

$$y=|x^2-4x+3|=|(x-2)^2-1|$$

であり, $y=ax$ と $y=-x^2+4x-3\ (1 \leqq x \leqq 3)$ が接するのは (図 3), これら 2 式より y を消去した 2 次方程式

$$-x^2+(4-a)x-3=0$$

の判別式 D が

$$\begin{aligned} D &= (4-a)^2-4(-1)(-3) \\ &= 16-8a+a^2-12 \\ &= a^2-8a+4 \ = \ 0 \end{aligned}$$

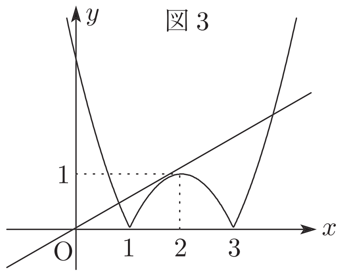


図 3

であるときだから

$$\begin{aligned} & a=4\pm\sqrt{12}=4\pm 2\sqrt{3} \\ \therefore\ & a=4-2\sqrt{3} \quad (\because 1 \leqq x \leqq 3) \end{aligned}$$

また, $y=ax$ と $y=x^2-4x+3(x<1,\ 3<x)$ が接するのも, 同様に考えて

$$\begin{aligned} & a=-4\pm 2\sqrt{3} \\ \therefore\ & a=-4-2\sqrt{3} \quad (\because x<1,\ 3<x) \end{aligned}$$

これらより, $y=ax$ と $y=|x^2-4x+3|$ の交点の個数を考えて

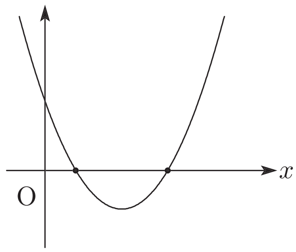
$$\begin{cases} -4-2\sqrt{3}<a<0 \text{ のとき,} & 0 \text{ 個} \\ a=-4-2\sqrt{3} \text{ のとき,} & 1 \text{ 個} \\ a<-4-2\sqrt{3},\ a=0,\ 4-2\sqrt{3}<a \text{ のとき,} & 2 \text{ 個} \\ a=4-2\sqrt{3} \text{ のとき,} & 3 \text{ 個} \\ 0<a<4-2\sqrt{3} \text{ のとき,} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$ (答)

【5】

$$f(x)=x^2-(2+k)x+k(2k+1)$$

とおく.

$$f(x)=\left(x-\frac{2+k}{2}\right)^2-\frac{(2+k)^2}{4}+k(2k+1)$$



求める条件は

$$\begin{cases} f(0)>0 \\ D>0 \\ \text{軸}>0 \end{cases}$$

だから

$$f(0)=k(2k+1)>0 \quad \Leftrightarrow \quad k<-\frac{1}{2},\ 0<k \quad \cdots①$$

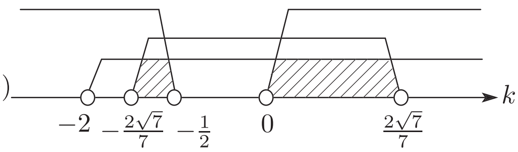
$$D=(2+k)^2-4k(2k+1)>0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2<\frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2\sqrt{7}}{7}<k<\frac{2\sqrt{7}}{7} \quad \cdots②$$

$$\text{軸}:\frac{2+k}{2}>0 \quad \Leftrightarrow \quad k>-2 \quad \cdots③$$

①, ②, ③より

$$-\frac{2\sqrt{7}}{7}<k<-\frac{1}{2},\ 0<k<\frac{2\sqrt{7}}{7}$$ (答)



【6】

$$\begin{cases} (x-a^2)(x-2a+1) \leqq 0 & \cdots ① \\ x^2-1 \geqq 0 & \cdots ② \end{cases}$$

(1) ①において

$$a^2-(2a-1)=a^2-2a+1=(a-1)^2 \geqq 0$$
$$\therefore \quad 2a-1 \leqq a^2$$

となるので

$$① \quad \Leftrightarrow \quad 2a-1 \leqq x \leqq a^2$$

また

$$② \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-1) \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqq -1,\ 1 \leqq x$$

よって，題意をみたすためには

$$\begin{cases} 2a-1 \leqq -1 \quad \Leftrightarrow \quad a \leqq 0 \\ \quad \text{かつ} \\ 1 \leqq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a \leqq -1,\ 1 \leqq a \end{cases} \qquad \therefore \quad a \leqq -1 \qquad \text{(答)}$$

(2) 題意をみたすためには

$$\begin{cases} -1 < 2a-1 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0 \\ \quad \text{かつ} \\ a^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < a < 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad 0 < a < 1 \qquad \text{(答)}$$

(3) (I) 題意をみたすためには

$$\begin{cases} 2a-1 \leqq -1 \quad \Leftrightarrow \quad a \leqq 0 \\ \quad \text{かつ} \\ a^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < a < 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad -1 < a \leqq 0 \quad \cdots ③ \qquad \text{(答)}$$

(II) ①, ②を同時にみたす x の範囲が $b \leqq x \leqq -1$ となるとき

$$b = 2a-1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{b+1}{2}$$

となるので，③に代入して

$$-1 < \frac{b+1}{2} \leqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < b+1 \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -3 < b \leqq -1 \qquad \text{(答)}$$

M2T

高２難関大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	