本科 1 期 4 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 難関大数学 K

問題

【1】(1)

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

θ は第 4 象限の角だから，$\cos\theta > 0$．ゆえに

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

また

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1 = (-2)^2 + 1 = 5$$

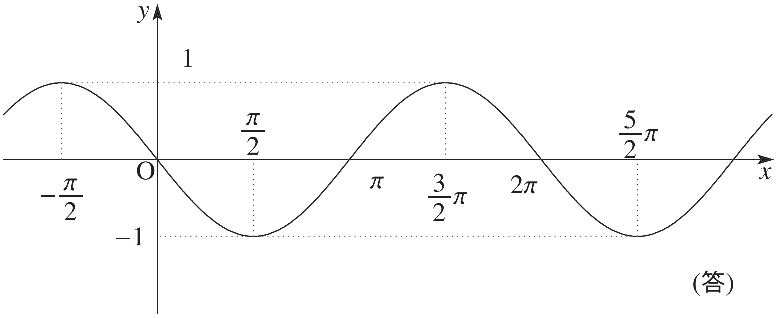
より，$\cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$．$\theta$ は第 2 象限の角だから，$\cos\theta < 0$．ゆえに

$$\cos\theta = \mathbf{-\frac{\sqrt{5}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

また

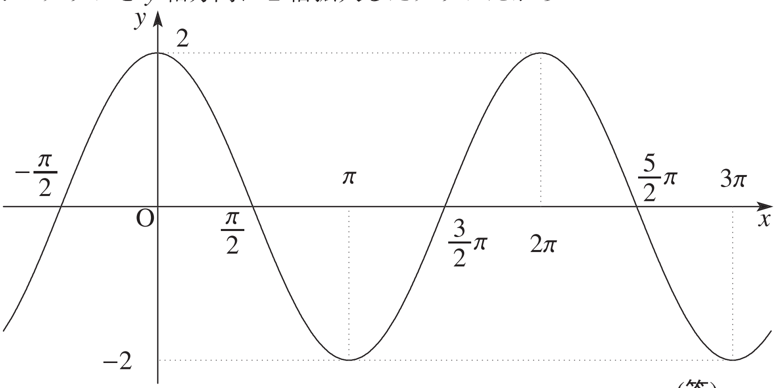
$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1)　$y = \sin x$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフだから



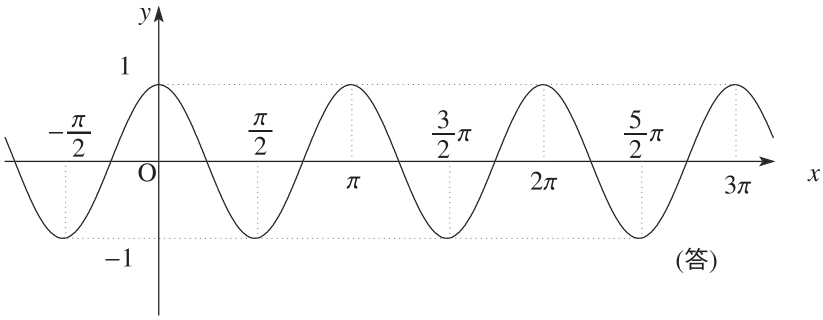
(答)

(2)　$y = \cos x$ のグラフを y 軸方向に 2 倍拡大したグラフだから



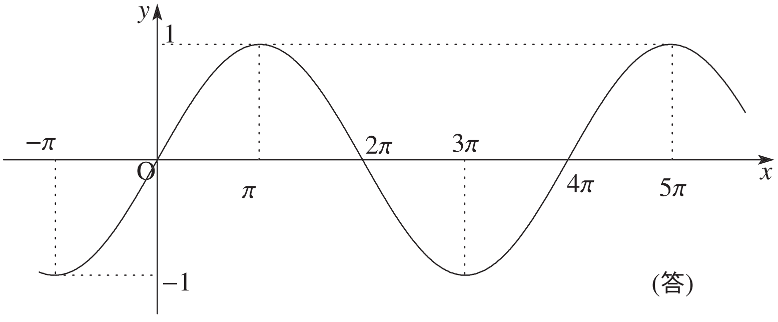
(答)

(3)　$y = \cos x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍拡大したグラフだから



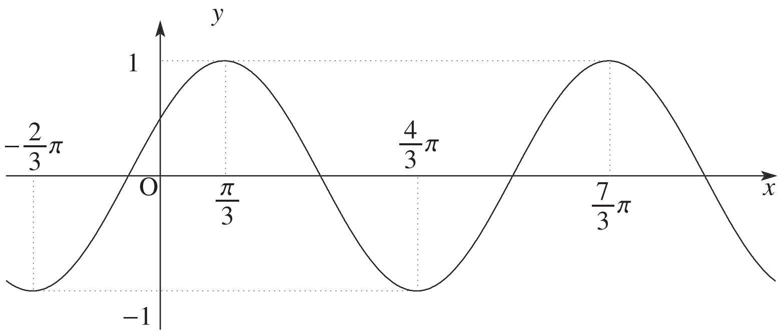
(答)

(4)　$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に 2 倍拡大したグラフだから



(答)

【3】(1)



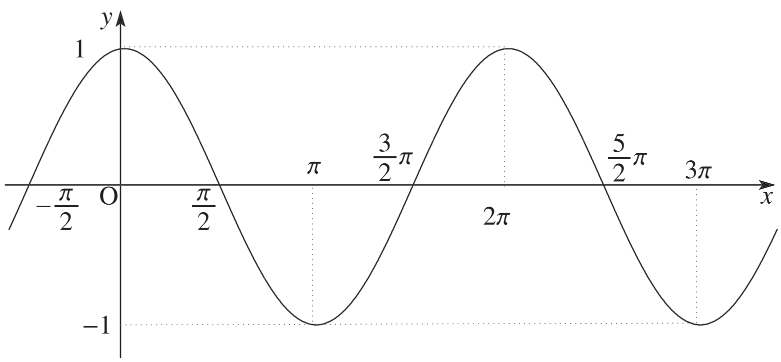
グラフは，上図のとおり． (答)

これは

$$y=\cos x \text{ のグラフを } x \text{ 軸の正方向に } \frac{\pi}{3} \text{ 平行移動させたグラフ}$$

である．

(2)



グラフは上図のとおり． (答)

これは

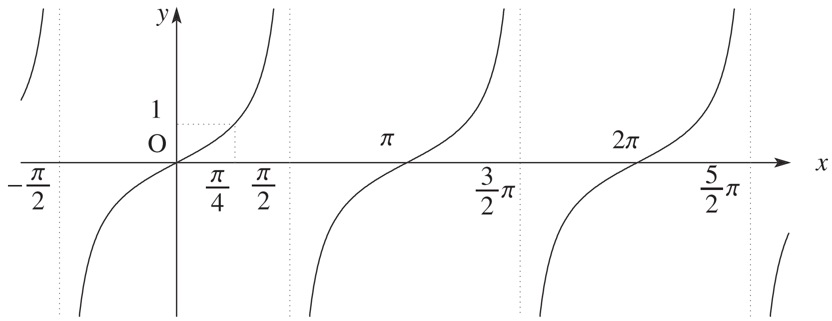
$$y=\sin x \text{ のグラフを } x \text{ 軸の正方向に } -\frac{\pi}{2} \text{ 平行移動させたグラフ}$$

である．

＜参考＞

このグラフは，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ より $y=\cos x$ のグラフと一致する．

(3)



これは

$y = \tan x$ のグラフを x 軸の正方向に π 平行移動させたグラフ

である.

<参考>

このグラフは，$y = \tan(x - \pi) = \tan x$ より $y = \tan x$ のグラフと一致する.

【4】与えられた式

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$$

の両辺を 2 乗して

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より,

$$\sin\theta\cos\theta = \boldsymbol{-\frac{3}{8}} \qquad \text{(答)}$$

また

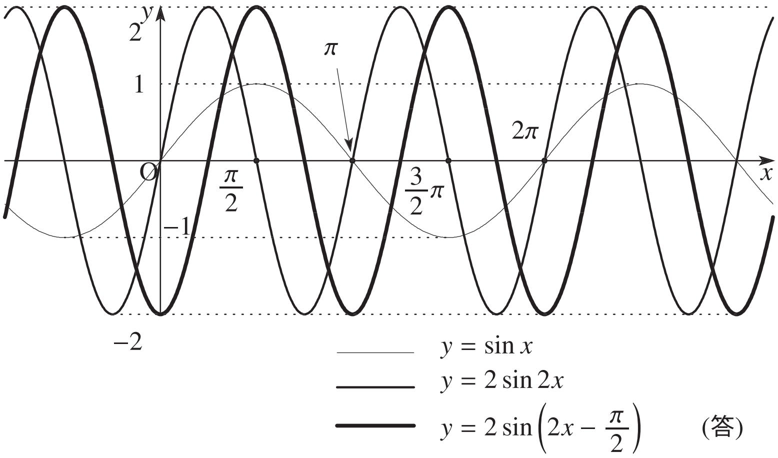
$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{11}{16}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【5】(1)

$$y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

より，与式は，$y = \sin x$ のグラフを，x 軸の方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍，y 軸の方向に 2 倍に拡大したグラフ $y = 2\sin 2x$ を，さらに x 軸の正方向に $\dfrac{\pi}{4}$ 平行移動したグラフである．

よって，グラフは以下のとおり．



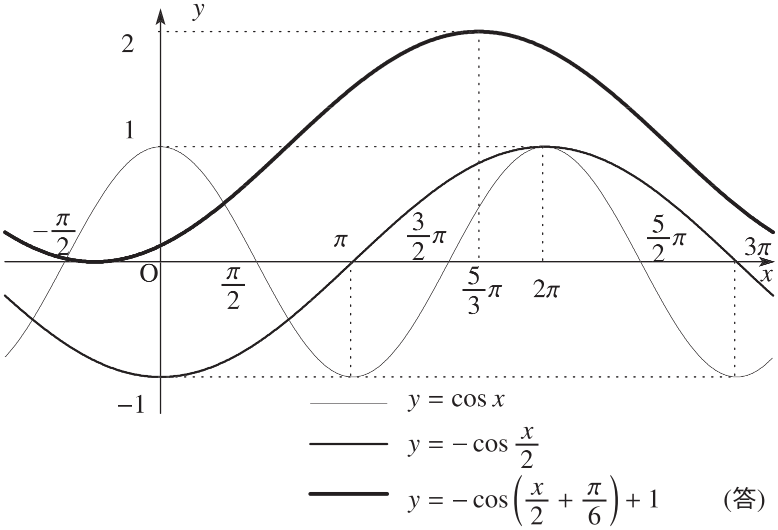
(答)

(2)

$$y = -\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = -\cos\left\{\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right\} + 1$$

より，与式は，$y = \cos x$ のグラフを，x 軸の方向に 2 倍，x 軸に関して対称移動したグラフ $y = -\cos\dfrac{1}{2}x$ を，さらに x 軸の正方向に $-\dfrac{\pi}{3}$，y 軸の正方向に 1 平行移動したグラフである．

よって，グラフは以下のとおり．



(答)

【6】(1) 与式の両辺に $(1-\tan\theta)$ をかけて

$$1+\tan\theta=(2+\sqrt{3})(1-\tan\theta)$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}\qquad \text{(答)}$$

また

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\qquad \text{(答)}$$

(2) $\cos\theta=0$ のとき与式は不成立．ゆえに $\cos\theta\ (\fallingdotseq 0)$ で左辺の分母分子を割って

$$\frac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\sqrt{2}-1\iff\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\sqrt{2}-1$$

$$\iff 1+\tan\theta=\left(\sqrt{2}-1\right)(1-\tan\theta)$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\boldsymbol{1-\sqrt{2}}\qquad \text{(答)}$$

また

$$\cos^2\theta=\frac{1}{\tan^2\theta+1}=\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2+1}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\qquad \text{(答)}$$

【7】$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから，a の正負で場合を分ける．

(i) $a > 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
& -a \leqq a\sin x \leqq a \\
\therefore\quad & -a + b \leqq a\sin x + b \leqq a + b
\end{aligned}
$$

よって，

$$-a + b = -1,\ a + b = 5$$

これを解いて $a = 3$，$b = 2$.

(ii) $a < 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
& a \leqq a\sin x \leqq -a \\
\therefore\quad & a + b \leqq a\sin x + b \leqq -a + b
\end{aligned}
$$

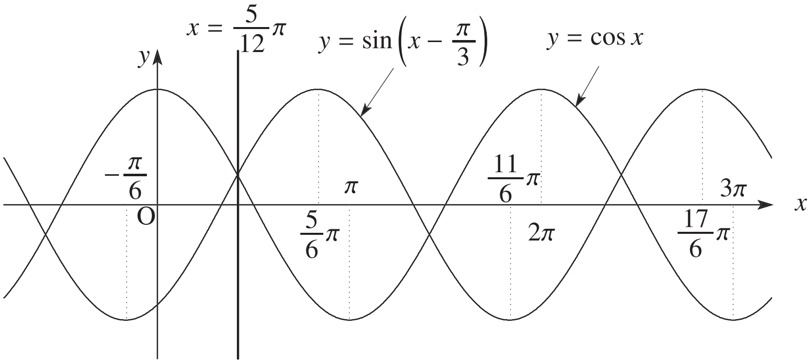
よって，

$$a + b = -1,\ -a + b = 5$$

これを解いて $a = -3$，$b = 2$.

以上より，$\boldsymbol{(a,\ b) = (3,\ 2),\ (-3,\ 2)}$　　(答)

【8】$y=\cos x$，$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを重ねあわせると次のようになる．



図より，対称の軸となる $x=a$ のうちで，最小の正の値 a は

$$a=\boldsymbol{\frac{5}{12}\pi} \qquad \text{(答)}$$

■別解

$y=\cos x$ 上に点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ をとり，$x=a$ に関して P と対称な点を $\mathrm{Q}(s,\ t)$ とすると

$$\frac{X+s}{2}=a,\ Y=t \quad \cdots\cdots①$$

$\mathrm{P}(X,\ Y)$ は $y=\cos x$ 上の点であるから

$$Y=\cos X \quad \cdots\cdots②$$

①を②に代入して

$$t=\cos(2a-s)$$
$$\therefore\quad t=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(2a-s)\right\}=\sin\left(s+\frac{\pi}{2}-2a\right)$$

ここで，s に x，t に y を対応させて，$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}-2a\right)$

これが $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ と一致するから

$$\frac{\pi}{2}-2a=-\frac{\pi}{3}+2\pi\times n \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$
$$\therefore\quad a=\frac{5}{12}\pi-\pi\times n$$

これをみたす正の値 a の最小値は，上式に $n=0$ を代入して，

$$a=\boldsymbol{\frac{5}{12}\pi} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1)　図 1-1 より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における解は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$

であるから，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{11}{6}\pi + 2n\pi} \quad (n\ \text{は整数}) \qquad (\text{答})$$

(2)　図 1-2 より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における解は

$$\theta = \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

であるから，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{4}\pi + 2n\pi,\ \frac{7}{4}\pi + 2n\pi} \quad (n\ \text{は整数}) \qquad (\text{答})$$

(3)

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，図 1-3 より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における解は

$$\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$

であるから，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 2n\pi} \quad (n\ \text{は整数}) \qquad (\text{答})$$

(4)

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

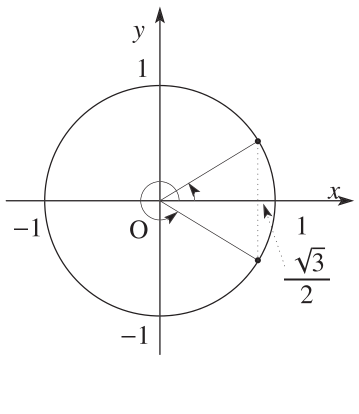
したがって，図 1-4 より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における解は

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$

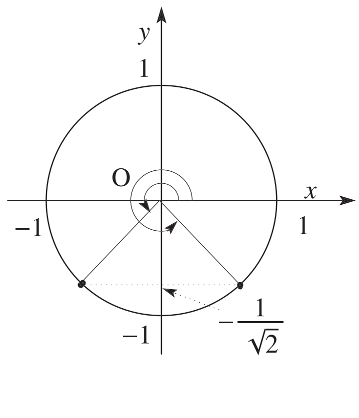
であるから，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \frac{4}{3}\pi + 2n\pi} \quad (n\ \text{は整数}) \qquad (\text{答})$$

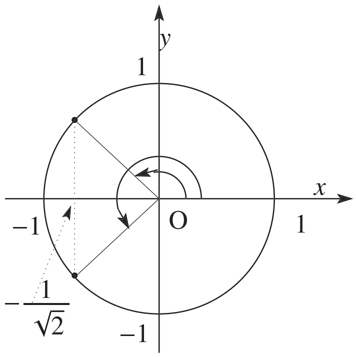
〔図 1-1〕



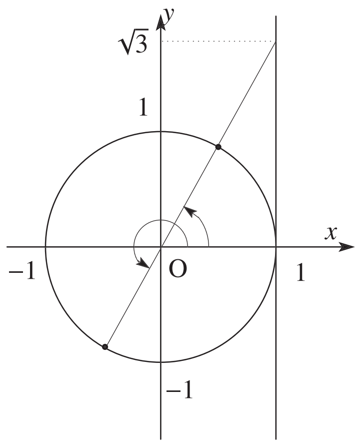
〔図 1-2〕



〔図 1-3〕



〔図 1-4〕



【2】(1)

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta = 0$$
$$\sin\theta(2\sin\theta - 3) = 0$$

ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$\sin\theta = 0$$

よって，$\theta = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\pi}$　　(答)

(2)

$$2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$$
$$2(1-\cos^2\theta) - \cos\theta - 1 = 0$$
$$-2\cos^2\theta - \cos\theta + 1 = 0$$
$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$
$$\therefore\quad \cos\theta = \frac{1}{2},\ -1$$

よって，$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}},\ \boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}$　　(答)

(3)

$$\cos^2\theta + 2\sin\theta + 2 = 0$$
$$1 - \sin^2\theta + 2\sin\theta + 2 = 0$$
$$-\sin^2\theta + 2\sin\theta + 3 = 0$$
$$\sin^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$$
$$(\sin\theta + 1)(\sin\theta - 3) = 0$$

ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$\sin\theta = -1$$

よって，$\theta = \boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$　　(答)

(4)

$$\tan\theta = \sqrt{2}\cos\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$$
$$\sin\theta = \sqrt{2}\cos^2\theta$$
$$\sin\theta = \sqrt{2}(1-\sin^2\theta)$$
$$\therefore\quad \sqrt{2}\sin^2\theta + \sin\theta - \sqrt{2} = 0$$
$$(\sqrt{2}\sin\theta - 1)(\sin\theta + \sqrt{2}) = 0$$

ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}},\ \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$　　(答)

【3】(1)

$$\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

図 3-1 より，これをみたす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\tan\theta \leqq -\sqrt{3}$$

図 3-2 より，これをみたす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta \leqq \frac{5}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$4\sin^2\theta - 1 \geqq 0$$
$$(2\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) \geqq 0$$
$$\sin\theta \leqq -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leqq \sin\theta$$

図 3-3 より

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(4)

$$2\cos^2\theta + \sin\theta - 1 < 0$$
$$2(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 1 < 0$$
$$-2\sin^2\theta + \sin\theta + 1 < 0$$
$$\therefore\ 2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 > 0$$
$$(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 1) > 0$$

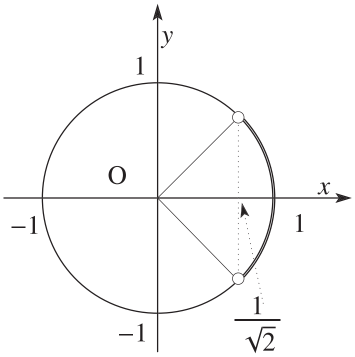
ここで，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$\sin\theta - 1 \leqq 0$$
$$2\sin\theta + 1 < 0$$
$$\therefore\ \sin\theta < -\frac{1}{2}$$

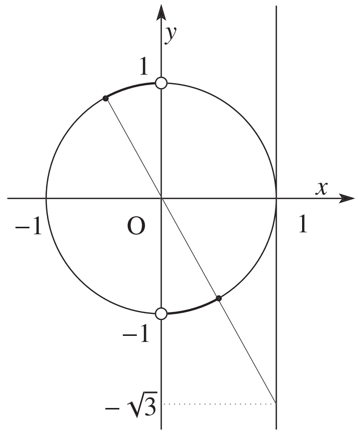
図 3-4 より

$$\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$

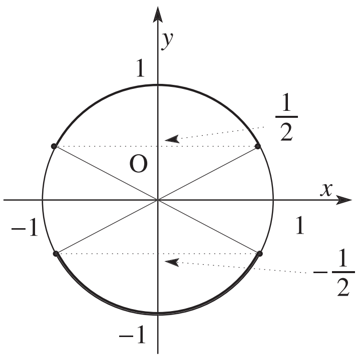
〔図 3-1〕



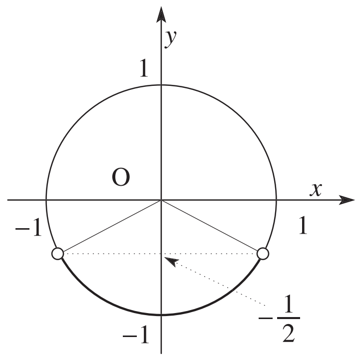
〔図 3-2〕



〔図 3-3〕



〔図 3-4〕



【4】(1)　図 1 より

$$\frac{\pi}{6} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \leqq \theta < \frac{11}{6}\pi \qquad (答)$$

(2)　図 2 より

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{3}{4}\pi \qquad (答)$$

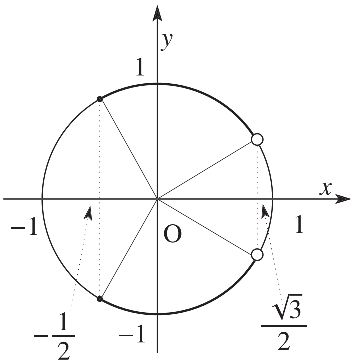
(3)　図 3 より

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi \qquad (答)$$

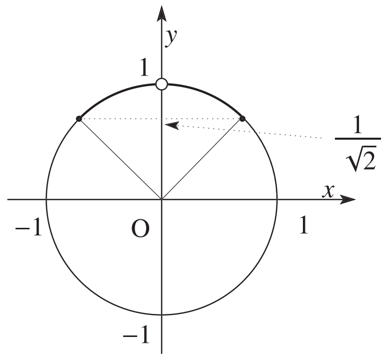
(4)　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，与式は常に成立する．よって

$$0 \leqq \theta < 2\pi \qquad (答)$$

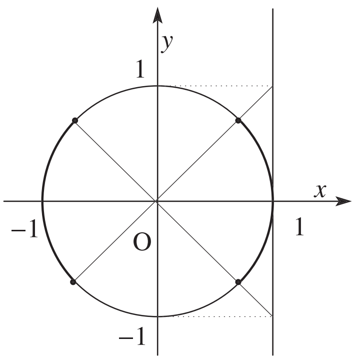
〔図 1〕



〔図 2〕



〔図 3〕



【5】(1)　まず，$\cos\theta \neq 0$ であることから，$\theta \neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$

(i) $\cos\theta > 0$ $\left(すなわち\ 0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi\right)$ のとき

$$\frac{1}{\cos\theta} \leqq \frac{1}{2} \iff \cos\theta \geqq 2$$

をみたす θ は存在しない．

(ii) $\cos\theta < 0$ $\left(すなわち\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{2}\pi\right)$ のとき，$\dfrac{1}{\cos\theta} < 0$ より

$$\frac{1}{\cos\theta} \leqq \frac{1}{2}$$

は常に成り立つ．

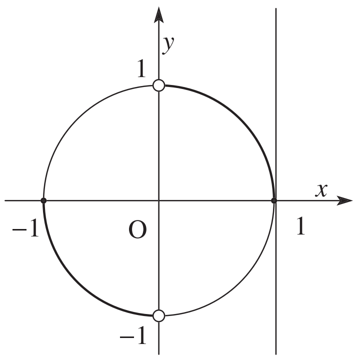
よって

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(2)　図より

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi} \qquad \text{(答)}$$

〔図〕



【6】(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$

よって，この範囲で，$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ となるのは

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\theta = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{23}{6}\pi$

よって，この範囲で，$\tan\left(2\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ となるのは

$$2\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi$$

ゆえに，$2\theta = \dfrac{5}{12}\pi, \dfrac{17}{12}\pi, \dfrac{29}{12}\pi, \dfrac{41}{12}\pi$ より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{24}\pi,\ \frac{17}{24}\pi,\ \frac{29}{24}\pi,\ \frac{41}{24}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{4}{3}\pi$

よって，この範囲で $\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるのは

$$\frac{5}{6}\pi \leqq \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{7}{6}\pi$$

ゆえに，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ より

$$\boldsymbol{\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1)

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\tan x - 1) \geqq 0$$

より

(i) $\cos x - \dfrac{1}{2} \leqq 0$ かつ $\tan x - 1 \leqq 0$ のとき

この不等式をみたす x は存在しない.

(ii) $\cos x - \dfrac{1}{2} \geqq 0$ かつ $\tan x - 1 \geqq 0$ のとき

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3} \text{ かつ } \frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$$

よって

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$4 - \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - 1)\sin\theta - 4\cos^2\theta \leqq 0$$

$$4 - \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - 1)\sin\theta - 4(1 - \sin^2\theta) \leqq 0$$

$$4\sin^2\theta - 2(\sqrt{3} - 1)\sin\theta - \sqrt{3} \leqq 0$$

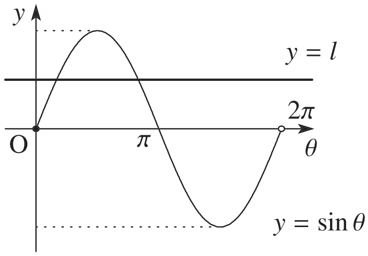
$$(2\sin\theta - \sqrt{3})(2\sin\theta + 1) \leqq 0$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) 右の図より，求める解の個数は次の表のようになる．



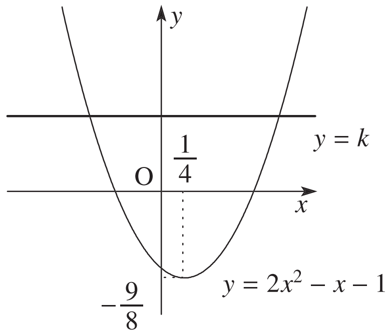
l	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
個数	**0**	**1**	**2**	**1**	**0**

(答)

(2) 与式を変形して

$$y=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$$

であるから，右の図より，求める解の個数は次の表のようになる．



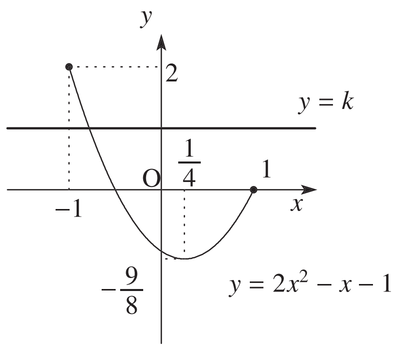
k	$\cdots$	$-\frac{9}{8}$	$\cdots$
個数	**0**	**1**	**2**

(答)

(3) $x=\sin\theta$ とおくと，$-1\leqq x\leqq 1$．ここで異なる x の値 1 つにつき

$$\begin{cases} -1<x<1 \text{ のとき} & \theta \text{ は } 2 \text{ つ} \\ x=\pm 1 \text{ のとき} & \theta \text{ は } 1 \text{ つ} \end{cases}$$

対応する．右の図より，求める解の個数は次の表のようになる．



k	$\cdots$	$-\frac{9}{8}$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
個数	**0**	**2**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**

(答)

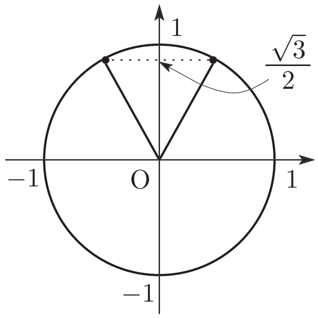
添削課題

【1】(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi} \qquad \text{(答)}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi \\ \dfrac{2}{3}\pi + 2n\pi \end{cases}} \quad \textbf{($\boldsymbol{n}$ は整数)} \qquad \text{(答)}$$

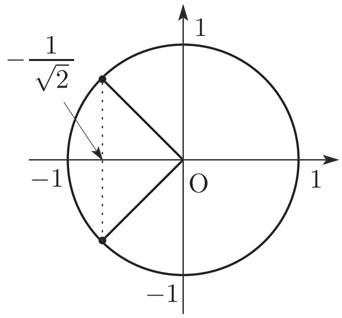


(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi} \qquad \text{(答)}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \begin{cases} \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi \\ \dfrac{5}{4}\pi + 2n\pi \end{cases}} \quad \textbf{($\boldsymbol{n}$ は整数)} \qquad \text{(答)}$$

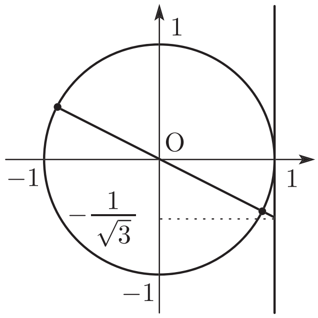


(3) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi + n\pi} \quad \textbf{($\boldsymbol{n}$ は整数)} \qquad \text{(答)}$$

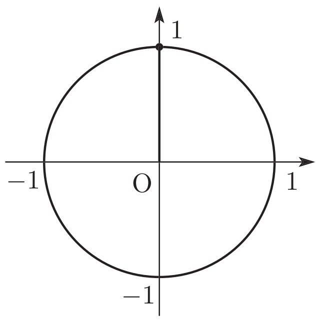


(4) $\sin\theta = 1$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}} \qquad \text{(答)}$$

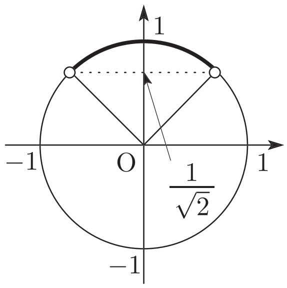
よって，一般解は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \textbf{($\boldsymbol{n}$ は整数)} \qquad \text{(答)}$$



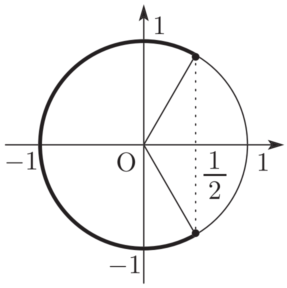
【2】(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi} \qquad (答)$$



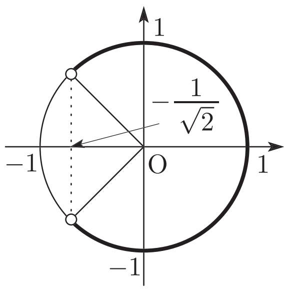
(2) $\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{5}{3}\pi} \qquad (答)$$



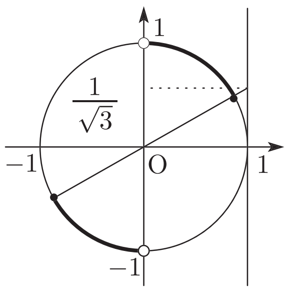
(3) $\cos\theta > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi < \theta < 2\pi} \qquad (答)$$



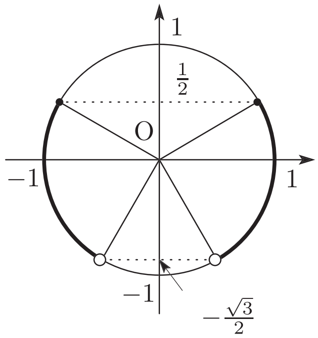
(4) $\tan\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi} \qquad (答)$$



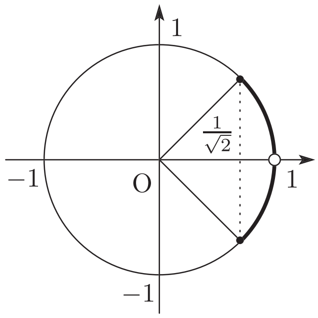
【3】(1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi \leqq \theta < \frac{4}{3}\pi,}$$
$$\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$



(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos\theta < 1$ より，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

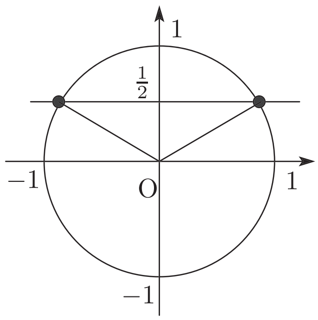
$$\boldsymbol{0 < \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$



(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{2} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{9}{2}\pi$

この範囲で，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ を満たすのは，

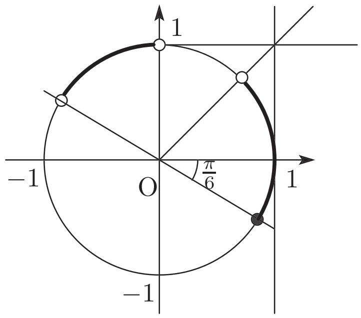
$$2\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$



(4) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5}{6}\pi$

この範囲で，$\tan\left(\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) < 1$ を満たすのは，

$$-\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$$
$$\therefore\ \boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{5}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$



【4】(1) $\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)(\tan x - 1) \geqq 0$ より

(i) $\cos x - \dfrac{1}{2} \leqq 0$　かつ　$\tan x - 1 \leqq 0$ のとき

この不等式をみたす x は存在しない.

(ii) $\cos x - \dfrac{1}{2} \geqq 0$　かつ　$\tan x - 1 \geqq 0$ のとき

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3} \quad \text{かつ} \quad \frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$$

よって

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$4 - \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - 1)\sin\theta - 4\cos^2\theta \leqq 0$$
$$4 - \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - 1)\sin\theta - 4(1 - \sin^2\theta) \leqq 0$$
$$4\sin^2\theta - 2(\sqrt{3} - 1)\sin\theta - \sqrt{3} \leqq 0$$
$$(2\sin\theta - \sqrt{3})(2\sin\theta + 1) \leqq 0$$
$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1)

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$=\mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\quad\text{(答)}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
$$=\mathbf{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\quad\text{(答)}$$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$
$$=\mathbf{2-\sqrt{3}}\quad\text{(答)}$$

＜別解＞

正接の加法定理を用いると

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\mathbf{2-\sqrt{3}}\quad\text{(答)}$$

(2)

$$\sin\frac{11}{12}\pi=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$=\mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\quad\text{(答)}$$

$$\cos\frac{11}{12}\pi=\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$=\mathbf{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\quad\text{(答)}$$

$$\tan\frac{11}{12}\pi = \frac{\sin\frac{11}{12}\pi}{\cos\frac{11}{12}\pi} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{3}-2} \qquad (答)$$

(3)

$$\frac{41}{12}\pi = 4\pi - \frac{7}{12}\pi = 4\pi - \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

より

$$\sin\frac{41}{12}\pi = \sin\left\{4\pi - \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} \qquad (答)$$

$$\cos\frac{41}{12}\pi = \cos\left\{4\pi - \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} \qquad (答)$$

$$\tan\frac{41}{12}\pi = \frac{\sin\frac{41}{12}\pi}{\cos\frac{41}{12}\pi} = \frac{-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{-(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$$

$$= \boldsymbol{2+\sqrt{3}} \qquad (答)$$

【2】与式を変形して

$$\cos^2\theta-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=\cos^2\theta-\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\cos\theta\cos\frac{2}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2$$
$$=\cos^2\theta-\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2$$
$$=\cos^2\theta-\frac{1}{4}\left(\sin^2\theta+3\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(\cos^2\theta+3\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right)$$
$$=\cos^2\theta+\frac{1}{2}\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}}\qquad \text{(答)}$$

【3】(1)

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\alpha>0$ だから，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$
また

$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\sin\beta>0$ だから，$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
したがって

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{30}}{6}$$
$$=\mathbf{\frac{-1+2\sqrt{30}}{12}}\qquad \text{(答)}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{\sqrt{15}}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{\sqrt{15}}{12}-\frac{\sqrt{2}}{6}$$
$$=\mathbf{\frac{-\sqrt{15}-2\sqrt{2}}{12}}\qquad \text{(答)}$$

(2)
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{2+(-2)}{1-2\times(-2)} = \mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

$\tan^2\alpha+1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より，$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2^2+1} = \dfrac{1}{5}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\alpha>0$ だから，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

よって

$$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\tan^2\beta+1 = \dfrac{1}{\cos^2\beta}$ より，$\cos^2\beta = \dfrac{1}{(-2)^2+1} = \dfrac{1}{5}$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\cos\beta<0$ だから，$\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

よって

$$\sin\beta = \tan\beta\cos\beta = -2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\\ &= \boldsymbol{-\frac{4}{5}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $\sin\alpha-\sin\beta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots①$$

$\cos\alpha+\cos\beta = \dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗して

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta = \frac{1}{9} \qquad \cdots\cdots②$$

① + ② より

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta) = \frac{13}{36}$$

$$1+2\cos(\alpha+\beta)+1 = \frac{13}{36}$$

よって，$\cos(\alpha+\beta) = \boldsymbol{-\dfrac{59}{72}}$ 　　(答)

【4】(1)

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

ここで，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\alpha > 0$ だから，$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ であり

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

したがって

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{24}{25}} \quad \text{(答)}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \mathbf{\frac{7}{25}} \quad \text{(答)}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \mathbf{\frac{24}{7}} \quad \text{(答)}$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ だから，$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$，$\tan\dfrac{\alpha}{2} > 0$ であることに注意して

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{2} = \frac{1}{10}$$

よって，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$　(答)

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{2} = \frac{9}{10}$$

よって，$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \mathbf{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$　(答)

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{1}{9}$$

よって，$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$　(答)

(2) $\tan^2\beta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\beta}$ より，$\left(-\dfrac{5}{12}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\beta}$

よって，$\cos^2\beta = \dfrac{144}{169}$

ここで，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より，$\cos\beta < 0$ だから，$\cos\beta = -\dfrac{12}{13}$

また，$\sin\beta = \tan\beta\cos\beta = -\dfrac{5}{12} \times \left(-\dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{5}{13}$

したがって

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = 2 \times \frac{5}{13} \times \left(-\frac{12}{13}\right) = \boldsymbol{-\frac{120}{169}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{119}{169}} \qquad \text{(答)}$$

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{2 \times \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \boldsymbol{-\frac{120}{119}} \qquad \text{(答)}$$

$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\beta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ だから，$\sin\dfrac{\beta}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\beta}{2} > 0$，$\tan\dfrac{\beta}{2} > 0$ であることに注意して

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos\beta}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)}{2} = \frac{25}{26}$$

よって，$\sin\dfrac{\beta}{2} = \boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{26}}}$ (答)

$$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos\beta}{2} = \frac{1 + \left(-\frac{12}{13}\right)}{2} = \frac{1}{26}$$

よって，$\cos\dfrac{\beta}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{26}}}$ (答)

$$\tan^2\frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta} = \frac{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)}{1 + \left(-\frac{12}{13}\right)} = 25$$

よって，$\tan\dfrac{\beta}{2} = \boldsymbol{5}$ (答)

【5】

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sin\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\pi}{12}\right)\\
&\quad+\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\pi}{12}\right)\\
&= \sin\frac{\pi}{12}\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{12}\right)\\
&\quad+\sin\frac{\pi}{12}\left(\sin\frac{4}{3}\pi\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{4}{3}\pi\sin\frac{\pi}{12}\right)\\
&\quad+\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\sin\frac{4}{3}\pi\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{4}{3}\pi\sin\frac{\pi}{12}\right)\\
&= \sin\frac{\pi}{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)\\
&\quad+\sin\frac{\pi}{12}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)\\
&\quad+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)\quad\cdots(*)
\end{aligned}
$$

ここで，$a=\sin\frac{\pi}{12}$，$b=\cos\frac{\pi}{12}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
(*) &= a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{1}{2}a\right)+a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{1}{2}a\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{1}{2}a\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{1}{2}a\right)\\
&= -\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}(\sqrt{3}b-a)(\sqrt{3}b+a)\\
&= -a^2-\frac{1}{4}(3b^2-a^2)\\
&= -\frac{3}{4}(a^2+b^2)\\
&= \boldsymbol{-\frac{3}{4}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

【6】

$$\left(\tan x-\frac{1}{\tan x}\right)^2=\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^2-4=\left(\frac{17}{4}\right)^2-4=\frac{225}{16}$$

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より， $0<\tan x\leqq 1$ であるから

$$\tan x-\frac{1}{\tan x}=-\frac{15}{4}$$

これより

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=2\times\frac{1}{\dfrac{1}{\tan x}-\tan x}=2\times\frac{1}{\dfrac{15}{4}}=\mathbf{\frac{8}{15}}\qquad\text{(答)}$$

さらに

$$\cos^2 2x=\frac{1}{\tan^2 2x+1}=\frac{1}{\dfrac{64}{225}+1}=\frac{225}{289}$$

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より， $0<2x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos 2x=\sqrt{\frac{225}{289}}=\frac{15}{17}$$

$$\therefore\quad \sin 2x=\tan 2x\times\cos 2x=\frac{8}{15}\times\frac{15}{17}=\frac{8}{17}$$

であることから

$$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x=1+\frac{8}{17}=\frac{25}{17}$$

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より， $\sin x>0$， $\cos x>0$ であるから

$$\sin x+\cos x=\sqrt{\frac{25}{17}}=\mathbf{\frac{5\sqrt{17}}{17}}\qquad\text{(答)}$$

【7】(1) $\tan^2\dfrac{x}{2}+1=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$ より

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\tan^2\dfrac{x}{2}+1}=\frac{1}{t^2+1}$$

よって

$$\cos x=\cos\left(2\times\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{t^2+1}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x=\tan\left(2\times\frac{x}{2}\right)=\frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

$$\sin x=\tan x\cos x=\frac{2t}{1-t^2}\times\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

以上より

$$\boldsymbol{\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}}\qquad \text{(答)}$$

(2) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とすると，(1) より，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ であるので

$$7\cdot\frac{2t}{1+t^2}+6\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=2$$

$$14t+6(1-t^2)=2(1+t^2)$$

$$4t^2-7t-2=0$$

$$(4t+1)(t-2)=0$$

$$\therefore t=-\frac{1}{4},\ 2$$

これを，(1) の $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$ に代入すると

(i) $t=-\dfrac{1}{4}$ のとき

$$\tan x=\frac{2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\frac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{15}{16}}=-\frac{8}{15}$$

(ii) $t=2$ のとき

$$\tan x=\frac{2\cdot 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$$

以上より，$\tan x=\boldsymbol{-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{8}{15}}$ **(答)**

＜別解＞

条件より

$$\begin{cases} 7\sin x + 6\cos x = 2 & \cdots ① \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① より

$$\sin x = \frac{2}{7}(1 - 3\cos x) \quad \cdots ①'$$

② に代入して

$$\frac{4}{49}(1 - 3\cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$
$$4\left(1 - 6\cos x + 9\cos^2 x\right) + 49\cos^2 x = 49$$
$$85\cos^2 x - 24\cos x - 45 = 0$$

これを解いて

$$(5\cos x + 3)(17\cos x - 15) = 0$$
$$\therefore \quad \cos x = -\frac{3}{5},\ \frac{15}{17}$$

①′ に代入して，順に

$$\sin x = \frac{4}{5},\ -\frac{8}{17}$$

以上より，求める値は

$$\tan x = \mathbf{-\frac{4}{3},\ -\frac{8}{15}} \qquad \text{(答)}$$

【8】与式より

$$\begin{cases} \sin x = 1 - \sin y & \cdots ①' \\ \cos x = \sqrt{3} - \cos y & \cdots ②' \end{cases}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ に代入して

$$(1 - \sin y)^2 + (\sqrt{3} - \cos y)^2 = 1$$
$$\left(1 - 2\sin y + \sin^2 y\right) + \left(3 - 2\sqrt{3}\cos y + \cos^2 y\right) = 1$$

整理して

$$2 - \sin y - \sqrt{3}\cos y = 0$$
$$\therefore \quad \sin y = 2 - \sqrt{3}\cos y \quad \cdots ③$$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入して

$$(2 - \sqrt{3}\cos y)^2 + \cos^2 y = 1$$
$$4\cos^2 y - 4\sqrt{3}\cos y + 3 = 0$$
$$(2\cos y - \sqrt{3})^2 = 0$$
$$\therefore \quad \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

③ より

$$\sin y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ y = \frac{\pi}{6}$$

さらに ①′, ②′ より

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore\ x = \frac{\pi}{6}$$

以上より

$$(x,\ y) = \left(\boldsymbol{\frac{\pi}{6}},\ \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}\right) \qquad (答)$$

【9】$5\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$2\alpha = \dfrac{\pi}{2} - 3\alpha$．ゆえに

$$\sin 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) = \cos \mathbf{3}\,\alpha \qquad (答)$$

2 倍角の公式，3 倍角の公式より

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \mathbf{4}\cos^3\alpha - \mathbf{3}\cos\alpha \qquad (答)$$

両辺 $\cos\alpha\ (\fallingdotseq 0)$ で割って整理すると

$$2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3$$
$$4\sin^2\alpha + \mathbf{2}\sin\alpha - \mathbf{1} = 0 \qquad (答)$$

これを解いて

$$\sin\alpha = \frac{-1 + \sqrt{\mathbf{5}}}{4} \qquad (答)$$

M2TK

高２難関大数学 K

Z-KAI

会員番号		氏　名	