M3JSB/M3JB/M3TB

本科 1 期 4 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大文系数学

東大文系数学

難関大文系数学 T

問題

【1】(1) O を原点とする座標平面上の一般角 θ に対する動径を OP として，

$$\mathrm{OP} = r, \quad \mathrm{P}(x,\ y)$$

とするとき，$\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$ は θ のみによって定まる．この値をそれぞれ，

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

と定義する．　　(答)

図 1

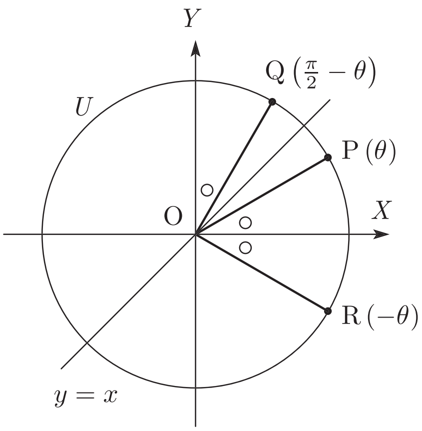
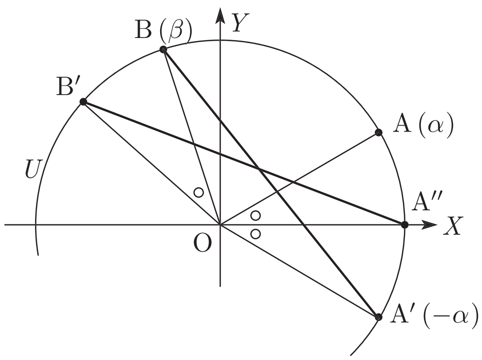


図 2



(2) 動径の長さを $r = 1$ とする．図 1 を見られたい．このとき，定義から，

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = y^2 + x^2 = 1 \ \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．次に，角 $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ に対する動径を OQ とすると，$\dfrac{\frac{\pi}{2} - \theta + \theta}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ より，2 点 P，Q は直線 $y = x$ に関して対称となり，$\mathrm{Q}(y,\ x)$ である．よって，定義から，

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \ \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

さらに，角 $-\theta$ に対する動径を OR とすると，$\dfrac{-\theta + \theta}{2} = 0$ より，2 点 P, R は x 軸に関して対称となり，$\mathrm{R}(x,\ -y)$ である．よって，定義から，

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \ \cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ．①, ②, ③ を用いて，題意の等式を証明する．図 2 を参照のこと．

一般角 α，β に対する動径を OA，OB とすると，定義から，

$$\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha), \quad \mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

である．いま，x 軸に関して A と対称な点を A′ とすると，$\mathrm{A}'(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$ であるから，① より，

$$\begin{aligned}\mathrm{A'B}^2 &= (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta + \sin\alpha)^2 \\ &= \cos^2\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$ ･･･････････④

次に，A$'$，B を原点のまわりに角 α だけ回転した点をそれぞれ A$''$，B$'$ とすると，

A$''(1,\ 0)$，B$'(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$ であるから，① より，

$$\begin{aligned}\mathrm{A''B'}^2 &= \{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2 + \{\sin(\alpha+\beta)\}^2 \\ &= \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) + 1 - 2\cos(\alpha+\beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha+\beta) \quad \cdots\cdots\cdots⑤\end{aligned}$$

よって，④，⑤，および $\mathrm{A'B} = \mathrm{A''B'}$ より，

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

また，これと ②，③ より，

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

以上より，sin，cos に関する加法定理が証明された．（証明終）

【2】 (1) 1 辺の長さとして PQ に着目すると，$\mathrm{PQ} = \mathrm{AP} + \mathrm{AQ}$ である．

△ APD で

$$\angle\mathrm{PDA} = 180^\circ - (60^\circ + (90^\circ - \theta)) = 30^\circ + \theta$$

正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin(30^\circ + \theta)} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2$$

$$\therefore \quad \mathrm{AP} = 2\sin(30^\circ + \theta) = 2\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$$

△ AQB で

$$\angle\mathrm{QBA} = 180^\circ - (\theta + 60^\circ) = 120^\circ - \theta$$

同様にして

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \mathrm{AQ} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(120^\circ - \theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \left(-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\right) \\ &= \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}y = \mathrm{PQ} &= (\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) + \left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\theta + 2\cos\theta \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) (1) で，1 辺の長さ y が $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式で表された．これを合成する．

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(2\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7}\sin(\theta + \alpha)$$

ただし α は

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

をみたす角．

$30° < \theta < 60°$ だから $30° + \alpha < \theta + \alpha < 60° + \alpha$

そして，$30° < \alpha < 45°$ より $\theta + \alpha = 90°$ となる θ が存在する．よって，θ がその値をとるとき，$y = \mathrm{PQ}$ の値は最大となる．

以上より，求める PQ の最大値は $\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ (答)

【3】(1) まず真数条件より

$x^2 - 3x + 2 > 0$ かつ $x > 0 \iff x < 1,\ 2 < x$ かつ $x > 0$

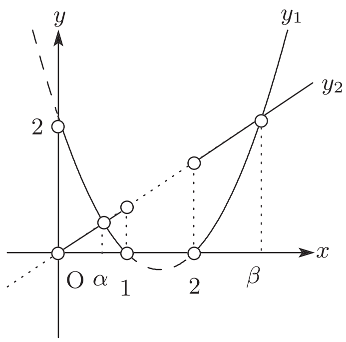
であるから，$0 < x < 1$ または $2 < x$ が必要である．そこで以下，この下で考える．底 a が $a > 1$ のときと，$0 < a < 1$ のときに場合を分ける．

(i) $1 < a$ のとき，対数関数 $y = \log_a t$ は単調増加関数である．従って，与えられた不等式について

$\log_a \left(x^2 - 3x + 2\right) > \log_a ax \iff x^2 - 3x + 2 > ax$

が成り立つ．この 2 次不等式を，2 次関数 $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ と直線 $y = g(x) = ax$ の位置関係から考える．グラフは，次の図 3 のようになる．

図 3



グラフの共有点の x 座標を α，β(ただし $\alpha < \beta$) とする．このとき，

$f(x) > g(x) \iff 0 < x < \alpha,\ \beta < x.$

(ii) $0 < a < 1$ のとき，関数 $y = \log_a t$ は単調減少関数であるから，

$\log_a \left(x^2 - 3x + 2\right) > \log_a ax \iff x^2 - 3x + 2 < ax$

となり，$f(x) < g(x)$ である．再び図 3 より，

$f(x) < g(x) \iff \alpha < x < 1,\ 2 < x < \beta$

α, β は方程式

$x^2 - 3x + 2 = ax \iff x^2 - (3 + a)x + 2 = 0$

の解であるから，$\alpha < \beta$ に注意してこれを解いて

$$\alpha = \frac{a + 3 - \sqrt{a^2 + 6a + 1}}{2}, \quad \beta = \frac{a + 3 + \sqrt{a^2 + 6a + 1}}{2}$$

以上をまとめて，次を得る：

$\alpha = \dfrac{a+3-\sqrt{a^2+6a+1}}{2}$,　$\beta = \dfrac{a+3+\sqrt{a^2+6a+1}}{2}$ として

$$\begin{cases} 1 < a \text{ のとき}, \ 0 < x < \alpha, \quad \beta < x \\ 0 < a < 1 \text{ のとき}, \ \alpha < x < 1, \quad 2 < x < \beta \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた方程式で $t = 2^x + 2^{1-x}$ とおくと，$2^x > 0$，$2^{1-x} > 0$ より，相加平均・相乗平均の関係が成り立ち，

$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{1-x}} = 2\sqrt{2}$　　$\therefore$　$t \geqq 2\sqrt{2}$

また，与えられた方程式を t で表せば

$t^2 = 2^{2x} + 2^{2-2x} + 2 \cdot 2 = 4^x + 4^{1-x} + 4$　　$\therefore$　$4^x + 4^{1-x} = t^2 - 4$

が成り立つから，

$2 \cdot 4(t^2 - 4) - 51 \cdot 2t + 329 = 0$　　$\therefore$　$8t^2 - 102t + 297 = 0$

を得る．これを解いて $(2t-9)(4t-33) = 0$ より $t = \dfrac{9}{2}$，$\dfrac{33}{4}$

(i) $2^x + \dfrac{2}{2^x} = \dfrac{9}{2}$ のとき

$2 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$　　$\therefore$ $(2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 4) = 0$

よって $2^x = \dfrac{1}{2}$，4 より $x = -1$，2

(ii) $2^x + \dfrac{2}{2^x} = \dfrac{33}{4}$ のとき

$4 \cdot (2^x)^2 - 33 \cdot 2^x + 8 = 0$　　$\therefore$　$(4 \cdot 2^x - 1)(2^x - 8) = 0$

よって $2^x = \dfrac{1}{4}$，8 より $x = -2$，3

以上をまとめて

$x = -2, -1, 2, 3$　　(答)

【4】(1) 真数条件，底の条件より

$x > 0,\ y > 0,\ x \fallingdotseq 1,\ y \fallingdotseq 1$

左辺を変形して

$\log_x y - \dfrac{3}{\log_x y} - 2 < 0$ $\cdots\cdots\cdots(\#)$

$\log_x y = t$ と置くと，$y \fallingdotseq 1$ であるから $t \fallingdotseq 0$ より $t^2 > 0$ である．そこで (#) の両辺に $t^2 (> 0)$ をかけて

$t^3 - 3t - 2t^2 < 0$　　$\therefore$　$t(t^2 - 2t - 3) = t(t+1)(t-3) < 0$

$\therefore$　$t < -1,\ 0 < t < 3$

これより

$\log_x y < -1 \iff \log_x y < \log_x x^{-1}$ $\cdots\cdots$①

$0 < \log_x y < 3 \iff \log_x 1 < \log_x y < \log_x x^3$ $\cdots\cdots$②

(i) $0 < x < 1$ のとき，y の関数 $\log_x y$ は単調減少だから

① $\iff y > x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

② $\iff 1 > y > x^3$

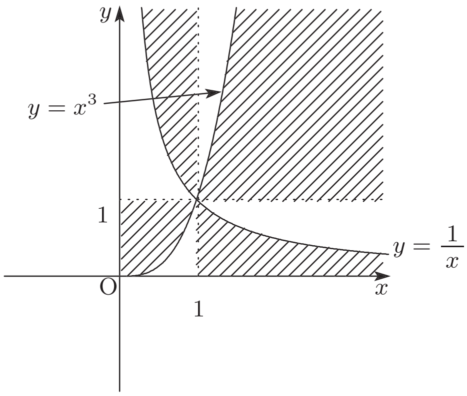
(ii) $1 < x$ のとき，y の関数 $\log_x y$ は単調増加だから

① $\iff y < x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

② $\iff 1 < y < x^3$

以上より，求める領域は図 4 のようになる．ただし，境界を含まない．

図 4



(2) $x, y>0$ であり，また $t+1 \geqq 2,\ 2t-1 \geqq 1$ であるから，与えられた不等式

$x^{t+1}>y^{2t-1}$ $\cdots\cdots\cdots$ (#)

は両辺とも正である．従って，両辺の 10 を底とする対数をとることができる．ただし，以下，底の 10 は省略する．

このとき，

$(\#) \Longleftrightarrow \log x^{t+1}>\log y^{2t-1} \Longleftrightarrow (t+1)\log x>(2t-1)\log y$

これを t について整理すると

$$t\,(\log x-2\log y)+\log x+\log y>0 \Longleftrightarrow t\log\frac{x}{y^2}+\log xy>0$$

ここで，$\log\dfrac{x}{y^2}=A,\quad \log xy=B$ と置くと，左辺 $At+B$ は t の 1 次関数である．

そこでこれを $f(t)$ と置く：$f(t)=At+B$

与えられた不等式 (#) が，$1 \leqq t \leqq 2$ をみたす任意の t で成り立つことは，1 次関数 $f(t)$ がこの区間で常に正であることと同値であり，1 次関数の単調性により，そのためには

$f(1)>0$　かつ　$f(2)>0$

であることが必要かつ十分である．

従って，

- $f(1)=A+B>0$ より

  $$A+B=\log\frac{x}{y^2}+\log xy=\log\frac{x^2}{y}>0$$

  であるから，10 を底とする対数関数の単調増加性により

  $$\frac{x^2}{y}>1 \Longleftrightarrow y<x^2 \quad (\because y>0)$$

- $f(2)=2A+B>0$ より

  $$2A+B=\log\left(\frac{x}{y^2}\right)^2+\log xy=\log\frac{x^3}{y^3}>0.$$

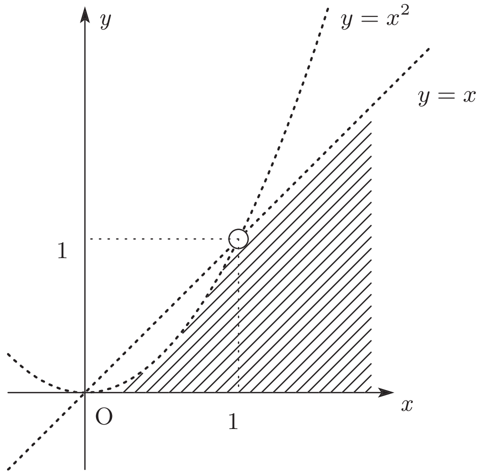
  同様にして $\dfrac{x^3}{y^3}>1$ であり，$x>0, y>0$ であるから $y<x$ を得る．

以上より，求める $(x,\, y)$ の条件は

$y < x^2,\ y < x,\ x > 0,\ y > 0$ 　　(答)

これを図示すれば，次の図 5 となる．境界を含まない．

図 5



添削課題

【1】真数条件より

$x^2+y^2>0$ ………①

$x^3-y^3>0$ ………②

$y>0$ ………③

$x^2-2y+y^2>0$ ………④

次に，与不等式の底を 2 に変換すると

$$\left\{\frac{\log_2(x^2+y^2)}{\log_2 4}-\frac{\log_2(x^3-y^3)}{\log_2 8}\right\}\left\{\log_2 y-\frac{\log_2(x^2-2y+y^2)}{\log_2 4}\right\}>0$$

これより

$$\log_2\frac{(x^2+y^2)^3}{(x^3-y^3)^2}\cdot\log_2\frac{y^2}{x^2-2y+y^2}>0$$

ここで

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2)^3-(x^3-y^3)^2\\=&x^2y^2(3x^2+2xy+3y^2)\\=&3x^2y^2\left\{\left(x+\frac{y}{3}\right)^2+\frac{8}{9}y^2\right\}\ \cdots\cdots\cdots ⑤\end{aligned}$$

であり，真数条件より x，y は同時に 0 にはならないので，⑤ は正である．

よって

$$\frac{(x^2+y^2)^3}{(x^3-y^3)^2}>1\qquad\therefore\quad \log_2\frac{(x^2+y^2)^3}{(x^3-y^3)^2}>0$$

となる．

これより

$$\log_2\frac{y^2}{x^2-2y+y^2}>0$$

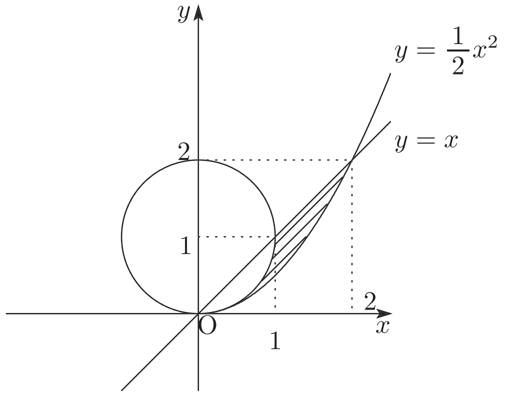
すなわち

$$\frac{y^2}{x^2-2y+y^2}>1\qquad\therefore\quad y^2>x^2-2y+y^2\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

① ～ ④，⑥より

$x>y>0$ かつ $x^2+(y-1)^2>1$ かつ $y>\dfrac{1}{2}x^2$

以上より，求める範囲は下図のようになる (境界は含まない).



問題

【1】$z=2x^2+5y^2-2xy-6y-1$ と置き，z を x の関数 $z=f(x)$ と考えると

$$\begin{aligned} z &= 2(x^2-yx)+5y^2-6y-1 \\ &= 2\left\{\left(x-\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}\right\}+5y^2-6y-1 \\ &= 2\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{9}{2}y^2-6y-1 \end{aligned}$$

x の範囲は $0 \leqq x \leqq 1$ であるから，この関数の最小値を考えるために，

(i) 軸が定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ に入っている，すなわち

$$0 \leqq x=\frac{y}{2} \leqq 1$$

のとき，

(ii) 軸が定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ に入っていない，すなわち

$$x=\frac{y}{2}<0 \text{ または } 1<x=\frac{y}{2}$$

のとき，

という場合分けをして考える．

(i) 軸が定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ に含まれるとき，

$$0 \leqq x=\frac{y}{2} \leqq 1 \qquad \therefore \quad 0 \leqq y \leqq 2$$

このとき，$z=f(x)$ の最小値は頂点で与えられるから，$x=\dfrac{y}{2}$ のとき，z は最小値をとる．よって，

$$\begin{aligned} f\left(\frac{y}{2}\right) &= \frac{9}{2}y^2-6y-1 \\ &= \frac{9}{2}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-3 \end{aligned}$$

$y=\dfrac{2}{3}$ は $0 \leqq y \leqq 2$ をみたすから，$0 \leqq y \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は -3 で，$y=\dfrac{2}{3}$ のときだから，$x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{3}$．つまり，

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) \text{ のとき，} z \text{ は最小値 } -3$$

をとる．

(ii) 軸が定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ に含まれないとき，

$$x=\frac{y}{2}<0 \Longleftrightarrow y<0, \quad x=\frac{y}{2}>1 \Longleftrightarrow y>2$$

であるが，$0 \leqq y \leqq 3$ であるから，

$$2<y \leqq 3 \Longleftrightarrow 1<x=\frac{y}{2} \leqq \frac{3}{2}$$

よって $0 \leqq x \leqq 1$ での z の最小値は $f(1)$ である．ここで

$$\begin{aligned} f(1) &= 2+5y^2-2y-6y-1 \\ &= 5y^2-8y+1 \\ &= 5\left(y-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{11}{5} \end{aligned}$$

このときの $f(1)$ の値は (i) の場合の -3 よりも大きい．

以上 (i)，(ii) より，求める z の最小値 は $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ のとき

-3　　(答)

【2】y の関数と考えて $f(y)=(x-1)y+x^2$ とおく．

$0 \leqq x \leqq 1$ では $x-1 \leqq 0$ だから $f(y)$ の傾きは負．よって

y が最小のとき $f(y)$ は最大，y が最大のとき $f(y)$ は最小

である．

また，$1 \leqq x \leqq 2$ では $x-1 \geqq 0$ だから，$f(y)$ の傾きは正．よって

y が最大のとき $f(y)$ は最大，y が最小のとき $f(y)$ は最小

である．

I. まず，最大値を求める．

(i) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$f(y)$ は $y=x-1$ で最大値をとり

$$f(x-1)=(x-1)^2+x^2=2x^2-2x+1$$
$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

よって，$x=0,\ 1$ のとき，最大値 1 をとる．

(ii) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(y)$ は $y=x$ で最大値をとり

$$f(x)=(x-1)\cdot x+x^2=2x^2-x$$
$$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

よって，$x=2$ のとき，最大値 6 をとる．

(i)，(ii) より，$x=2,\ y=2$ のとき，最大値 6 をとる．

II. 次に，最小値を求める．

(i) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$f(y)$ は $y=x$ で最小値をとり

$$f(x)=2x^2-x$$
$$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

よって，$x=\dfrac{1}{4}$ のとき，最小値 $-\dfrac{1}{8}$ をとる．

(ii) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(y)$ は $y=x-1$ で最小値をとり

$$f(x-1)=2x^2-2x+1$$
$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

よって，$x=1$ のとき，最小値 1 をとる．

(i)，(ii) より，$x=y=\dfrac{1}{4}$ のとき，最小値 $-\dfrac{1}{8}$ をとる．

以上より，求める値は

$$\begin{cases} \text{最大値は } 6 \quad (x=2,\ y=2) \\ \text{最小値は } -\dfrac{1}{8} \quad \left(x=y=\dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

(答)

【3】与えられた関数を $f(\theta)$ とする：

$$f(\theta)=\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\alpha)+\cos^2(\theta+\beta)$$

$f(\theta)$ の次数を下げて，更に加法定理を用いれば

$$f(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}\{1+\cos(2\theta+2\alpha)\}+\frac{1}{2}\{1+\cos(2\theta+2\beta)\}=k$$

$$\iff \cos 2\theta+\cos 2\theta\cos 2\alpha-\sin 2\theta\sin 2\alpha+\cos 2\theta\cos 2\beta-\sin 2\theta\sin 2\beta=2k-3$$

これを $\cos 2\theta$ と $\sin 2\theta$ に関してまとめると，次の $(*)$ が成り立つ：

$$\cos 2\theta(1+\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\sin 2\theta(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=2k-3 \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

題意より，$(*)$ が，任意の実数 θ で成立するから，特に

(i) $\theta=0$ のとき，　(ii) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，　(iii) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

に成立する．

(i) $\theta=0$ のとき，

$$(*)\iff 1+\cos 2\alpha+\cos 2\beta=2k-3 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

(ii) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

$$(*)\iff -(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=2k-3 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

(iii) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$(*)\iff -(1+\cos 2\alpha+\sin 2\beta)=2k-3 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

①と③の辺々を加えて

$$0=4k-6\iff k=\frac{3}{2}$$

であるから，①と②より

$$k=\frac{3}{2},\qquad \cos 2\alpha+\cos 2\beta=-1,\qquad \sin 2\alpha+\sin 2\beta=0 \quad \cdots\cdots\cdots(\#)$$

が必要である．

逆に $(\#)$ が成り立てば，$(*)$ が任意の実数 θ に関して成り立つから，$(\#)$ は十分条件でもある．

よって求める α,β は

$$\begin{cases}\cos 2\alpha+\cos 2\beta=-1\\ \sin 2\alpha+\sin 2\beta=0\end{cases}\quad かつ\quad 0\leqq\alpha\leqq\beta<\pi$$

をみたす．この連立方程式を解く．

$$(-1-\cos 2\alpha)^2+(-\sin 2\alpha)^2=1\iff 2\cos 2\alpha+1=0$$

であるから，$\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{2}$ であり，このとき $\cos 2\beta=-\dfrac{1}{2}$

よって

$$\sin^2 2\alpha=\sin^2 2\beta=\frac{3}{4}\iff \sin 2\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 2\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\quad(\text{複号任意})$$

更に，$\sin 2\alpha$ と $\sin 2\beta$ は異符号であり，かつ $0\leqq\alpha\leqq\beta<\pi$ であるから，

$$(\sin 2\alpha,\ \sin 2\beta)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

であり，$\cos 2\alpha=\cos 2\beta=-\dfrac{1}{2}$ と合わせて

$$(2\alpha,\ 2\beta)=\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}\right)$$

となる．よって求める値は

$$\text{一定値}\,k=\frac{3}{2},\quad (\alpha,\,\beta)=\left(\frac{\pi}{3},\,\frac{2\pi}{3}\right)\qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $A+B+C=180^\circ$ より $A+B=180^\circ-C$．与式の値を V とおく．

まず，C を固定して考える．

$$\begin{aligned}V&=\cos A+\cos B+\cos C\\&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C\\&=2\cos\frac{180^\circ-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C\\&=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C\end{aligned}$$

V は $\cos\dfrac{A-B}{2}$ の 1 次関数であり，傾き $2\sin\dfrac{C}{2}>0$ である．

$\cos\dfrac{A-B}{2}$ の変域を求めるために $A-B$ の範囲を求めると

$$-(180^\circ-C)<A-B<180^\circ-C,$$

$$\therefore\quad -\frac{180^\circ-C}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{180^\circ-C}{2}$$

よって

$$\cos\frac{180^\circ-C}{2}<\cos\frac{A-B}{2}\leqq 1$$

辺々に $2\sin\dfrac{C}{2}$ をかけて

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{180^\circ-C}{2}<2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\leqq 2\sin\frac{C}{2}$$

辺々に $\cos C$ を加えて

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{180^\circ-C}{2}+\cos C<V\leqq 2\sin\frac{C}{2}+\cos C$$

この最左辺と最右辺を変形する：

$$\begin{aligned}\text{最左辺}&=2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos C\\&=2\sin^2\frac{C}{2}+\cos 2\cdot\frac{C}{2}\\&=2\sin^2\frac{C}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{最右辺}&=2\sin\frac{C}{2}+\cos 2\cdot\frac{C}{2}\\&=2\sin\frac{C}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\end{aligned}$$

よって

$$1<V\leqq -2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}+1$$

が成り立つ．

次に，C を $0^\circ<C<180^\circ$ の範囲で動かす．

$0^\circ<\dfrac{C}{2}<90^\circ$ であり，$\sin\dfrac{C}{2}=t$ とおけば，$0<t=\sin\dfrac{C}{2}<1$

最右辺は

$$-2t^2+2t+1=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

以上より，求める V の範囲は

$$1 < V \leqq \frac{3}{2} \qquad \text{(答)}$$

である．

(2) 与式を S とする．

まず，S の最大値を求める．

$$\begin{aligned} S =& 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C \\ =& 2\sin\frac{180^\circ - C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C \\ =& 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C \\ \leqq& 2\cos\frac{C}{2}+\sin C \ \cdots\cdots\cdots ① \end{aligned}$$

等号成立は

$$\cos\frac{A-B}{2}=1 \iff A=B$$

のときである．

ここで $T=2\cos\dfrac{C}{2}+\sin C$ とおくと

$$T=2\cos\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$0^\circ < \dfrac{C}{2} < 90^\circ$ より $T>0$ だから，平方して

$$T^2=4\cos^2\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)^2=4\left(1-\sin^2\frac{C}{2}\right)\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)^2$$

$\sin\dfrac{C}{2}=t$ として，$T^2=g(t)$ とおけば

$$g(t)=4(1-t^2)(1+t)^2$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= 4(-2t)(1+t)^2+4(1-t^2)\cdot 2(1+t) \\ &= -8t(1+t)^2+8(1+t)^2(1-t)=8(1+t)^2\{(1-t)-t\} \\ &= 8(1+t)^2(1-2t) \end{aligned}$$

$0 < t=\sin\dfrac{C}{2} < 1$ に注意すると $g(t)$ の最大値は

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=4\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$$

このとき

$$T^2=\frac{27}{4} \qquad \therefore \quad T=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

そして

$$t=\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2} \text{ より } \quad \frac{C}{2}=30^\circ \qquad \therefore \quad C=60^\circ \ \cdots\cdots\cdots ②$$

①より

$$S \leqq T = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

であり，等号成立は $A=B$ のとき．

②に注意すると

$A=B=C=60^\circ$ のとき，S は最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

をとる．

また，$A\to 0^\circ,\quad B\to 0^\circ$ のとき，$C\to 180^\circ$ となり

$\sin A\to 0,\quad \sin B\to 0,\quad \sin C\to 0$

よって

$S>0$

以上より，求める範囲は

$0<S\leqq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　(答)

添削課題

【1】 $\sqrt{p}x=X,\ \sqrt{q}y=Y$ とし，

$$\begin{aligned}-px^2-qy^2+ax+by &= -X^2-Y^2+\frac{a}{\sqrt{p}}X+\frac{b}{\sqrt{q}}Y\\ &= -\left(X-\frac{a}{2\sqrt{p}}\right)^2-\left(Y-\frac{b}{2\sqrt{q}}\right)^2+\frac{a^2}{4p}+\frac{b^2}{4q}\\ &= k\end{aligned}$$

とおく．

つまり

$$\left(X-\frac{a}{2\sqrt{p}}\right)^2+\left(Y-\frac{b}{2\sqrt{q}}\right)^2=\frac{a^2}{4p}+\frac{b^2}{4q}-k \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

$X,\ Y$ の満たす領域は

$$\frac{X}{\sqrt{p}} \geqq \frac{Y}{\sqrt{q}} \quad\cdots\cdots\cdots ②$$

求める k の最大値は，①と②が共通点を持ちうる k の範囲から決定される．

(i) 中心が②にある場合．

（半径）$\geqq 0$ であればよい．

つまり，$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\cdot\dfrac{a}{2\sqrt{p}} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{q}}\cdot\dfrac{b}{2\sqrt{q}}$ のとき，k の最大値 $\dfrac{a^2}{4p}+\dfrac{b^2}{4q}$

$k=\dfrac{a^2}{4p}+\dfrac{b^2}{4q}$ のとき，$X=\dfrac{a}{2\sqrt{p}}$，$Y=\dfrac{b}{2\sqrt{q}}$ より，

$$x=\frac{a}{2p},\quad y=\frac{b}{2q}$$

これと，②より，これは $\dfrac{a}{2p} \geqq \dfrac{b}{2q}$ すなわち $qa \geqq pb$ のとき

(ii) 中心が②の外にある場合．すなわち $qa \leqq pb$ のとき

k は，$\left(\text{中心と直線}\dfrac{X}{\sqrt{p}}=\dfrac{Y}{\sqrt{q}}\text{の距離}\right) \leqq$（半径）を動く．

つまり

$$\frac{\left|\frac{a}{2p}-\frac{b}{2q}\right|^2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leqq \frac{a^2}{4p}+\frac{b^2}{4q}-k$$

これより，

$$k \leqq \frac{(a+b)^2}{4(p+q)}$$

を得る．

この k の最大値を与える $X,\ Y$ は $\left(\dfrac{a}{2\sqrt{p}},\ \dfrac{b}{2\sqrt{q}}\right)$ を通り，$\dfrac{X}{\sqrt{p}}-\dfrac{Y}{\sqrt{q}}=0$ と直交する直線

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\left(X-\frac{1}{2\sqrt{p}}\right)+\frac{1}{\sqrt{p}}\left(Y-\frac{1}{2\sqrt{q}}\right)=0$$

が $\dfrac{X}{\sqrt{p}}-\dfrac{Y}{\sqrt{q}}=0$ と交わる点として定まる．

$$X=\frac{\sqrt{p}(a+b)}{2(p+q)},\quad Y=\frac{\sqrt{q}(a+b)}{2(p+q)} \qquad \therefore\quad x=\frac{a+b}{2(p+q)},\quad y=\frac{a+b}{2(p+q)}$$

以上より，

$$\text{最大値} = \begin{cases} \dfrac{a^2}{4p} + \dfrac{b^2}{4q} & \left(x = \dfrac{a}{2p},\ y = \dfrac{b}{2q}\right)\ (qa \geqq pb \text{ のとき}) \\ \dfrac{(a+b)^2}{4(p+q)} & \left(x = y = \dfrac{a+b}{2(p+q)}\right)\ (qa \leqq pb \text{ のとき}) \end{cases}$$

問題

【1】数列を分母で群に分ける．

$$
\begin{array}{cccccc}
\text{第 1 群} & \text{第 2 群} & \cdots & \text{第 } m \text{ 群} & \cdots \\
\left| \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{2}{2^2}, \dfrac{3}{2^2} \right| & \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{2}{3^2}, \cdots, \dfrac{8}{3^2} \right| & \cdots & \left| \dfrac{1}{(m+1)^2}, \dfrac{2}{(m+1)^2}, \cdots, \dfrac{(m+1)^2-1}{(m+1)^2} \right| & \cdots \\
3 \text{ 個} & 8 \text{ 個} & \cdots & (m+1)^2-1 \text{ 個} & \cdots
\end{array}
$$

第 m 群には項が $(m+1)^2-1=m^2+2m$ 個ある．

第 m 群の最後の項は第 1 項から数えて

$$\sum_{k=1}^{m}(k^2+2k)=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+2\cdot\frac{1}{2}m(m+1)=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+7)$$

より，第 $\dfrac{1}{6}m(m+1)(2m+7)$ 項である．

(1) 第 100 項が第 m 群にあるとすると

$$\frac{1}{6}(m-1)m(2m+5)<100\leqq\frac{1}{6}m(m+1)(2m+7) \quad \cdots\cdots ①$$

この①をみたす正の整数 m は，$m=6$ のみである．

$$\left(\because \quad \frac{1}{6}\cdot5\cdot6\cdot17=85<100<\frac{1}{6}\cdot6\cdot7\cdot19=133\right)$$

したがって，第 100 項は第 6 群にあり, $100=85+15$ だから第 6 群の 15 番目である．よって，第 100 項 a_{100} は

$$a_{100}=\frac{15}{(6+1)^2}=\frac{15}{49} \qquad \text{(答)}$$

(2) $12=2^2\cdot3$ であり，各項の分母は平方数だから, 約分して 12 となる最初の分母は, $2^2\cdot3^2=6^2$ である．これより

$$\frac{5}{12}=\frac{15}{36}=\frac{15}{6^2}=\frac{15}{(5+1)^2}$$

よって, 最初に $\dfrac{5}{12}$ に等しくなるのは, 第 5 群の 15 番目の項であるから

$$\sum_{k=1}^{4}(k^2+2k)+15=\frac{1}{6}\cdot4\cdot5\cdot9+4\cdot5+15=65$$

したがって，最初に $\dfrac{5}{12}$ に等しくなる項は, 第 65 項 a_{65} である．　　(答)

(3) 6^2 の次に約分して 12 となる平方数は

$$6^2\cdot2^2=12^2$$

これより

$$\frac{5}{12}=\frac{5\cdot12}{12^2}=\frac{60}{(11+1)^2}$$

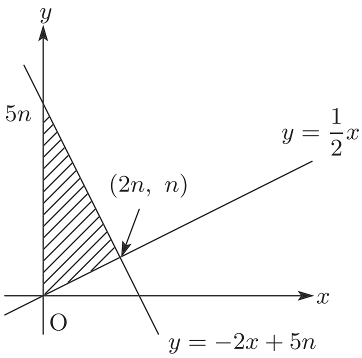
よって，2 度目に $\dfrac{5}{12}$ に等しくなるのは，第 11 群の 60 番目の項である．この項は, 先頭 a_1 から数えて

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k)+60=\frac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21+10\cdot11+60=555$$

番目である．従って，約分して 2 度目に $\dfrac{5}{12}$ に等しくなる項は，第 555 項 a_{555} である．　　(答)

【2】題意をみたす点 $(x,\ y)$ は，図 1 の斜線部分 (境界を含む) に含まれる格子点に他ならない．

図 1



直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の傾きに着目して，x 座標の偶奇で場合を分ける：直線 $x=k$ $(0 \leqq k \leqq 2n)$ 上にある格子点の数は

(i) k が偶数で，$k=2m \quad (0 \leqq m \leqq n)$ のとき，直線 $x=2m$ 上には y 座標が
$$y=m,\ m+1,\ \cdots,\ -4m+5n$$
であるような
$$(-4m+5n)-m+1=5(n-m)+1 \quad (\text{個})$$
の格子点があり，

(ii) k が奇数で $k=2m+1 \quad (0 \leqq m \leqq n-1)$ のとき，直線 $x=2m+1$ 上には y 座標が
$$y=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ -4m-2+5n$$
であるような
$$(-4m-2+5n)-(m+1)+1=5(n-m)-2 \quad (\text{個})$$
の格子点が並ぶ.

よって 求める格子点の総数は
$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{n}\{5(n-m)+1\}+\sum_{m=0}^{n-1}\{5(n-m)-2\}\\
&=[5\{n+(n-1)+\cdots+1+0\}+n+1]+[5\{n+(n-1)+\cdots+1\}-2n]\\
&=\frac{5}{2}n(n+1)+\frac{5}{2}n(n+1)-n+1\\
&=5n^2+4n+1 \quad (\text{個}) \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

【3】 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ より，

$$\frac{1}{2}a_{n+1}(a_{n+1}+1)-\frac{1}{2}a_n(a_n+1)=a_{n+1}$$

$$\therefore\ a_{n+1}(1-a_{n+1})=-a_n(a_n+1)$$

左辺に集めて整理すれば

$$\begin{aligned}{a_n}^2-{a_{n+1}}^2+a_{n+1}+a_n&=(a_n-a_{n+1})(a_n+a_{n+1})+(a_{n+1}+a_n)\\&=(a_n+a_{n+1})(a_n-a_{n+1}+1)=0\end{aligned}$$

$\{a_n\}$ が正項数列であることから $a_n+a_{n+1}\fallingdotseq 0$ である．よって

$$a_n-a_{n+1}+1=0 \qquad \therefore \quad a_{n+1}-a_n=1$$

これは数列 $\{a_n\}$ が等差数列であり, その公差が 1 であることを表している.

また, $n=1$ のとき,

$$S_1=a_1=\frac{1}{2}a_1(a_1+1) \quad \therefore \quad a_1(a_1-1)=0$$

$a_1\fallingdotseq 0$ より,

$$a_1=1$$

以上より,

$$a_n=n \qquad \text{(答)}$$

【4】 (1) 与えられた漸化式

$$\begin{cases}x_{n+1}=6x_n+3y_n\\y_{n+1}=3x_n-2y_n\end{cases}$$

から

$$\begin{aligned}x_{n+1}-ky_{n+1}&=6x_n+3y_n-k(3x_n-2y_n)\\&=(6-3k)x_n+(2k+3)y_n\end{aligned}$$

$\{x_n-ky_n\}$ が，公比 r の等比数列であることから，

$$(6-3k)x_n+(2k+3)y_n=rx_n-kry_n \quad (n=1,\ 2,\cdots)$$

従って次の連立方程式が成り立つ：

$$\begin{cases}r=6-3k\\kr=-(2k+3)\end{cases}$$

この連立方程式を解いて

$$k(6-3k)+2k+3=0$$

$$3k^2-8k-3=(3k+1)(k-3)=0 \quad \therefore\ k=3,\ -\frac{1}{3}$$

それぞれ $r=-3,\ 7$ であるから，

$$(k,\ r)=(3,\ -3),\ \left(-\frac{1}{3},\ 7\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果より,

$$\begin{cases}x_{n+1}-3y_{n+1}=-3(x_n-3y_n)\\x_{n+1}+\dfrac{1}{3}y_{n+1}=7\left(x_n+\dfrac{1}{3}y_n\right)\\x_1=6,\ y_1=3\end{cases}$$

第 1 式より,

$$x_n-3y_n=(-3)^{n-1}(x_1-3y_1)=(-3)^{n-1}(6-3\cdot 3)=(-3)^n$$

同様に第２式より

$$x_n+\frac{1}{3}y_n=7^{n-1}\left(x_1+\frac{1}{3}y_1\right)=7^{n-1}\left(6+\frac{1}{3}\cdot 3\right)=7^n$$

よって，任意の正整数 n について

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{1}{10}\left\{9\cdot 7^n+(-3)^n\right\} \\ y_n=\dfrac{3}{10}\left\{7^n-(-3)^n\right\} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

NOTE .

問題で与えられた漸化式から, 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ それぞれの隣接３項間の漸化式をつくると,

$$\begin{cases} x_{n+2}=4x_{n+1}+21x_n \\ y_{n+2}=4y_{n+1}+21y_n \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を得る．これを直接解いても同じ結果を得る．

【5】 (1) 第２式が

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\iff a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$$

に変形されたとすれば，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ より，α，β は $t^2-t-1=0$ の２解

である．$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ だから，$\gamma_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \gamma_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする．

(i) $(\alpha,\beta)=(\gamma_1,\gamma_2)$ のとき $\{a_{n+1}-\gamma_1 a_n\}$ は公比 γ_2 の等比数列で，初項は

$$1-\gamma_1=\gamma_2 \quad (\because \quad \gamma_1+\gamma_2=1)$$

$$\therefore \quad a_{n+1}-\gamma_1 a_n=\gamma_2\cdot\gamma_2^{n-1}=\gamma_2^n \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

(ii) $(\alpha,\beta)=(\gamma_2,\gamma_1)$ のとき (i) と同様にして，

$$a_{n+1}-\gamma_2 a_n=\gamma_1^n \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

②から①の辺々を引いて

$$(\gamma_1-\gamma_2)a_n=\gamma_1^n-\gamma_2^n$$

よって

$$a_n=\frac{\gamma_1^n-\gamma_2^n}{\gamma_1-\gamma_2}=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

以上より求める一般項は

$$a_n=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_n-\dfrac{1}{3}=b_n$ とすれば

$$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=1$$

より

$$b_n+b_{n+1}+b_{n+2}=0$$

これが

$$b_{n+2}-\alpha b_{n+1}=\beta(b_{n+1}-\alpha b_n)\iff b_{n+2}-(\alpha+\beta)b_{n+1}+\alpha\beta b_n=0$$

と変形されたとすれば $\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=1$．よって，α，β は $t^2+t+1=0$ の

2 解だから，

$$t=\omega,\ \omega^2\ \left(\text{ただし}\ \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

(i) $(\alpha,\beta)=\left(\omega,\omega^2\right)$ のとき，$\{b_{n+1}-\omega b_n\}$ は公比 ω^2 の等比数列で，初項は

$$b_2-\omega b_1=-\frac{1}{3}+\omega\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\omega-1)$$

よって

$$b_{n+1}-\omega b_n=\frac{1}{3}(\omega-1)\left(\omega^2\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

(ii) $(\alpha,\beta)=\left(\omega^2,\omega\right)$ のとき $\{b_{n+1}-\omega^2 b_n\}$ は公比 ω の等比数列で，初項は

$$b_2-\omega^2 b_1=-\frac{1}{3}+\omega^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\omega^2-1\right)$$

よって

$$b_{n+1}-\omega^2 b_n=\frac{1}{3}\left(\omega^2-1\right)\omega^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③から④を辺々引いて

$$\left(\omega^2-\omega\right)b_n=\frac{1}{3}(\omega-1)\,\omega^{2(n-1)}-\frac{1}{3}\left(\omega^2-1\right)\omega^{n-1}$$

$$\omega(\omega-1)b_n=\frac{1}{3}(\omega-1)\omega^{2(n-1)}-\frac{1}{3}(\omega+1)(\omega-1)\omega^{n-1}$$

よって

$$b_n=\frac{1}{3}\omega^{2n-3}-\frac{1}{3}\left(-\omega^2\right)\omega^{n-2}=\frac{1}{3}\left(\omega^{2n}+\omega^n\right)\quad(\because\quad \omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0)$$

$a_n=b_n+\dfrac{1}{3}$ より，求める一般項は

$$a_n=\frac{1}{3}\left(1+\omega^n+\omega^{2n}\right)\qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】$nS_n=(n-1)(2a_n+2-n)$ ………① より

$$(n+1)S_{n+1}=n(2a_{n+1}+1-n) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

②から①を引いて，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ をあてはめると

$$na_{n+1}+S_{n+1}=n(2a_{n+1}+1-n)-(n-1)(2a_n+2-n)$$

であるから

$$S_{n+1}=na_{n+1}-2(n-1)a_n-2n+2$$

②に代入して

$$(n+1)\{na_{n+1}-2(n-1)a_n-2n+2\}=n(2a_{n+1}+1-n)$$

整理して

$$(n^2-n)a_{n+1}-2(n^2-1)a_n-(n^2+n-2)=0$$

$$(n-1)\{na_{n+1}-2(n+1)a_n-(n+2)\}=0$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$na_{n+1}-2(n+1)a_n-(n+2)=0$$

より

$$a_{n+1}=\frac{2(n+1)a_n+(n+2)}{n} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

①で $n=1$ とすると

$$a_1=S_1=0$$

であるが，$a_2=3$ であるから，$n \geqq 1$ において③が成り立つ．

③の両辺に 1 を加えると

$$a_{n+1}+1=\frac{2(n+1)a_n+2(n+1)}{n}$$

両辺を $n+1$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}+1}{n+1}=2\cdot\frac{a_n+1}{n}$$

ここで，$b_n=\dfrac{1}{n}(a_n+1)$ とおくと

$$b_{n+1}=2b_n$$

となり，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列である．$a_1=0$ より $b_1=1$ であるから

$$b_n=2^{n-1}$$

よって

$$\frac{1}{n}(a_n+1)=2^{n-1} \qquad \therefore \quad a_n=\boldsymbol{n\cdot 2^{n-1}-1} \qquad \text{(答)}$$

M3JSB/M3JB/M3TB
選抜東大文系数学
東大文系数学
難関大文系数学 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	