M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

本科 1 期 4 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

問題

【1】(1) $f(x)$ は x の整式 $P(x)$, $Q(x)$ を用いて

$$f(x) = (x-1)^2 P(x) + 2x - 1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$f(x) = (x+1)^2 Q(x) + 3x - 4 \quad \cdots\cdots ②$$

と表される．

$f(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは，$f(-1)$ であるから，② に $x = -1$ を代入して

$$f(-1) = 3 \cdot (-1) - 4 = \mathbf{-7} \qquad \text{(答)} \quad \cdots\cdots ③$$

また，$f(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割った商を $R(x)$，余りを $ax^2 + bx + c$ (ただし，a, b, c は実数) とすると

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)R(x) + ax^2 + bx + c \quad \cdots\cdots ④$$

と表される．

さらに，①, ④ をそれぞれ x で微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)P(x) + (x-1)^2 P'(x) + 2 \\ &= (x-1)\{2P(x) + (x-1)P'(x)\} + 2 \quad \cdots\cdots ①' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)(x+1)R(x) + (x-1)^2 R(x) + (x-1)^2(x+1)R'(x) + 2ax + b \\ &= (x-1)\{2(x+1)R(x) + (x-1)R(x) + (x-1)(x+1)R'(x)\} \\ &\qquad + 2ax + b \quad \cdots\cdots ④' \end{aligned}$$

①, ④ より

$$f(1) = a + b + c = 1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

③, ④ より

$$f(-1) = a - b + c = -7 \quad \cdots\cdots ⑥$$

①′, ④′ より

$$f'(1) = 2a + b = 2 \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑤, ⑥, ⑦ より

$$a = -1, \quad b = 4, \quad c = -2$$

よって，求める余りは

$$\boldsymbol{-x^2 + 4x - 2} \qquad \text{(答)}$$

である．

(2) x^n を 2 次式 x^2+x+1 で割った余りは 1 次以下の整式または 0 であるから，$ax+b$ (ただし，a, b は実数の定数) とおける．このとき，商を $Q(x)$ とすると

$$x^n=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ①$$

また，$x^2+x+1=0$ の解の 1 つを ω (虚数解) とすると

$$\omega^2+\omega+1=0, \quad \omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \qquad \therefore \quad \omega^3=1$$

①に $x=\omega$ を代入すると

$$\omega^n=a\omega+b$$

(i) $n=3k$ (k は自然数) のとき

$$\omega^n=\omega^{3k}=(\omega^3)^k=1 \qquad \therefore \quad 1=a\omega+b$$

$a \neq 0$ とすると，$\omega=\dfrac{1-b}{a}$ となり，ω は虚数で $\dfrac{1-b}{a}$ は実数であるから矛盾する．

よって，$a=0$, $b=1$ である．したがって，余りは 1 である．

(ii) $n=3k-2$ (k は自然数) のとき

$$\omega^n=\omega^{3k-2}=(\omega^3)^{k-1}\cdot\omega=\omega \qquad \therefore \quad \omega=a\omega+b$$

すなわち，$(1-a)\omega=b$ から，$a=1$, $b=0$ である．したがって，余りは x である．

(iii) $n=3k-1$ (k は自然数) のとき

$$\omega^n=\omega^{3k-1}=(\omega^3)^{k-1}\cdot\omega^2=-\omega-1 \qquad \therefore \quad -\omega-1=a\omega+b$$

すなわち，$(a+1)\omega=-(b+1)$ から，$a=-1$, $b=-1$ である．したがって，余りは $-x-1$ である．

以上より，余りは

$$\begin{cases} \boldsymbol{n=3k} \text{ **のとき** } & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{n=3k-2} \text{ **のとき** } & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{n=3k-1} \text{ **のとき** } & \boldsymbol{-x-1} \end{cases} \qquad \text{(ただし, } \boldsymbol{k} \text{ は自然数)} \qquad \text{(答)}$$

である．

【2】方程式を整理すると

$$(ax^2+x+a^2)+(ax^2+a^2x+1)i=0$$

より

$$\begin{cases} ax^2+x+a^2=0 \\ ax^2+a^2x+1=0 \end{cases}$$

共通解を α とすれば

$$\begin{cases} a\alpha^2+\alpha+a^2=0 & \cdots\cdots ① \\ a\alpha^2+a^2\alpha+1=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である.

①, ② より

$$(a^2-1)\alpha+1-a^2=0 \qquad \therefore \quad (a^2-1)(\alpha-1)=0$$

よって,「$a=\pm 1$　または　$\alpha=1$」が必要条件である。

(i) $a=1$ のとき

①, ② より, $\alpha^2+\alpha+1=0$ となり, α が虚数になるので, 不適当.

(ii) $a=-1$ のとき

①, ② より

$$\alpha^2-\alpha-1=0 \qquad \therefore \quad \alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

(iii) $\alpha=1$ のとき

①, ② より, $a^2+a+1=0$ となり, a が虚数になるので, 不適当.

以上より, 求める a の値は

$a=\mathbf{-1}$　　(答)

である.

【3】(1) $\cos\theta$ を c, $\sin\theta$ を s と略記すると, 加法定理より

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos(3\theta+2\theta) = \cos 3\theta\cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta \\ &= (4c^3-3c)(2c^2-1)-2sc(3s-4s^3) \\ &= 8c^5-10c^3+3c-2(3s^2-4s^4)c \\ &= 8c^5-10c^3+3c-2\{3(1-c^2)-4(1-c^2)^2\}c \\ &= 8c^5-10c^3+3c-2(-4c^5+5c^3-c) \\ &= 16c^5-20c^3+5c\end{aligned}$$

よって,

$$\boldsymbol{f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\cos 5\theta = f(\cos\theta)$ において,

$$\theta = \frac{\pi}{10},\ \frac{3\pi}{10},\ \frac{7\pi}{10},\ \frac{9\pi}{10}$$

のとき左辺は 0 となる. よって,

$$\cos\frac{\pi}{10},\ \cos\frac{3\pi}{10},\ \cos\frac{7\pi}{10},\ \cos\frac{9\pi}{10} \quad \cdots ①$$

は方程式 $f(x)=0$ の解である. さらに,

$$0 < \frac{\pi}{10} < \frac{3\pi}{10} < \frac{7\pi}{10} < \frac{9\pi}{10} < \pi$$

であるから, ①の 4 数はすべて異なり, かつ 0 でもない. したがって, 4 次方程式

$$16x^4-20x^2+5=0$$

の 4 解は①によって与えられる. つまり恒等式として

$$16\left(x-\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(x-\cos\frac{3}{10}\pi\right)\left(x-\cos\frac{7}{10}\pi\right)\left(x-\cos\frac{9}{10}\pi\right) = 16x^4-20x^2+5$$

となる. 定数項を比較することにより,

$$\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{9\pi}{10} = \frac{5}{16}$$

を得る.

（証明終）

【4】題意より $x^3+ax^2+bx+c=0$ は $x=1$ を解にもつから

$$1+a+b+c=0 \qquad \therefore \quad c=-(a+b+1) \quad \cdots\cdots ①$$

このとき与えられた3次方程式は

$$x^3+ax^2+bx-(a+b+1)=0 \iff (x-1)\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}=0$$

よって

$$x^2+(a+1)x+a+b+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の2解がともに絶対値1である．

(i) ②の解が実数のときは，題意より②は $x=1$ を重解にもつから

$$a+1=-2,\ a+b+1=1 \qquad \therefore \quad a=-3,\ b=3$$

したがって，①より

$$c=-1$$

(ii) ②の解が虚数のとき1つの解を β とすると他の解は $\overline{\beta}$ であるから，解と係数の関係より

$$\beta\overline{\beta}=a+b+1$$

一方，$\beta=p+qi$ ($p,\ q$ は実数) とすれば，$\overline{\beta}=p-qi$ であり

$$\beta\overline{\beta}=(p+qi)(p-qi)=p^2+q^2=|\beta|^2=1$$

よって，$a+b+1=1$ より $a+b=0$ であり，①より

$$c=-1$$

である．また

$$② \iff x^2+(a+1)x+1=0$$

と表せる．判別式が負より

$$(a+1)^2-4<0 \qquad \therefore \quad (a+3)(a-1)<0$$

a は整数より

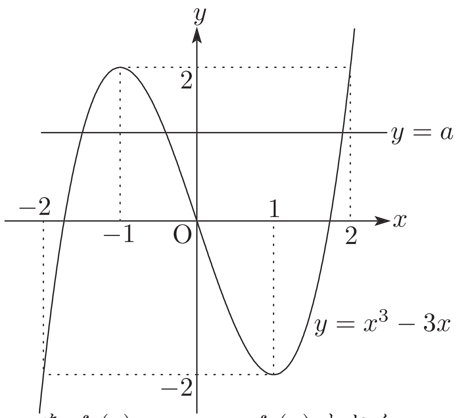
$$a=-2,\ -1,\ 0$$

(i)，(ii) より

$(a,\ b,\ c)=$ **$(-3,\ 3,\ -1)$，$(-2,\ 2,\ -1)$，$(-1,\ 1,\ -1)$，$(0,\ 0,\ -1)$** (答)

【5】(1) $f_1'(x) = 3x^2 - 3$ より，増減表は，以下のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



$f_1(x) = a$ をみたす実数 x の個数は，2 つのグラフ $y = f_1(x)$ と $y = a$ の共有点の個数に等しい．

よって

$|a| > 2$ のとき　1 個
$|a| = 2$ のとき　2 個　　(答)
$|a| < 2$ のとき　3 個

(2) $f_2(x) = f_1(f_1(x))$ である．$f_1(f_1(x)) = a$ を $f_1(z) = a$，$z = f_1(x)$ とおく．
(1) のグラフから

(i) $|a| > 2$ のとき，$|z| > 2$ の z が 1 個存在し，それに対して $z = f_1(x)$ となる x が **1** 個存在する．　(答)

(ii) $|a| = 2$ のとき，$|z| = 2$ の z と $|z| < 2$ の z が各 1 個存在し，それに対して，$z = f_1(x)$ となる x がそれぞれ 2 個と 3 個，計 **5** 個存在する．　(答)

(iii) $|a| < 2$ のとき，$|z| < 2$ の z が 3 個存在し，それぞれに対して $z = f_1(x)$ となる x がそれぞれ 3 個，計 **9** 個存在する．　(答)

(3) 1 以上の自然数 n と $|a| < 2$ である任意の定数 a に対し
$f_n(x) = a$ をみたす実数 x は 3^n 個存在し，すべて $|x| < 2$ の範囲にある．
かつ異なる a に対する 3^n 個の x の値はすべて異なる．

このことを数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のとき，(1) から成立する．n のとき，成立するとする．

$f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ なので，(2) と同様に $f_1(f_n(x)) = a$ を $f_1(z) = a$，$z = f_n(x)$ と分ける．

(1) から，$f_1(z) = a$ となる z が $|z| < 2$ の範囲に 3 個存在する．それを，z_1，z_2，z_3 とする．

これはすべて異なる．各 z_k $(k = 1, 2, 3)$ に対して，数学的帰納法の仮定によって，$f_n(x) = z_k$ となる x が 3^n 個存在し，z_1，z_2，z_3 に対する x の値はすべて異なる．

ゆえに，$f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)) = a$ となる x は 3^{n+1} 個存在する．

a が異なれば，(1) から対応する z_1，z_2，z_3 がすべて異なるので，上のようにして定まる $f_{n+1}(x) = a$ となる 3^{n+1} 個の x の値もすべて異なる．

よって，命題が $n+1$ でも成立したので，すべての n で成立する．

特に，$a = 0$ で成立するので，(3) が示された．

（証明終）

１章－２　数列の極限

問題

【1】(1) 1 を分母とする分数式と考え，分子を有理化すると

$$\text{与式} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1+1} = \mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式において

$$1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k} \quad (k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

であるから

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

よって

$$\text{与式} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) a と ± 1 の大小に注目して，次のように場合分けする．

(i) $a>1$ のとき

$$\text{与式} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{a}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}+1} = 0$$

(ii) $a=1$ のとき

$$\text{与式} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(iii) $-1<a<1$ のとき

$$\text{与式} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

(iv) $a=-1$ のとき，分母は 2 で，分子は振動するから，極限値は存在しない．

(v) $a<-1$ のとき，(i) と同様にして

$$\text{与式} = 0$$

以上をまとめて

$$\begin{cases} a<-1,\quad 1<a \text{ のとき，}\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-a^n}{1+a^{2n}}=\mathbf{0} \\ a=-1 \text{ のとき，}\quad \text{極限値は存在しない.} \\ -1<a<1 \text{ のとき，}\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-a^n}{1+a^{2n}}=\mathbf{2} \\ a=1 \text{ のとき，}\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-a^n}{1+a^{2n}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$ (答)

(4) $-1 \leqq \cos(60^\circ \times n) \leqq 1$ より

$$-\frac{1}{n^2} \leqq \frac{\cos(60^\circ \times n)}{n^2} \leqq \frac{1}{n^2} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(60^\circ \times n)}{n^2}=\mathbf{0}$$ (答)

(5) $\displaystyle\frac{n}{2}-1<\left[\frac{n}{2}\right] \leqq \frac{n}{2}$ より

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right] \leqq \frac{1}{2} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$ (答)

【2】(1) $g(x)=\dfrac{3^{n-1}a+bx-cx^n}{1+3^{n-1}+x^{n-1}}$ とおく．

$x>3$ のとき

$$g(x)=\frac{\left(\dfrac{3}{x}\right)^{n-1}a+\dfrac{bx}{x^{n-1}}-cx}{\dfrac{1}{x^{n-1}}+\left(\dfrac{3}{x}\right)^{n-1}+1}\to -cx\quad(n\to\infty)$$

$x=3$ のとき

$$g(x)=\frac{3b+(a-3c)3^{n-1}}{1+2\cdot 3^{n-1}}=\frac{\dfrac{3b}{3^{n-1}}+a-3c}{\dfrac{1}{3^{n-1}}+2}\to\frac{a-3c}{2}$$

$-3<x<3$ のとき

$$g(x)=\frac{a+\dfrac{bx}{3^{n-1}}-cx\left(\dfrac{x}{3}\right)^{n-1}}{\dfrac{1}{3^{n-1}}+1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^{n-1}}\to a$$

$x=-3$ のとき

$$g(x)=\frac{3^{n-1}a-3b-c(-3)^n}{1+3^{n-1}+(-3)^{n-1}}$$

n が奇数ならば

$$g(-3)=\frac{-3b+(a+3c)3^{n-1}}{1+2\cdot 3^{n-1}}=\frac{-\dfrac{3b}{3^{n-1}}+a+3c}{\dfrac{1}{3^{n-1}}+2}\to\frac{a+3c}{2}$$

n が偶数ならば

$$g(-3)=-3b+(a-3c)3^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}g(-3)=3$ となる条件は

$$a-3c=0,\quad -3b=\frac{a+3c}{2}=3$$

$\therefore\quad a=3,\quad b=-1,\quad c=1$

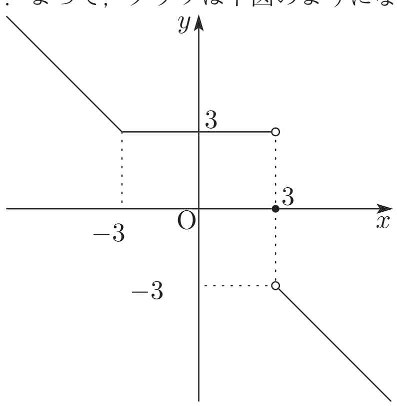
$x<-3$ のときは，$x>3$ のときと同様で，$g(x)\to -cx$.

$a=3$，$b=-1$，$c=1$　(答)

(2) $x>3$，$x<-3$ のとき $f(x)=-x$，$x=3$ のとき $f(x)=0$，

$-3<x<3$ のとき $f(x)=3$，$x=-3$ のとき $f(x)=3$

である．よって，グラフは下図のようになる．黒丸は含み，白丸は除く．



【3】$n \geqq 3$ のとき，二項定理より

$$(1+h)^n \geqq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$y=1+h\ (h>0)$ として ① を n^2 でわると

$$\frac{y^n}{n^2}=\frac{(1+h)^n}{n^2} \geqq \frac{1}{n^2}+\frac{h}{n}+\frac{n-1}{2n}h^2+\frac{(n-1)(n-2)}{6n}h^3 \quad \cdots\cdots ②$$

$n \to \infty$ で ② の右辺は $+\infty$ に発散するので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y^n}{n^2}=+\infty$$

ここで $0<|x|<1$ のとき $|x|=\dfrac{1}{y}$ とおくと

$$y>1, \quad |n^2x^n|=\frac{n^2}{y^n}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}|n^2x^n|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{y^n} \to 0$$

また $x=0$ のとき

$$n^2x^n=0$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}n^2x^n=\mathbf{0} \qquad (答)$$

【4】$\alpha = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{\alpha}$ より

$$2\alpha^2 = 2 + \alpha^2$$

$\alpha > 0$ のとき

$$\alpha = \sqrt{2}$$

だから

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

と推測できる.

$a_1 = 2 > \sqrt{2}$, ここで $a_k \geqq \sqrt{2}$ とすると

$$a_{k+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{a_k} + \frac{a_k}{2} - \sqrt{2} = \frac{\left(a_k - \sqrt{2}\right)^2}{2a_k} \geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

よって, 帰納的にすべての自然数 n について

$$a_n \geqq \sqrt{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a_n - \sqrt{2} \geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

① より

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(a_n - \sqrt{2}\right)^2}{2a_n} = \frac{\left(a_n - \sqrt{2}\right)}{2a_n}\left(a_n - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{a_n}\right)\left(a_n - \sqrt{2}\right)$$

であるが, ② より, $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a_n} < 1$ なので

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{a_n}\right)\left(a_n - \sqrt{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{2}\right)$$

これをくり返し使うと

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \sqrt{2} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)\left(a_n - \sqrt{2}\right) &\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(a_{n-1} - \sqrt{2}\right) \leqq \cdots\cdots \\ &\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(a_1 - \sqrt{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(2 - \sqrt{2}\right) \quad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

②, ③ より

$$0 \leqq a_n - \sqrt{2} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

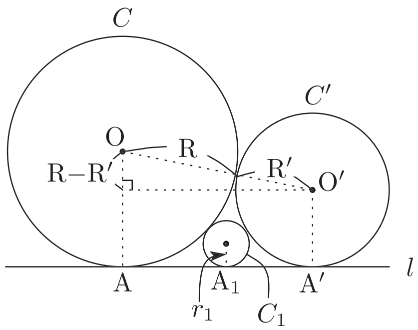
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ なので

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \sqrt{2}\right) \leqq 0$$

よって, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \sqrt{2}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad (\text{答})$$

【5】右図において



$$(\mathrm{R}+\mathrm{R}')^2-(\mathrm{R}-\mathrm{R}')^2=\overline{\mathrm{AA}'}^2$$

であるから

$$\overline{\mathrm{AA}'}=2\sqrt{\mathrm{RR}'}$$

同様に $\overline{\mathrm{AA}_1}=2\sqrt{\mathrm{R}r_1}$，$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}'}=2\sqrt{\mathrm{R}'r_1}$

であるから

$$2\sqrt{\mathrm{RR}'}=2\sqrt{\mathrm{R}r_1}+2\sqrt{\mathrm{R}'r_1}$$
$$=2\left(\sqrt{\mathrm{R}}+\sqrt{\mathrm{R}'}\right)\sqrt{r_1}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{r_1}}=\frac{\sqrt{\mathrm{R}}+\sqrt{\mathrm{R}'}}{\sqrt{\mathrm{RR}'}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}'}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}$$

であり，同様に

$$\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}$$

同様に考えて r_n と r_{n-1} の関係は

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}$$

であるから，$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}\right\}$ は公差 $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}$ の等差数列をなす.

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}'}}+n\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{r_n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{\mathrm{R}'}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2r_n}=\frac{1}{\mathrm{R}}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}n^2r_n=\mathbf{R}\qquad (答)$$

添削課題

【1】

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

である．ここで，$t = \cos\theta$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ だから，$-1 \leqq t \leqq 1$ をみたすすべての t に対して

$a(2t^2-1)+2\sqrt{2}bt-1<0$

となるような $(a,\ b)$ の存在する領域を求めればよい．

$f(t)=2at^2+2\sqrt{2}bt-a-1$ とおくと，$a \fallingdotseq 0$ のとき

$$f(t)=2a\left(t+\frac{b}{\sqrt{2}a}\right)^2-\frac{b^2}{a}-a-1$$

と変形できる．

(i) $a=0$，$a>0$ のとき，$u=f(t)$ のグラフはそれぞれ直線，下に凸な放物線を表すから，いずれの場合も

$f(-1)<0$，$f(1)<0$

よって

$a+2\sqrt{2}b-1<0$，$a-2\sqrt{2}b-1<0$

(ii) $a<0$ のとき

(ア) $-\dfrac{b}{\sqrt{2}a} \leqq -1$ または $1 \leqq -\dfrac{b}{\sqrt{2}a}$ のとき，すなわち $b \leqq \sqrt{2}a$ または $b \geqq -\sqrt{2}a$ のとき

$f(-1)<0$，$f(1)<0$ で (i) と同一

(イ) $-1<-\dfrac{b}{\sqrt{2}a}<1$ のとき

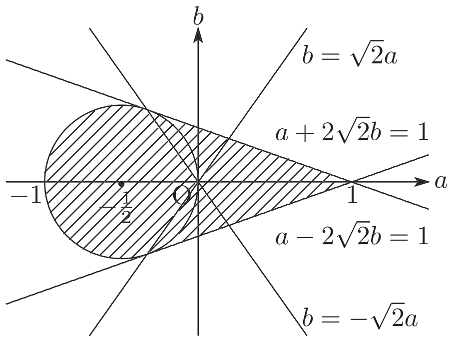
$$f\left(-\frac{b}{\sqrt{2}a}\right)=-\frac{b^2}{a}-a-1<0$$

$a<0$ より

$$a^2+a+b^2<0$$

$$\therefore\quad \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2<\frac{1}{4}$$

以上をまとめると，右図（境界を含まない）のようになる．

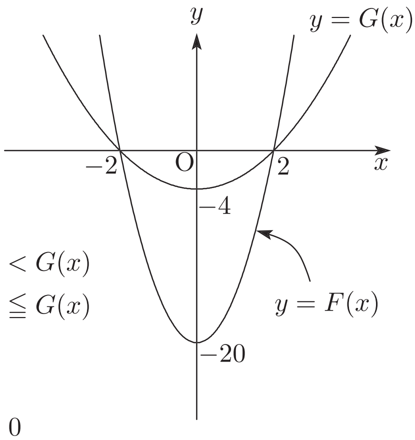


２章－１　方程式と不等式

問題

【1】　$F(x)=5(x^2-4)\quad G(x)=x^2-4$

とすると，２つのグラフは図のようになる．



$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする．

いま，$y=F(x)$ と $y=G(x)$ は 2 点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ のみを共有しているから

$$-2<x<2 \text{ において，} F(x)<f(x)<G(x)$$

$$\iff\quad -2\leqq x\leqq 2 \text{ において，} F(x)\leqq f(x)\leqq G(x)$$

である．

$F(\pm2)=G(\pm2)=0$ より

$$f(\pm2)=0\quad\iff\quad\begin{cases}4a+2b+c+8=0\\4a-2b+c-8=0\end{cases}$$

$\therefore\quad b=-4,\ c=-4a$

したがって

$$f(x)=x^3+ax^2-4x-4a=(x+a)(x^2-4)$$

$-2<x<2$ において，$x^2-4<0$ より

$$5(x^2-4)<(x+a)(x^2-4)<x^2-4\quad\text{かつ}\quad -2<x<2$$

$$\iff\quad 5>x+a>1\quad\text{かつ}\quad -2<x<2\quad\cdots\cdots(*)$$

ここで，$g(x)=x+a$ とすると

$$(*)\quad\iff\quad 1<g(x)<5\quad\text{かつ}\quad -2<x<2$$

$$\iff\quad\begin{cases}g(2)=a+2\leqq5\\g(-2)=a-2\geqq1\end{cases}$$

$$\iff\quad a=3$$

よって

$a=\mathbf{3},\ b=\mathbf{-4},\ c=\mathbf{-12}$　　(答)

【2】(1)

$$\begin{aligned}&pf(x_1)+qf(x_2)-f(px_1+qx_2)\\&=p{x_1}^2+q{x_2}^2-(px_1+qx_2)^2\\&=p(1-p){x_1}^2+q(1-q){x_2}^2-2pqx_1x_2\\&=pq{x_1}^2+pq{x_2}^2-2pqx_1x_2\\&=pq(x_1-x_2)^2\\&\geqq 0\qquad(\because\ \ p>0,\ q>0)\end{aligned}$$

等号が成立するのは $x_1=x_2$ のときである．　　〔証明終〕

(2) (1) の不等式より

$$
\begin{aligned}
\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &= 2\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\} \\
&= 2\left\{\frac{1}{2}f\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}f\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\} \\
&\geqq 2f\left(\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right) \\
&= 2\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1+a\cdot\frac{1}{a^2}+b\cdot\frac{1}{b^2}\right)^2 \qquad (\because \quad a+b=1) \quad \cdots\cdots(*) \\
&= \frac{1}{2}\left\{1+a\cdot f\left(\frac{1}{a}\right)+b\cdot f\left(\frac{1}{b}\right)\right\}^2 \\
&\geqq \frac{1}{2}\left\{1+f\left(a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}\right)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1+2^2\right)^2 \\
&= \frac{25}{2}
\end{aligned}
$$

$a+b=1$ より，等号が成立するのは $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ かつ $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$ すなわち $a=b=\dfrac{1}{2}$ のときである．　　〔証明終〕

＜別解＞

$$
\begin{aligned}
\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &= \cdots\cdots \\
&\geqq \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{b+a}{ab}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \qquad (\because \quad a+b=1)
\end{aligned}
$$

$a>0,\ b>0$ より，相加平均・相乗平均の不等式を使うと

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab} \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}\geqq\sqrt{ab} \qquad (\because \quad a+b=1)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{ab}\geqq 4 \qquad (\because \quad a>0,\ b>0)$$

よって

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geqq \frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2}$$

$a+b=1$ より，等号が成立するのは $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ かつ $a=b$ すなわち $a=b=\dfrac{1}{2}$ のときである．　　〔証明終〕

<コメント>

(1) の不等式は右図を考えるとよい．

$p>0,\ q>0,\ p+q=1$ より，x 座標が $x_1,\ x_2$ の点を $q:p$ に内分する点の x 座標は

$$\frac{px_1+qx_2}{p+q}=px_1+qx_2$$

であり

$$(\text{A の } y \text{ 座標})=f(px_1+qx_2)$$

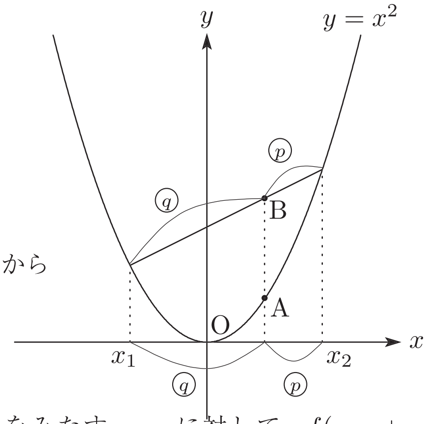
$$(\text{B の } y \text{ 座標})=\frac{pf(x_1)+qf(x_2)}{p+q}=pf(x_1)+qf(x_2)$$

である．$y=f(x)$ のグラフは下に凸であるから

$$(\text{A の } y \text{ 座標})\leqq(\text{B の } y \text{ 座標})$$

$$\therefore\quad f(px_1+qx_2)\leqq pf(x_1)+qf(x_2)$$

が成り立つ．



関数 $f(x)$ が $p>0,\ q>0,\ p+q=1$ をみたす $p,\ q$ に対して，$f(px_1+qx_2)\leqq pf(x_1)+qf(x_2)$ をみたすとき，$f(x)$ を凸関数という．

【3】

$$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

とする．

(i) 2 つの解がともに $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲にある場合

$$\begin{cases} b-\dfrac{a^2}{4}\leqq 0 \\ -1\leqq -\dfrac{a}{2}\leqq 1 \\ f(-1)=1-a+b\geqq 0 \\ f(1)=1+a+b\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b\leqq\dfrac{a^2}{4} \\ -2\leqq a\leqq 2 \\ b\geqq a-1 \\ b\geqq -a-1 \end{cases} \quad\cdots\cdots①$$

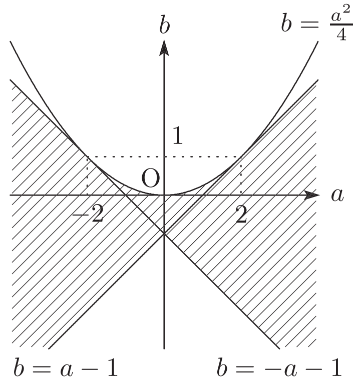
(ii) 1 つの解のみが $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲にある場合

$$f(-1)\cdot f(1)\leqq 0$$

$$\iff (1-a+b)(1+a+b)\leqq 0$$

$$\iff \begin{cases} b\geqq a-1 \quad \text{かつ} \quad b\leqq -a-1\cdots\cdots② \\ \text{または} \\ b\leqq a-1 \quad \text{かつ} \quad b\geqq -a-1\cdots\cdots③ \end{cases}$$

① または (② または ③) が求める領域であるから，これを図示すると図の斜線部のようになる (境界上の点を含む)．



【4】円 C_t の方程式は

$$(x-t)^2+\left(y-\frac{t^2}{2}\right)^2=\left(\frac{t^2}{2}\right)^2$$

と表される.

これを t について整理すると

$$(1-y)t^2-2xt+x^2+y^2=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

となる.

したがって，題意は

t の方程式 $(*)$ が少なくとも 1 つの正の実数解をもつ条件

を求めることに等しい.

いま

$$f(t)=(1-y)t^2-2xt+x^2+y^2$$

とする.

(i) $1-y=0 \iff y=1$ のとき

$(*)$ は

$$-2xt+x^2+1=0$$

ここで，$x=0$ は上式をみたさないから，$x \neq 0$ としてよく

$$t=\frac{x^2+1}{2x}$$

となり，$x>0$ のとき，t は正の実数となる.

よって

$$y=1 \quad (ただし，x>0) \quad \cdots\cdots ①$$

は条件をみたす.

(ii) $1-y<0 \iff y>1$ のとき

$y=f(t)$ は上に凸の 2 次関数であり

$$f(0)=x^2+y^2>0$$

より，$f(t)=0$ は必ず正の実数解をもつ.

よって

$$y>1 \quad \cdots\cdots ②$$

は条件をみたす.

(iii) $1-y>0 \iff y<1$ のとき

$y=f(t)$ は下に凸の 2 次関数であり

$$f(0)=x^2+y^2 \geqq 0$$

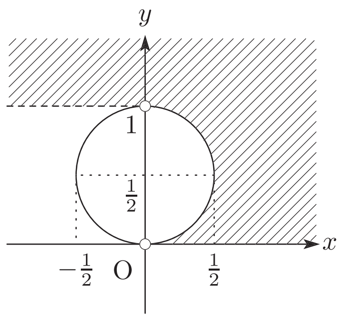
より，$f(t)=0$ が実数解をもち，かつ，$y=f(t)$ の軸が正であればよい.

$(*)$ の判別式を D とすると

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=x^2-(1-y)(x^2+y^2) \geqq 0 \\ \dfrac{x}{1-y}>0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y\left\{x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right\} \geqq 0 \\ x>0 \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

求める条件は ① または ② または ③ より図示すると図の斜線部のようになる (境界は，x 軸，半円の周上の点は含むが，原点および半直線 $y=1$ (ただし，$x \leqq 0$) 上の点は含まない).



【5】以下，整式 $f(x)$ の次数を $\deg f$ で表す．また，2 つの整式 $p(x)$,$q(x)$ について，$p(x)$ が $q(x)$ を割り切ることを $p(x) \mid q(x)$ で表す.

(1) $f(x)$ の次数を n とする：$\deg f = n$．このとき $f(x)$ は

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

とおけて，$a_0 \neq 0$ である．x を $1-x$ に変えて

$$f(1-x) = a_0(1-x)^n + a_1(1-x)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(1-x) + a_n$$

となる．題意より，$f(x) = f(1-x)$ は恒等式であるから，最高次の項，つまり n 次の項，の係数について

$$a_0 = a_0(-1)^n, \quad \therefore\ 1 = (-1)^n$$

が成り立ち，確かに n は偶数である．　　　[証明終]

(2) 条件式 $f(x) = f(1-x)$ が x についての恒等式であることから，特に $x=1$ のときも成り立つ．よって

$$f(1) = f(0) \qquad \cdots ①$$

いま，$h(x) = f(x) - f(0)$ と定めれば

▼ $h(1) = f(1) - f(0) = 0$　($\because$ ①) より，因数定理から $h(x)$ は $x-1$ を因数にもつ.

▼ $h(0) = f(0) - f(0) = 0$ より，同様に $h(x)$ は x を因数にもつ.

従って

$$x-1 \mid h(x),\ x \mid h(x)$$

であり，かつ $x-1$ と x は互いに素であるから，$h(x)$ は $x(x-1)$ で割り切れる.

以上より，$h(x) = f(x) - f(0)$ について，ある整式 $g(x)$ が存在して

$$f(x) - f(0) = x(x-1)g(x)$$

が成り立つことが示された.　　　[証明終]

(3) $h(x)=f(x)-f(0)$ について，$h(1-x)$ を計算してみると，$f(1-x)=f(x)$ を用いて

$h(1-x)=f(1-x)-f(0)=f(x)-f(0)=h(x) \qquad \cdots②$

が成り立つ．ここで (2) より $h(x)=x(x-1)g(x)$ と表されたから，x を $1-x$ に変えると

$h(1-x)=(1-x)(-x)g(1-x)=x(x-1)g(1-x) \quad \cdots③$

である．②と③とから，恒等式として

$x(x-1)g(x)=x(x-1)g(1-x) \quad \therefore g(x)=g(1-x) \quad \cdots④$

が成り立つ．

もし $g(x)$ が定数で，その値が k であれば，(2) の結果より

$f(x)=x(x-1)k+f(0)$

となり，$f(0)$ は定数であるから，確かにこのとき $f(x)$ は $x(x-1)$ の 1 次式で表される．

$g(x)$ が定数でないとする．このとき，④は $g(x)$ が題意の $f(x)$ と同じ性質をもつことを意味するから，(1) で示したように $g(x)$ は 2 次以上の偶数次の整式である．

このとき (2) より，ある整式 $g_1(x)$ が存在して

$g(x)-g(0)=x(x-1)g_1(x)$

が成り立つ．この左辺を $h_1(x)$ とすると，②と同様に $h_1(x)=h_1(1-x)$ が成り立ち，更に③の $g(x)$ を $g_1(x)$ に，$h(x)$ を $h_1(x)$ に変えた式が成り立つから，④と同様の

$g_1(x)=g_1(1-x)$

が恒等式として成立する．

$g_1(x)$ が定数か定数でないかで場合を分けて，この手順を繰り返せば，この手順は $\dfrac{\deg f}{2}=\dfrac{n}{2}$ 回繰り返すことができて，そこで停止する．このとき得られた式は，$x(x-1)$ についての $\dfrac{n}{2}$ 次式となるから，題意が証明された． **[証明終]**

問題

【1】$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{2n\pi}{3}$ の n に 1，2，3，$\cdots$ を代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{2n\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2^2}\cos\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{2^3}\cos 2\pi + \cdots$$

ここで，$\cos\frac{2n\pi}{3}$ の値を調べると，k を自然数とすれば

$n = 3k$ のとき　　$\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1$

$n = 3k-1$ のとき　$\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\left(2k - \frac{2}{3}\right)\pi = -\frac{1}{2}$

$n = 3k-2$ のとき　$\cos\frac{2n\pi}{3} = \cos\left(2k - \frac{4}{3}\right)\pi = -\frac{1}{2}$

よって，与えられた級数は，

$$-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^6} - \cdots\cdots$$

であり，ここで $S_k = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{2n\pi}{3}$ とすると

$$S_{3k} = \left(-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right)\left\{1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \left(\frac{1}{2^3}\right)^{k-1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^k}{1-\frac{1}{8}} = -\frac{2}{7}\left\{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^k\right\}$$

$\therefore\ \lim_{k\to\infty} S_{3k} = -\frac{2}{7}$

$S_{3k-1} = S_{3k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$，$S_{3k-2} = S_{3k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$

$\therefore\ \lim_{k\to\infty} S_{3k-1} = \lim_{k\to\infty} S_{3k-2} = \lim_{k\to\infty} S_{3k}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = -\boldsymbol{\frac{2}{7}}$　　(答)

【2】(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ より，

$$rS_n = \sum_{k=1}^{n} kr^{k} = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)r^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-1} \quad (\because k=1 \text{ のとき，} (k-1)r^{k-1}=0)$$

よって，

$$(1-r)S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} - nr^n$$

$$= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

$$\therefore \quad S_n = \boldsymbol{\frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $|r| < 1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} nr^n = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{1}{(1-r)^2}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $x \fallingdotseq \frac{n}{2}\pi$ のとき

$$f(x) = \sin x\cos x\left(1+\sin^2 x+\sin^4 x+\cdots\cdots\right)$$

$$= \sin x\cos x \cdot \frac{1}{1-\sin^2 x}$$

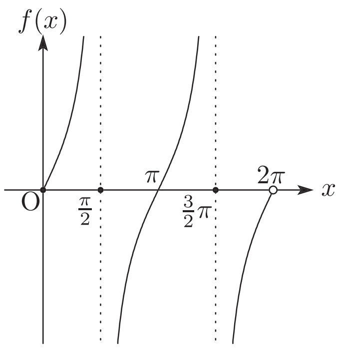
$$= \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \tan x$$

$x = \frac{n}{2}\pi$ のとき

$$f(x) = 0$$

だからグラフは下図のようになる．



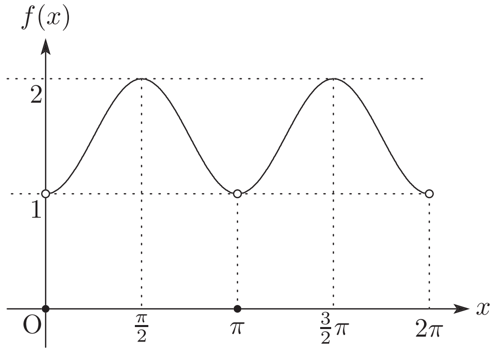
(2) $x \fallingdotseq n\pi$ のとき

$$f(x)=\sin^2 x\left(1+\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}+\cdots\cdots\right)$$
$$=\sin^2 x\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\sin^2 x}}$$
$$=\sin^2 x\cdot\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}$$
$$=1+\sin^2 x$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$x=n\pi$ のとき

$$f(x)=0$$

だからグラフは下図のようになる.



【4】(1) $a_n=7+2(n-1)=2n+5,\quad b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ と表せる. ここで, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_kc_k=S_n$ とすると

$n \geqq 2$ のとき

$$a_nb_nc_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
$$=(n+1)(n+2)$$

で $a_n \fallingdotseq 0,\ b_n \fallingdotseq 0$ に注意すると

$$c_n=\frac{(n+1)(n+2)}{a_nb_n}=\boldsymbol{\frac{3^n(n+1)(n+2)}{2n+5}}\quad \boldsymbol{(n \geqq 2)}\qquad(答)$$

また, $n=1$ のとき

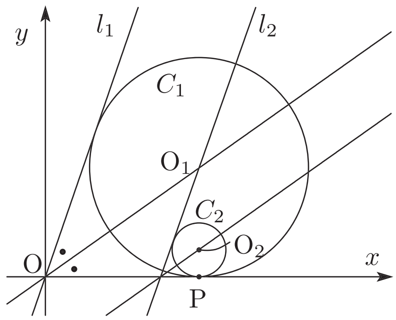
$$c_1=\frac{S_1}{a_1b_1}=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}\div\left(7\times\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{24}{7}}\quad\boldsymbol{(n=1)}\qquad(答)$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}=\frac{7}{24}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k+5}{3^k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{7}{24}+\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{3^{k-1}(k+1)}-\frac{1}{3^k(k+2)}\right\}$$
$$=\frac{7}{24}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3^n(n+2)}\to\frac{7}{24}+\frac{1}{9}\quad(n\to\infty)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}=\boldsymbol{\frac{29}{72}}\qquad(答)$$

【5】(1) x 軸から l_1 に測った角を θ とおくと

$$\tan\theta = 2\sqrt{2}$$



すなわち

$$\frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}} = 2\sqrt{2}$$

よって

$$\sqrt{2}\tan^2\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2} - \sqrt{2}$$
$$= \left(\sqrt{2}\tan\frac{\theta}{2} - 1\right)\left(\tan\frac{\theta}{2} + \sqrt{2}\right) = 0$$

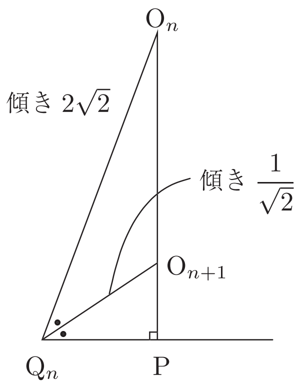
で，$\tan\dfrac{\theta}{2} > 0$ なので

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\mathrm{O}_1\left(p,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}p\right)$ となり

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}p$$

また，点 O_n の座標は $(p,\ r_n)$ と書けるが，このとき O_n を通り l_1 に平行な直線と x 軸との交点を Q_n とおくと



$$\mathrm{Q}_n\mathrm{P} = \frac{\mathrm{PO}_n}{2\sqrt{2}} = \frac{r_n}{2\sqrt{2}}$$
$$\therefore\quad r_{n+1} = \mathrm{PO}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Q}_n\mathrm{P} = \frac{1}{4}r_n$$

よって

$$r_n = r_1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}p\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$S_n = \pi {r_n}^2 = \frac{\pi}{2}p^2\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$

であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は初項 $\dfrac{\pi}{2}p^2$，公比 $\dfrac{1}{16}$ の無限等比級数である．よって，$\left|\dfrac{1}{16}\right| < 1$ より，この無限級数は収束して

$$S = \frac{\dfrac{\pi}{2}p^2}{1-\dfrac{1}{16}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{8}{15}\pi p^2} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ より

$$a_{n+1}b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\cdot\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=a_nb_n$$

であるから，数列 $\{a_nb_n\}$ は一定値をとる数列である．$a_1=2$, $b_1=1$ であるから

$$a_nb_n=a_1b_1=\mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $a_k>b_k>0$ $(k\geqq 1)$ であると仮定すると

$$b_{k+1}=\frac{2a_kb_k}{a_k+b_k}>0$$

$$a_{k+1}-b_{k+1}=\frac{(a_k+b_k)^2-4a_kb_k}{2(a_k+b_k)}=\frac{(a_k-b_k)^2}{2(a_k+b_k)}>0$$

より，$a_{k+1}>b_{k+1}>0$ が成り立つ．また，$a_1=2$, $b_1=1$ より，$a_1>b_1>0$ も成り立つ．よって，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $a_n>b_n$ が成り立つ．　　（証明終）

(3) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})-(a_n-b_n)&=\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})-\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})}\\&=\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})(a_{n-1}+b_{n-1})-(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})}\\&=\frac{b_{n-1}(a_{n-1}-b_{n-1})}{a_{n-1}+b_{n-1}}\\&>0\end{aligned}$$

より

$$a_n-b_n<\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1}) \qquad \text{（証明終）}$$

(4) (2), (3) より

$$0<a_n-b_n<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-b_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$$

$a_n-b_n=c_n$ とおくと，(1) より，$b_n=\dfrac{2}{a_n}$ であるから

$$a_n-\frac{2}{a_n}=c_n \quad\Longleftrightarrow\quad {a_n}^2-c_na_n-2=0$$

$a_n>0$ より

$$a_n=\frac{c_n+\sqrt{{c_n}^2+8}}{2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) $\sin x+\cos x=t$ とすると

$$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45^\circ)$$

$0^\circ \leqq x<360^\circ$ より，$45^\circ \leqq x+45^\circ<405^\circ$ であるから

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq \sqrt{2}$$

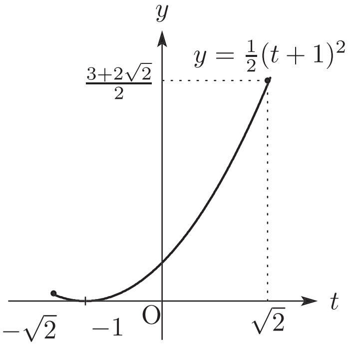
また

$$t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$$

$$\therefore\quad \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin x\cos x+(\sin x+\cos x)+1\\&=\frac{t^2-1}{2}+t+1\\&=\frac{1}{2}(t^2+2t+1)\\&=\frac{1}{2}(t+1)^2\end{aligned}$$



$-\sqrt{2}\leqq t\leqq \sqrt{2}$ であるから

$t=-1$ のとき　最小値　$\mathbf{0}$

$t=\sqrt{2}$ のとき　最大値　$\boldsymbol{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}}$　　(答)

(2)
$$\begin{aligned}g(\theta)&=\frac{1+\cos 2\theta}{2}-a\sin 2\theta+3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\\&=2-(\cos 2\theta+a\sin 2\theta)\\&=2-\sqrt{a^2+1}\cos(2\theta-\alpha)\left(\text{ただし，}\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}},\ \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より，$-\alpha \leqq 2\theta-\alpha \leqq 180^\circ-\alpha$ であり，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}>0$ より，a についての次のように場合分けする．

(i) $a\geqq 0$ のとき

α は第１象限の角もしくは $\alpha=0^\circ$ である．

$2\theta-\alpha=0^\circ \iff \theta=\dfrac{\alpha}{2}$

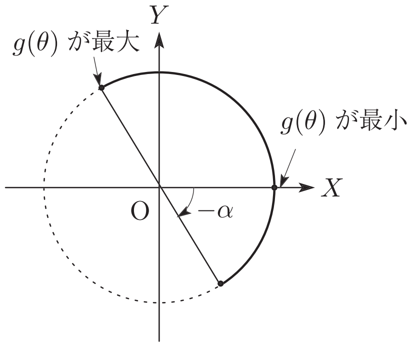
で最小となり，その値は

$$2-\sqrt{a^2+1}$$

$2\theta-\alpha=180^\circ-\alpha \iff \theta=90^\circ$

で最大となり，その値は

$$\begin{aligned}&2-\sqrt{a^2+1}\cos(180^\circ-\alpha)\\&=2+\sqrt{a^2+1}\cos\alpha\\&=2+\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\\&=3\end{aligned}$$



(ii) $a<0$ のとき

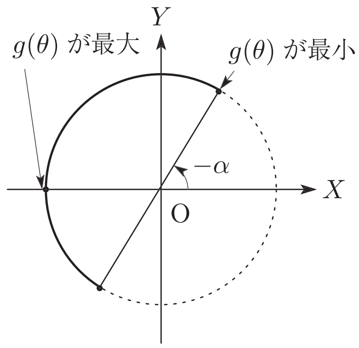
α は第 4 象限の角である．

$2\theta-\alpha=-\alpha \iff \theta=0^\circ$ で最小となり，その値は

$$2-\sqrt{a^2+1}\cos(-\alpha)$$
$$=2-\sqrt{a^2+1}\cos\alpha$$
$$=2-\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$=1$$

$2\theta-\alpha=180^\circ \iff \theta=\dfrac{\alpha}{2}+90^\circ$ で最大となり，その値は

$$2+\sqrt{a^2+1}$$



したがって

$$\begin{cases} a\geqq 0\text{ のとき}\begin{cases}\text{最小値} & \boldsymbol{2-\sqrt{a^2+1}} & \left(\theta=\dfrac{\alpha}{2}\right)\\ \text{最大値} & \boldsymbol{3} & (\theta=90^\circ)\end{cases}\\ a<0\text{ のとき}\begin{cases}\text{最小値} & \boldsymbol{1} & (\theta=0^\circ)\\ \text{最大値} & \boldsymbol{2+\sqrt{a^2+1}} & \left(\theta=\dfrac{\alpha}{2}+90^\circ\right)\end{cases}\end{cases}$$ (答)

【2】与式を変形すると

$$(3\sin x-4\sin^3 x)-4\sin x\cos x+(2-a^2)\sin x=0$$

$\therefore\quad \sin x\{3-4(1-\cos^2 x)-4\cos x+2-a^2\}=0$

$\therefore\quad \sin x(4\cos^2 x-4\cos x+1-a^2)=0$

$$\therefore\quad \begin{cases}\sin x=0\text{ すなわち } x=0,\ \pi\\ \text{または}\\ 4\cos^2 x-4\cos x+1-a^2=0 \quad \cdots\cdots(*)\end{cases}$$

ここで，$0<x<\pi$, $\pi<x<2\pi$ における

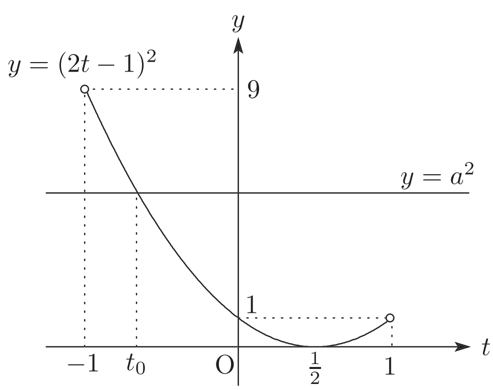
$(*)\quad\iff\quad 4\cos^2 x-4\cos x+1=a^2$

の解の個数を調べる．

$\cos x=t$ (ただし，$-1<t<1$) とおくと，$y=a^2$ と $y=4t^2-4t+1$ の交点の個数は

$$\begin{cases} a^2\geqq 9\text{ のとき} & 0\text{ 個}\\ 1\leqq a^2<9\text{ のとき} & 1\text{ 個}\\ 0<a^2<1\text{ のとき} & 2\text{ 個}\end{cases}$$

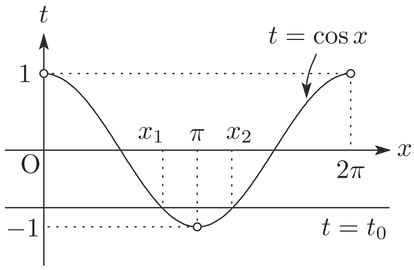
である．



$t=\cos x$ のグラフより，1 つの t に 2 つの x が対応するから，$x=0,\ \pi$ の 2 個を加えて

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \geqq 3} \textbf{ のとき} & 2+0\times 2=\mathbf{2}\ \textbf{(個)} \\ \boldsymbol{1 \leqq a < 3} \textbf{ のとき} & 2+1\times 2=\mathbf{4}\ \textbf{(個)} \\ \boldsymbol{0 < a < 1} \textbf{ のとき} & 2+2\times 2=\mathbf{6}\ \textbf{(個)} \end{cases}$$

(答)



【3】$18^\circ\times 5=90^\circ$ より，$\theta=18^\circ$ とすると

$$5\theta=90^\circ$$

$$\therefore\quad 2\theta=90^\circ-3\theta$$

よって

$$\sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)$$

$$\therefore\quad \sin 2\theta=\cos 3\theta$$

$$\therefore\quad 2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta(2\sin\theta-4\cos^2\theta+3)=0$$

$$\therefore\quad \cos\theta(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$$

ここで，$\cos\theta\fallingdotseq 0$ より

$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$\sin\theta=\sin 18^\circ>0$ より

$$\sin 18^\circ=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}\qquad \text{(答)}$$

【4】2 直線 ℓ，m の交点を原点 O とし，ℓ を x 軸に重ねて xy 座標平面で考える．以下，$\overrightarrow{0}$ と異なるベクトル $\overrightarrow{a}$ が x 軸正方向となす角を『$\overrightarrow{a}$ の偏角』と呼び，それを $\arg\left(\overrightarrow{a}\right)$ と表す．また，原点からの距離が定まっていれば，点の位置は偏角だけで決定するから，$\arg\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\theta$ であるとき $\mathrm{A}(\theta)$ として点 A の座標と見なすことができる．そこで，点についても偏角という概念を拡張し，『A の偏角』とも言うことにする．

図 1

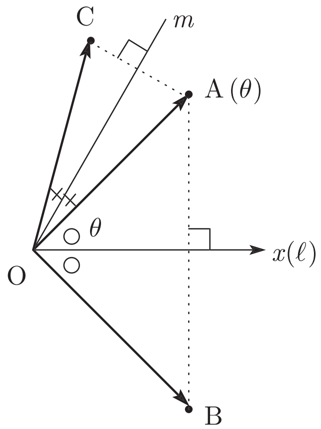


図 1 のように，点 $\mathrm{A}(\theta)$ が定まったとする．このとき，A の ℓ に関する対称点 B，m に関する対称点 C について

$$\arg\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=-\theta,\quad \arg\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\theta+2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{2\pi}{3}-\theta$$

である．

よって一般に次が言える：偏角 θ をもつ点 A の，

- ℓ に関する対称点 B の偏角は $-\theta$ であり，
- m に関する対称点 C の偏角は $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$ である．

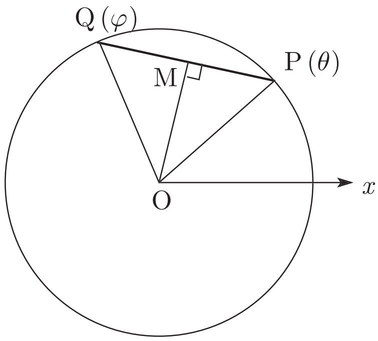
(a) 題意より $\arg\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right)=\theta$ とおくと，ℓ と m に関する逐次的な対称移動により，点 Q_1，P_2，$\cdots$ の偏角は次のようになる：

P_1	θ
Q_1	$-\theta$
P_2	$\dfrac{2\pi}{3}-(-\theta)=\theta+\dfrac{2\pi}{3}$
Q_2	$-\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\theta-\dfrac{2\pi}{3}$
P_3	$\dfrac{2\pi}{3}-\left(-\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\theta+\dfrac{4\pi}{3}$
Q_3	$-\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\theta-\dfrac{4\pi}{3}$
P_4	$\dfrac{2\pi}{3}-\left(-\theta-\dfrac{4\pi}{3}\right)=\theta+2\pi$

従って，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP_4}}$ の偏角は一致する．これは，2 点 P_1 と P_4 が一致することを表す．　　[証明終]

(b) 単位円 U 上に，偏角が θ，φ である 2 点 $\mathrm{P}(\theta)$，$\mathrm{Q}(\varphi)$ をとる．図 2 を参照せよ．

図 2



弦 PQ の中点を M とすれば

$$\mathrm{PQ} = 2\mathrm{PM} = 2\left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|$$

が成り立つ．つまり，弦の長さは，その端点の偏角の差で表される．そこで，点列 $\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_4$ の隣り合う 2 点の偏角の差を求めると，表 1 のようになる．

表 1

$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$	$\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$	$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$	$\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$	$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$	$\mathrm{Q}_3\mathrm{P}_4$
2θ	$\frac{2\pi}{3}+2\theta$	$\frac{4\pi}{3}+2\theta$	$\frac{6\pi}{3}+2\theta$	$\frac{8\pi}{3}+2\theta$	$\frac{10\pi}{3}+2\theta$

そこで，折れ線の長さの和を

$$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{Q}_3\mathrm{P}_4 = L(\theta)$$

とすると

$$\begin{aligned} L(\theta) &= 2|\sin\theta| + 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right| \\ &\quad + 2\left|\sin\left(\frac{3\pi}{3}+\theta\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\theta\right)\right| \end{aligned}$$

関数 $|\sin x|$ は周期 π をもつから

$$\left|\sin\left(\frac{3\pi}{3}+\theta\right)\right| = |\sin\theta|, \quad \left|\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right|$$

などが成り立ち

$$L(\theta) = 4\left\{|\sin\theta| + \left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right| + \left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right|\right\}$$

さらに

$$\begin{aligned} L\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) &= 4\left\{\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right| + \left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right| + |\sin(\pi+\theta)|\right\} \\ &= 4\left\{\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right| + \left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right| + |\sin\theta|\right\} \\ &= L(\theta) \end{aligned}$$

であるから，関数 $L(\theta)$ は周期 $\frac{\pi}{3}$ をもつ．よって $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ で考えれば十分である．

この範囲では，$\sin\theta$，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ の値はすべて非負であるから，絶対値記号はそのままはずれて

$$\begin{aligned} L(\theta) &= 4\left\{\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right\} \\ &= 4\left\{\sin\theta+2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{6}\right\} \\ &= 4\left(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\right) \\ &= 4\cdot 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=8\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ であり，よって $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$L(\theta)$ は最大となる．

以上より

$\max L(\theta)=L\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\mathbf{8}$　　(答)

問題

【1】(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\cdot 4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\qquad\text{(答)}$$

(2)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-4x+3)-(x^2+4x+3)}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}$$

ここで，$x<0$ のとき，

$$\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}$$

$$=|x|\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)$$

$$=-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)$$

となるから，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x}{-x\left(\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0+0}}=\mathbf{4}\qquad\text{(答)}$$

(3)

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\qquad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

なので，

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin 3x}{3x}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2\sin x\cos x}{2x}-\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{3x}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left\{\frac{\sin x}{x}(\cos x-1)+\frac{4\sin^3 x}{3x}\right\}$$

$$=-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{4}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$$

そして，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ であり，また (1) より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ なので，

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin 3x}{3x}\right)=-1\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\cdot1^3=\boldsymbol{\frac{5}{6}}\qquad\text{(答)}$$

(4) 十分大きい x に対して，

$$\frac{[x]!}{x^x}>0$$

である．一方，$[x]=n$ とおくと，$[x]!=n!$ であり，また $n\leqq x$ なので，

$$n^n\leqq x^x\qquad\therefore\quad\frac{[x]!}{x^x}\leqq\frac{n!}{n^n}$$

そして，

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}$$

$$\therefore\quad 0<\frac{[x]!}{x^x}\leqq\frac{1}{n}$$

すると，$x\to+\infty$ のとき $n\to\infty$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{x^x}=\mathbf{0}\qquad\text{(答)}$$

【2】 $x-\pi=t$ と置き換え，$t\to0$ での極限を考えると

$$\begin{aligned}\text{与式の左辺}&=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{a+\cos(t+\pi)}-b}{t^2}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-b}{t^2}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

① において

$t\to0$ のとき，　分母 : $t^2\to0$

となる．よって，① が有限な極限値 $\left(=\dfrac{1}{4}\right)$ をもつためには，分子 $\to0$ が必要である．

$$\therefore\quad\lim_{t\to0}\left(\sqrt{a-\cos t}-b\right)=\sqrt{a-1}-b=0$$

$$\therefore\quad b=\sqrt{a-1}\quad\cdots\cdots②$$

また，このとき ② を ① に代入すると

$$\begin{aligned}\text{与式の左辺}&=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-\sqrt{a-1}}{t^2}\\&=\lim_{t\to0}\frac{(a-\cos t)-(a-1)}{t^2\left(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}\right)}\quad(\because\ \text{分子の有理化})\\&=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2\left(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}\right)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a-1}}\quad\left(\because\ \lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{a-1}}\end{aligned}$$

したがって，条件より

$$\frac{1}{4\sqrt{a-1}}=\frac{1}{4}\qquad\therefore\quad\sqrt{a-1}=1\qquad\therefore\quad a=2$$

これと ② より

$\boldsymbol{a=2,\quad b=1}$　　(答)

【3】 $\boxed{1}$

(i) $0 \leqq x < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x^{2n+1} = 0$$

なので

$$f(x) = \frac{0 + (a-1)\cdot 0 - 1}{0 - a\cdot 0 - 1} = 1$$

(ii) $x = 1$ のとき

$$\frac{x^{2n+1} + (a-1)x^n - 1}{x^{2n} - ax^n - 1} = \frac{1 + (a-1)\cdot 1 - 1}{1 - a\cdot 1 - 1} = \frac{1-a}{a}$$

$$\therefore \quad f(1) = \frac{1-a}{a}$$

(iii) $x > 1$ のとき

$$\frac{x^{2n+1} + (a-1)x^n - 1}{x^{2n} - ax^n - 1} = \frac{1 + (a-1)\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1}}{\frac{1}{x} - a\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1}}$$

と変形できるので，$0 < \dfrac{1}{x} < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1} = 0$$

よって，このとき

$$f(x) = \frac{1 + (a-1)\cdot 0 - 0}{\frac{1}{x} - a\cdot 0 - 0} = x$$

となる．

以上より，$f(x)$ は $0 \leqq x < 1$，$1 < x$ の範囲ではそれぞれ連続なので，$x = 1$ で連続であるための条件を求めればよい．ここで

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 1 = 1, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} x = 1$$

なので，求める条件は

$$f(1) = 1$$

よって

$$\frac{1-a}{a} = 1 \qquad \therefore \quad a = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$ (答)

$\boxed{2}$

(1) まず

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \sin\frac{1}{h}$$

であり, $h \to 0$ のとき, この極限は存在しない．よって $\boldsymbol{x = 0}$ **で微分可能ではない．** (答)

そして，$x \neq 0$ のとき

$$0 \leqq \left| x\sin\frac{1}{x} \right| \leqq |x|$$

なので $\displaystyle\lim_{x\to 0} |x| = 0$ と，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \cdots\cdots ①$$

よって

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

だから，$\boldsymbol{x=0}$ **で連続である．**　(答)

(2) まず

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

① により，$g'(0)=0$ だから $\boldsymbol{x=0}$ **で微分可能である．**　(答)

よって，$\boldsymbol{x=0}$ **で連続である．**　(答)

【4】

$y=\alpha x+e^{-\alpha}$ ⋯⋯①

$y=\beta x+e^{-\beta}$ ⋯⋯②

(1) まず，交点を求めよう．

①－② から

$$(\beta-\alpha)x=e^{-\alpha}-e^{-\beta}$$

$\alpha\fallingdotseq\beta$ ゆえ

$$x=\frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{e^{\alpha+\beta}(\alpha-\beta)}$$

①×β－②×α から

$$(\beta-\alpha)y=\frac{\beta e^{\beta}-\alpha e^{\alpha}}{e^{\alpha+\beta}}\qquad\therefore\quad y=\frac{\alpha e^{\alpha}-\beta e^{\beta}}{e^{\alpha+\beta}(\alpha-\beta)}$$

交点は

$$\boldsymbol{\left(\frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{e^{\alpha+\beta}(\alpha-\beta)},\quad\frac{\alpha e^{\alpha}-\beta e^{\beta}}{e^{\alpha+\beta}(\alpha-\beta)}\right)}$$　(答)

(2) $\alpha=\beta$ としたのでは，$\dfrac{0}{0}$ の不定形になる．

$$\lim_{\beta\to\alpha}\frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{e^{\alpha+\beta}(\alpha-\beta)}=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{e^{\beta-\alpha}-1}{e^{\beta}(\beta-\alpha)}=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{1}{e^{\beta}}\cdot\frac{e^{\beta-\alpha}-1}{\beta-\alpha}\quad\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\beta-\alpha=h$ とおけば $\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}\frac{e^{\beta-\alpha}-1}{\beta-\alpha}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$ であるから，この

極限値は $\dfrac{1}{e^{\alpha}}=e^{-\alpha}$ となる．このときの y の座標は ① 式から

$$\lim_{x\to e^{-\alpha}}y=\alpha e^{-\alpha}+e^{-\alpha}=(\alpha+1)e^{-\alpha}$$

$\boldsymbol{(e^{-\alpha},\quad(\alpha+1)e^{-\alpha})}$ **に近づく**　(答)

【5】等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ において，$y=0$ とすると

$$f(x)=f(x)+f(0)+f(x)f(0)\qquad\therefore\quad f(0)\{1+f(x)\}=0$$

ゆえに，$f(x)=-1$ または $f(0)=0$.

定数関数 $f(x)=-1$ のとき，明らかにすべての x の値で微分可能である．

$f(0)=0$ のとき

$$f(x+h)=f(x)+f(h)+f(x)f(h) \text{ であるから}$$

$$f(x+h)-f(x)=f(h)\{1+f(x)\}=\{f(h)-f(0)\}\{1+f(x)\}$$

また，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$$

が存在する．

ゆえに

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\{1+f(x)\}\\ &= f'(0)\{1+f(x)\}\end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ はすべての x の値で微分可能である．(証明終)

添削課題

【1】不等式の (左辺) − (右辺) は

$$(\sin x+\sin y)-(\cos x+\cos y)$$
$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$=2\cos\frac{x-y}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

となる．また

$$0<x<\frac{\pi}{2},\ 0<y<\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots①$$

だから

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{x-y}{2}<\frac{\pi}{4}$$

よって

$$\cos\frac{x-y}{2}>0$$

したがって，与えられた不等式は

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

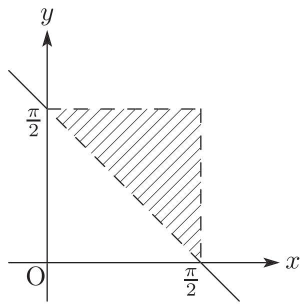
と同じことになる．

$-\frac{\pi}{4}<\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$ だから，適する範囲は

$$\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}>0$$

$$\therefore\quad x+y>\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots②$$

①，② をみたす点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，右の図の斜線部分で，境界は含まない．



M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学Ⅰ Ａ Ⅱ Ｂ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	