本科１期４月度

解答

Ｚ会東大進学教室

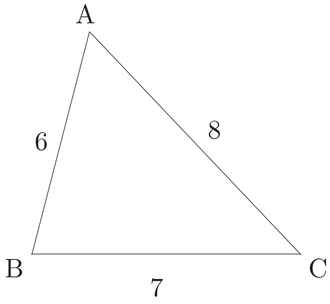
難関大数学ⅠＡⅡＢ

難関大文系数学Ｍ

1章　3角比・3角関数

問題

【1】(1) 余弦定理より



$$8^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cos\angle\mathrm{ABC}$$

$$\therefore \quad \cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \mathbf{\frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $0^\circ < \angle\mathrm{ABC} < 180^\circ$ なので，(1) より

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

である．ここで，△ ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

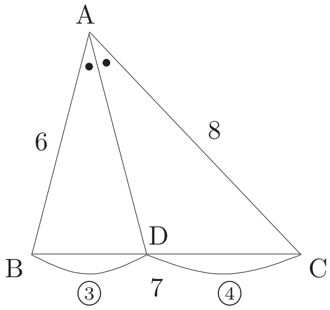
$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = 2R \qquad \therefore \quad R = \frac{8}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \mathbf{\frac{16\sqrt{15}}{15}} \qquad \text{(答)}$$

また，△ ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \mathbf{\frac{21\sqrt{15}}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(3) AD は ∠BAC の 2 等分線なので

$$\mathrm{BD} : \mathrm{CD} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 3 : 4$$



$$\therefore \quad \mathrm{BD} = \frac{3}{7}\mathrm{BC} = \mathbf{3},\ \mathrm{CD} = \frac{4}{7}\mathrm{BC} = \mathbf{4} \qquad \text{(答)}$$

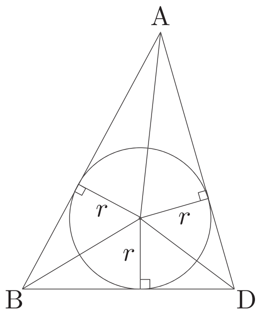
よって，△ ABD に余弦定理を適用して

$$\mathrm{AD}^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cos\angle\mathrm{ABD} = 36$$

$$\therefore \quad \mathrm{AD} = \mathbf{6} \qquad \text{(答)}$$

(4) △ ABD の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{9\sqrt{15}}{4}$$



であるから，△ ABD の内接円の半径 r は

$$\frac{9\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2}(6 + 3 + 6)r \qquad \therefore \quad r = \frac{3\sqrt{15}}{10}$$

△ ACD の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{21\sqrt{15}}{4} - \frac{9\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$$

であるから，△ ACD の内接円の半径 r' は

$$3\sqrt{15} = \frac{1}{2}(6 + 4 + 8)r' \qquad \therefore \quad r' = \frac{3\sqrt{15}}{9}$$

以上より

$$r : r' = \frac{3\sqrt{15}}{10} : \frac{3\sqrt{15}}{9} = \mathbf{9 : 10} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $\triangle$ ABC は半径 1 の円に内接するので，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{A}} = 2\cdot 1$$

$$\therefore\quad \mathrm{BC} = 2\sin 60^\circ = \boldsymbol{\sqrt{3}}\quad (\text{答})$$

(2) $\angle\mathrm{ABC} = \theta$ とおくと

$$0^\circ < \theta < 120^\circ$$

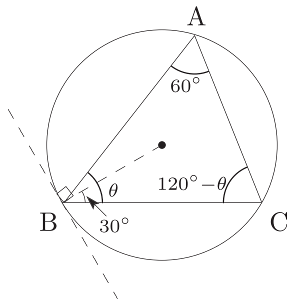
であり

$$\angle\mathrm{ACB} = 120^\circ - \theta$$

すると，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin(120^\circ-\theta)} = 2$$

$$\therefore\quad \mathrm{AC} = 2\sin\theta, \mathrm{AB} = 2\sin(120^\circ-\theta)$$



であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA} &= 2\sin\theta + 2\sin(120^\circ-\theta) + \sqrt{3}\\ &= 2\cdot 2\sin\frac{\theta+(120^\circ-\theta)}{2}\cos\frac{\theta-(120^\circ-\theta)}{2} + \sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\cos(\theta-60^\circ) + \sqrt{3}\end{aligned}$$

よって，$0^\circ < \theta < 120^\circ \iff -60^\circ < \theta - 60^\circ < 60^\circ$ なので，$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}$ は

$$\theta - 60^\circ = 0^\circ \qquad \therefore\quad \theta = 60^\circ$$

のとき最大で，その最大値は

$$2\sqrt{3} + \sqrt{3} = \boldsymbol{3\sqrt{3}} \qquad (\text{答})$$

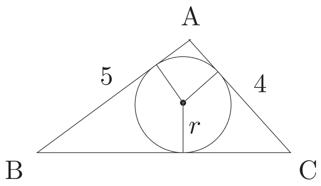
【3】(1) AB= 5，AC= 4 の△ ABC の面積が 8 なので

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\sin A = 8$$

$\therefore\quad \sin A = \mathbf{\frac{4}{5}}$　　(答)

また，△ ABC は鋭角 3 角形なので

$$\cos A = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$　　(答)



(2) 余弦定理より

$$BC^2 = 5^2+4^2-2\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{3}{5} = 17$$

$\therefore\quad BC = \sqrt{17}$

よって，△ ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \qquad \therefore\quad R = \frac{\sqrt{17}}{2\cdot\frac{4}{5}} = \mathbf{\frac{5\sqrt{17}}{8}}$$　　(答)

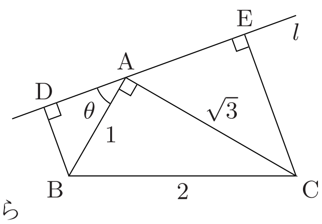
(3) △ ABC の内接円の半径を r とすると

$$8 = \frac{1}{2}(5+4+\sqrt{17})r$$

$$\therefore\quad r = \frac{16}{9+\sqrt{17}} = \mathbf{\frac{9-\sqrt{17}}{4}}$$　　(答)

【4】 △ ABC に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 4 \qquad \therefore\ \mathrm{BC} = 2$$



$\angle\mathrm{BAD} = \theta$ とすると，l は頂点 A を通り，頂点 A 以外の △ ABC の辺，頂点と共有点をもたないので

$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

このとき，△ ADB は $\angle\mathrm{ADB} = 90^\circ$ の直角 3 角形であるから

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\cos\theta = \cos\theta$$

$$\mathrm{DB} = \mathrm{AB}\sin\theta = \sin\theta$$

また

$$\angle\mathrm{CAE} = 180^\circ - \angle\mathrm{CAD} = 90^\circ - \theta$$

であり，△ ACE は $\angle\mathrm{AEC} = 90^\circ$ の直角 3 角形であるから

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AC}\cos(90^\circ - \theta) = \sqrt{3}\sin\theta$$

$$\mathrm{CE} = \mathrm{AC}\sin(90^\circ - \theta) = \sqrt{3}\cos\theta$$

よって，4 角形 BCED の周の長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{DB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CE} + \mathrm{ED} \\ &= \sin\theta + 2 + \sqrt{3}\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \\ &= (\sqrt{3}+1)(\sin\theta + \cos\theta) + 2 \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\sin(\theta + 45^\circ) + 2 \end{aligned}$$

$45^\circ < \theta + 45^\circ < 135^\circ$ なので，L は

$$\theta + 45^\circ = 90^\circ \qquad \therefore\ \theta = 45^\circ$$

のとき最大で，その最大値は

$$\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) + 2 = \boldsymbol{\sqrt{2} + \sqrt{6} + 2} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) $a^x=\sqrt{2}+1$ より

$$a^x+a^{-x}=\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1$$
$$=\mathbf{2\sqrt{2}}\qquad\text{(答)}$$

次に

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}+a^{-2x}-1)}{a^x+a^{-x}}=a^{2x}+a^{-2x}-1$$
$$=(a^x+a^{-x})^2-3$$
$$=(2\sqrt{2})^2-3$$
$$=\mathbf{5}\qquad\text{(答)}$$

(2) $a^x=A$ とおくと

$$aA^2-a^2A-\frac{1}{a}A+1\leqq 0$$
$$\Longleftrightarrow a^2A^2-\left(a^3+1\right)A+a\leqq 0$$
$$\Longleftrightarrow \left(a^2A-1\right)(A-a)\leqq 0\quad\cdots\cdots\cdots\ ①$$

ここで，a と 1 の大小で場合を分ける．

(i) $0<a<1$ のとき，$0<a<1$，$\dfrac{1}{a^2}>1$ より

$$a<\frac{1}{a^2}$$

なので，①を A について解くと

$$a\leqq A\leqq\frac{1}{a^2}\qquad\therefore\quad a\leqq a^x\leqq a^{-2}$$

底 a が $0<a<1$ をみたすので

$$-2\leqq x\leqq 1$$

(ii) $a>1$ のとき，$a>1$，$0<\dfrac{1}{a^2}<1$ より

$$(0<)\frac{1}{a^2}<a$$

なので，①を A について解くと

$$\frac{1}{a^2}\leqq A\leqq a\qquad\therefore\quad a^{-2}\leqq a^x\leqq a$$

底 a が $a>1$ をみたすので

$$-2\leqq x\leqq 1$$

以上より

$$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq 1}\qquad\text{(答)}$$

(3) 真数条件より

$$x+1>0\ \text{かつ}\ 3x+4>0$$
$$\therefore\quad x>-1\quad\cdots\cdots\cdots\ ①$$

のもとで考える．与えられた不等式の底を $\dfrac{1}{2}$ に統一すると

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>\frac{\log_{\frac{1}{2}}(3x+4)}{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}}$$
$$\therefore\quad 2\log_{\frac{1}{2}}(x+1)>\log_{\frac{1}{2}}(3x+4)$$

$\therefore\quad \log_{\frac{1}{2}}(x+1)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x+4)$

よって，底 $\dfrac{1}{2}$ は $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ なので

$(x+1)^2 < 3x+4$

$\therefore\quad x^2 - x - 3 < 0$

したがって，①に注意して解くと

$\boldsymbol{-1 < x < \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}}$　　(答)

(4) 両辺底を 2 とする対数をとると

$$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 64x \iff (\log_2 x)^2 = \log_2 x + 6$$

よって，$\log_2 x$ について解くと

$\log_2 x = -2,\ 3$ すなわち $x = 2^{-2},\ 2^3$

したがって

$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{4},\ 8}$　　(答)

(5) 底を 2 に統一すると

$$\log_2 x + \log_x 4 = \log_2 x + \frac{\log_2 4}{\log_2 x}$$
$$= \log_2 x + \frac{2}{\log_2 x}$$

ここで，$x > 1$ より，$\log_2 x > 0$ なので，相加・相乗平均の関係より

$$\log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} \geqq 2\sqrt{\log_2 x \cdot \frac{2}{\log_2 x}} = 2\sqrt{2}$$

等号は

$$\log_2 x = \frac{2}{\log_2 x}$$

$\therefore\quad \log_2 x = \sqrt{2}$ すなわち $x = 2^{\sqrt{2}}$

のとき確かに成立するので，求める最小値は

$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$　　(答)

【2】(1) (i) $\log_2 x = t$ とおくと

$$\log_2 8x = \log_2 2^3 + \log_2 x = t + 3$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x} = \frac{\log_2 \sqrt{2x}}{\log_2 \dfrac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log_2 2x = -\frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 x) = -\frac{1}{2}(t+1)$$

と表されるので

$$f(x) = (t+3)^2 - 2\left\{-\frac{1}{2}(t+1)\right\}$$

$$= \boldsymbol{t^2 + 7t + 10} \qquad (答)$$

(ii) (i) より

$$f(x) = g(t) = t^2 + 7t + 10$$

とする．ここで

$$\frac{1}{16} \leqq x \leqq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 \leqq \log_2 x \leqq 0$$

であるから，$f(x)$ のとり得る値の範囲は，$g(t)$ の $-4 \leqq t \leqq 0$ における値域に一致する．よって

$$g(t) = \left(t + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad (-4 \leqq t \leqq 0)$$

と変形できるので

$$\boldsymbol{-\frac{9}{4} \leqq f(x) \leqq 10} \qquad (答)$$

(2) (i) $N = 12^{20} = (2^2 \cdot 3)^{20}$ とおく．

$$\log_{10} N = 20(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 21.582$$

したがって

$$10^{21} < N = 10^{21.582} < 10^{22}$$

よって，**22 桁の整数である．** (答)

(ii) $M = \left(\dfrac{1}{18}\right)^{15} = \left(\dfrac{1}{2 \cdot 3^2}\right)^{15}$ とおく．

$$\log_{10} M = -15(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3) = -18.828$$

したがって

$$10^{-19} < M = 10^{-18.828} < 10^{-18}$$

よって，**小数第 19 位**にはじめて 0 でない数が現れる． (答)

２章　指数・対数関数

問題

【1】(1) $x=\dfrac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}$ より

$$x^2-1=\frac{3^{\frac{2}{n}}+2\cdot 3^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}+3^{-\frac{2}{n}}}{4}-1$$

$$=\frac{3^{\frac{2}{n}}+3^{-\frac{2}{n}}-2}{4}=\left(\frac{3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2$$

であり，$n>0$ より

$$3^{\frac{1}{n}}>3^{-\frac{1}{n}} \qquad \therefore\quad 3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}}>0$$

なので

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}}}{2}$$

よって

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n=\left(\frac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}+\frac{3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=(3^{\frac{1}{n}})^n=\mathbf{3} \qquad \text{(答)}$$

(2) 底の変換公式より，底を 10 にすると

$$\log_{75}24=\frac{\log_{10}24}{\log_{10}75}=\frac{\log_{10}2^3\cdot 3}{\log_{10}3\cdot 5^2}$$

$$=\frac{\log_{10}2^3\cdot 3}{\log_{10}\dfrac{3\cdot 10^2}{2^2}}=\frac{\log_{10}2^3+\log_{10}3}{\log_{10}3+\log_{10}10^2-\log_{10}2^2}$$

$$=\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+2-2\log_{10}2}$$

であり，$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$ とおくと

$$\log_{75}24=\boldsymbol{\frac{3a+b}{2+b-2a}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $3<4<10$ より

$$\log_{10}3<\log_{10}4<1 \qquad \therefore\quad \frac{\log_{10}3}{3}<1,\ \frac{\log_{10}4}{4}<1$$

であり，$\sqrt[3]{3}>1$ なので

$$\frac{\log_{10}3}{3}<\sqrt[3]{3},\ \frac{\log_{10}4}{4}<\sqrt[3]{3} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

次に

$$\frac{\log_{10}3}{3}=\log_{10}3^{\frac{1}{3}},\ \frac{\log_{10}4}{4}=\log_{10}4^{\frac{1}{4}}$$

であるから，$\dfrac{\log_{10}3}{3}$ と $\dfrac{\log_{10}4}{4}$ の大小は，$3^{\frac{1}{3}}$ と $4^{\frac{1}{4}}$ の大小に一致する．すると

$$(3^{\frac{1}{3}})^{12}=3^4=81,\ (4^{\frac{1}{4}})^{12}=4^3=64$$

$$\therefore\quad 3^{\frac{1}{3}}>4^{\frac{1}{4}}$$

であるから

$$\frac{\log_{10}3}{3}>\frac{\log_{10}4}{4}$$

以上より

$$\boldsymbol{\frac{\log_{10}4}{4}<\frac{\log_{10}3}{3}<\sqrt[3]{3}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $a^x = A$ とおくと与えられた不等式は

$$\frac{1}{a}A^2 - a^2A - \frac{1}{a^2}A + a \leqq 0$$

$$aA^2 - (a^4+1)A + a^3 \leqq 0 \ (\because \quad a > 0) \quad (aA-1)(A-a^3) \leqq 0 \ \cdots\cdots\cdots \ ①$$

$0 < a < 1$ より

$$0 < a^3 < \frac{1}{a}$$

なので，①を A について解くと

$$a^3 \leqq A \leqq \frac{1}{a} \qquad \therefore \quad a^3 \leqq a^x \leqq a^{-1}$$

よって，底 a は $0 < a < 1$ なので

$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 3}$ (答)

(2) 真数条件より

$x+1>0$ かつ $x-2>0$ かつ $x+4>0$

$\therefore \quad x > 2$

であり，このもとで与えられた不等式を整理すると

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x-2) \geqq \log_{\frac{1}{2}}(x+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

底について，$0 < \dfrac{1}{2} < 1$ なので

$$(x+1)(x-2) \leqq 2(x+4)$$

$$x^2 - 3x - 10 \leqq 0$$

$$(x-5)(x+2) \leqq 0$$

よって，$x > 2$ のもとで上式を解くと

$\boldsymbol{2 < x \leqq 5}$ (答)

(3) 真数条件，および底の条件より

$x > 0,\ x \fallingdotseq 1$

のもとで考える．与式の底を 2 に統一すると，底の変換公式より

$$2\log_2 x - \frac{\log_2 2^3}{\log_2 x} \geqq 5$$

$\log_2 x = X$ とおくと

$$2X - \frac{3}{X} \geqq 5$$

(i) $X > 0$ のとき

$$2X^2 - 3 \geqq 5X$$

$$2X^2 - 5X - 3 \geqq 0$$

$$(2X+1)(X-3) \geqq 0$$

ゆえに，$X > 0$ のもとで解くと

$X \geqq 3$

$\therefore \quad \log_2 x \geqq 3$ すなわち $x \geqq 8$

(ii) $X < 0$ のとき

$$2X^2 - 3 \leqq 5X$$

$$2X^2 - 5X - 3 \leqq 0$$

$$(2X+1)(X-3) \leqq 0$$

ゆえに，$X<0$ のもとで解くと

$$-\frac{1}{2} \leqq X < 0$$

$\therefore \quad -\frac{1}{2} \leqq \log_2 X < 0$ すなわち $2^{-\frac{1}{2}} \leqq x < 1$

以上より

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x < 1,\ x \geqq 8} \qquad \text{(答)}$$

【3】(i) $\left|2^x-2^{-x}\right| \leqq \dfrac{15}{4}$ より

$$\left|2^x-2^{-x}\right|^2 \leqq \left(\frac{15}{4}\right)^2 \iff 2^{2x}-2+2^{-2x} \leqq \frac{225}{16}$$
$$\iff (2^x+2^{-x})^2-4 \leqq \frac{225}{16}$$
$$\iff (2^x+2^{-x})^2 \leqq \left(\frac{17}{4}\right)^2$$

よって，$2^x+2^{-x}>0$ より

$$2^x+2^{-x} \leqq \frac{17}{4}$$

また，$2^x>0$，$2^{-x}>0$ なので，相加・相乗平均の関係より

$$2^x+2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}$$
$$2^x+2^{-x} \geqq 2$$

等号成立は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のときなので，確かに成立する．

以上より

$$\boldsymbol{2 \leqq 2^x+2^{-x} \leqq \frac{17}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(ii) $2^x+2^{-x}=t$ とおくと

$$5(2^x+2^{-x})-(2^{2x}+2^{-2x})=5t-(t^2-2)=-\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{33}{4}$$

よって，(i) より，与式は $t=\dfrac{5}{2}$ で最大で，その最大値は

$$\boldsymbol{\frac{33}{4}} \qquad \text{(答)}$$

また，$t=\dfrac{17}{4}$ で最小で，その最小値は

$$\boldsymbol{\frac{83}{16}} \qquad \text{(答)}$$

である．

【4】(1) $\log_{10} 18^{35}$ の整数部分に着目する．

$$\log_{10} 18^{35} = 35\log_{10} 2\cdot 3^2 = 35(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3)$$
$$= 35 \times 1.2552 = 43.9320$$

であるから

$$43 < \log_{10} 18^{35} < 44$$

$\therefore \quad 10^{43} < 18^{35} < 10^{44}$

よって，18^{35} のけた数は

44桁　　(答)

(2) (1) より

$$18^{35} = 10^{43} \times 10^{0.9320}$$

であるから，18^{35} の最高位の数字を k とすると，k は

$$k \leqq 10^{0.9320} < k+1$$

$\therefore \quad \log_{10} k \leqq 0.9320 < \log_{10}(k+1)$

をみたす自然数（$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$）である．ここで

$$\log_{10} 8 = 3\log_{10} 2 = 0.9030$$
$$\log_{10} 9 = 2\log_{10} 3 = 0.9542$$

$\therefore \quad \log_{10} 8 < 0.9320 < \log_{10} 9$

であるから，$k = 8$ となり，求める 18^{35} の最高位の数字は

8　　(答)

である．

【5】(1) $a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}=A\ (A>0)$ とおくと

$$A^2=(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})^2=a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}+2=5$$

であり，$A>0$ より

$$A=a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\sqrt{5}} \qquad (答)$$

次に，$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$ の両辺を 2 乗して

$$a+a^{-1}+2=9 \qquad \therefore\quad a+a^{-1}=7$$

さらに両辺を 2 乗して

$$a^2+a^{-2}+2=49 \qquad \therefore\quad a^2+a^{-2}=\mathbf{47} \qquad (答)$$

(2) 底の変換公式より底を 2 にすると

$$\begin{aligned}\log_{30}250&=\frac{\log_2 250}{\log_2 30}\\&=\frac{\log_2 5^3\cdot 2}{\log_2 2\cdot 3\cdot 5}\\&=\frac{\log_2 5^3+\log_2 2}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5}\end{aligned}$$

$\log_2 3=a,\ \log_2 5=b$ であるので

$$\log_{30}250=\boldsymbol{\frac{1+3b}{1+a+b}} \qquad (答)$$

(3) 底を 2 にそろえると

$$8^{\log_2 10}=2^{3\log_2 10}$$

よって，$8^{\log_2 10}$ と 2^{10} の大小は，$3\log_2 10$ と 10 の大小に一致して

$$3\log_2 10=\log_2 10^3=\log_2 1000$$

$$10=\log_2 2^{10}=\log_2 1024$$

$\therefore\quad 3\log_2 10<10$

であるから

$$\boldsymbol{8^{\log_2 10}<2^{10}} \qquad (答)$$

【6】(1) $a^x = A$ とおくと，与えられた不等式は

$$\frac{1}{a}A^2 - 8aA - \frac{1}{a^2}A + 8 < 0 \iff aA^2 - (8a^3+1)A + 8a^2 < 0$$

$$\iff (aA-1)(A-8a^2) < 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{a} > 2,\ 0 < 8a^2 < 2 \qquad \therefore\ 8a^2 < \frac{1}{a}$$

であるから，①を解くと

$$8a^2 < A < \frac{1}{a} \qquad \therefore\ 8a^2 < a^x < a^{-1}$$

ここで，底を a とする対数をとると $0 < a < \dfrac{1}{2}$ より

$\boldsymbol{-1 < x < 3\log_a 2 + 2}$　(答)

(2) 真数条件より

$5x+4>0$ かつ $x+3>0$ かつ $x-4>0$

$\therefore\ x > 4$

このもとで，与えられた不等式において対数の底を 2 に統一すると

$$2\cdot\frac{\log_2(5x+4)}{\log_2 4} + \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 \frac{1}{2}} \geqq \log_2(x-4)$$

$$\iff \log_2(5x+4) - \log_2(x+3) \geqq \log_2(x-4)$$

$$\iff \log_2(5x+4) \geqq \log_2(x+3)(x-4)$$

よって，底が $2>1$ なので

$5x+4 \geqq (x+3)(x-4)$

$x^2 - 6x - 16 \leqq 0$

$(x+2)(x-8) \leqq 0$

$x > 4$ のもとで上式を解くと

$\boldsymbol{4 < x \leqq 8}$　(答)

【7】(1) $2^{-x}=X$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$ より

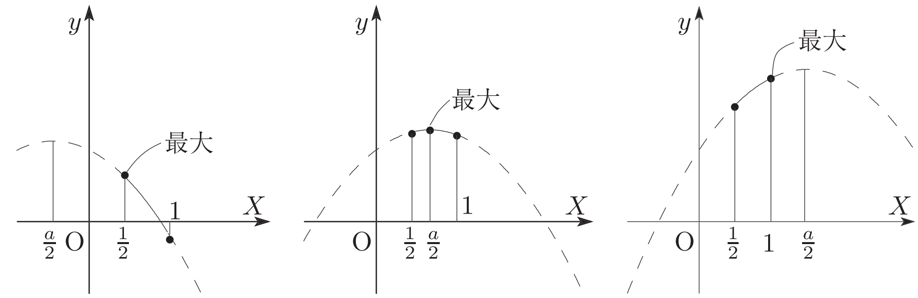
$$\frac{1}{2} \leqq X \leqq 1$$

また

$$y=-X^2+aX+2=-\left(X-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+2$$

であるから，軸 $X=\dfrac{a}{2}$ と区間の端 $\dfrac{1}{2}$, 1 の大小で場合を分ける．

$\frac{a}{2} \leqq \frac{1}{2}$ のとき　　$\frac{1}{2} \leqq \frac{a}{2} \leqq 1$ のとき　　$1 \leqq \frac{a}{2}$ のとき



(i) $\dfrac{a}{2} \leqq \dfrac{1}{2}$ すなわち $a \leqq 1$ のとき，y は $X=\dfrac{1}{2}$ で最大で，その最大値は

$$-\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+2=\frac{a}{2}+\frac{7}{4}$$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1$ すなわち $1 \leqq a \leqq 2$ のとき，y は $X=\dfrac{a}{2}$ で最大で，その最大値は

$$\frac{a^2}{4}+2$$

(iii) $1 \leqq \dfrac{a}{2}$ すなわち $2 \leqq a$ のとき，y は $X=1$ で最大で，その最大値は

$$-1+a+2=a+1$$

以上まとめると，求める最大値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \leqq 1}\textbf{のとき，}\ \boldsymbol{\dfrac{a}{2}+\dfrac{7}{4}} \\ \boldsymbol{1 \leqq a \leqq 2}\textbf{のとき，}\ \boldsymbol{\dfrac{a^2}{4}+2} \\ \boldsymbol{2 \leqq a}\textbf{のとき，}\ \boldsymbol{a+1} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) $xy=125$ より，$x>0$, $y>0$ なので，両辺底 5 の対数をとると

$$\log_5 xy=\log_5 125 \qquad \therefore \quad \log_5 x+\log_5 y=3$$

$\log_5 x=X$, $\log_5 y=Y$ とおくと

$$X+Y=3 \qquad \therefore \quad Y=3-X$$

をみたすので

$$(\log_5 x)(\log_5 y)=XY=X(3-X)$$
$$=-X^2+3X=-\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

よって，$(\log_5 x)(\log_5 y)$ の最大値は

$$\boldsymbol{\frac{9}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【8】$\log_{10} 1.6^{100}$ の整数部分に着目する．

$$\begin{aligned}\log_{10} 1.6^{100} &= 100\log_{10}\frac{16}{10} = 100(\log_{10} 2^4 - \log_{10} 10)\\ &= 100(4\log_{10} 2 - 1) = 20.4\end{aligned}$$

であるから

$20 < \log_{10} 1.6^{100} < 21$

$\therefore\quad 10^{20} < 1.6^{100} < 10^{21}$

よって，1.6^{100} の整数部分のけた数は

21 桁　　(答)

である．

３章　数列（１）

問題

【1】(1) 与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

a_n ： 5, 6, 8, 12, 20, 36, $\cdots$

b_n ： 1, 2, 4, 8, 16, $\cdots$

$\{b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列なので

$$b_n = 2^{n-1}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$$

$$= 5 + 1 \cdot \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = \boldsymbol{2^{n-1}+4} \qquad \text{(答)}$$

であり，$n=1$ のときも成立する．

(2) 与式より $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $-6n+13$ なので，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-6k+13) \ \cdots\cdots \ (*)$$

$$= 1 - 6 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 13(n-1)$$

$$= \boldsymbol{-3n^2+16n-12} \qquad \text{(答)}$$

であり，$n=1$ のときも成立する．

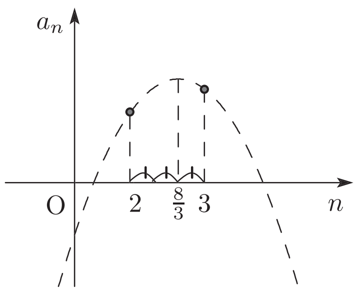
また

$$a_n = -3\left(n-\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{28}{3}$$

と変形できるので，a_n は

$$n = 3$$

で最大となり，求める最大値は，$\boldsymbol{a_3 = 9}$　　(答)



<別解>数列 $\{a_n\}$ の最大値を調べるところでは

正の項を加えれば，総和は増加する

負の項を加えれば，総和は減少する

ことに着目すると，$(*)$ において

$$-6k+13>0 \qquad \therefore \quad k=1,\ 2$$

となるので，a_n は

$$n-1=2 \qquad \therefore \quad n=3$$

のとき最大となる．

【2】(1) $$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}+nk)=\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}+n\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=4\cdot\frac{1-2^n}{1-2}+n\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\boldsymbol{2^{n+2}-4+\frac{n^2(n+1)}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき
$$\sum_{k=n}^{2n}k^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{n(16n^2+12n+2-2n^2+3n-1)}{6}$$
$$=\frac{n(14n^2+15n+1)}{6}=\boldsymbol{\frac{n(n+1)(14n+1)}{6}} \qquad \text{(答)}$$
これは，$n=1$ のときも成り立つ.

(3) $n-k=i$ とおくと
$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のとき，$i=n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 0$
であるから
$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)^2=\sum_{i=0}^{n-1}i^2$$
$$=\boldsymbol{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}} \qquad \text{(答)}$$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ より
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{n+1}-1} \qquad \text{(答)}$$

(5) $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ より
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\boldsymbol{\frac{n}{n+1}} \qquad \text{(答)}$$

(6) $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ より
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

なので

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot 4}}\right)+\cdots+\left\{\cancel{\frac{1}{n(n+1)}}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = S_n$ とする．$r \neq 1$ のとき

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

であり，2 式の差をとると

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

よって，両辺を $1-r$ $(\neq 0)$ で割って

$$S_n = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

$r = 1$ のとき

$$S_n = a + a + \cdots + a = an$$

以上より

$$S_n = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-r^n}{1-r} & (r \neq 1) \\ an & (r = 1) \end{cases}$$

が成立する．（証明終）

(2) $r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1} \\ rS_n &= \quad r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \end{aligned}$$

であり，2 式の差をとると

$$\begin{aligned} (1-r)S_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n \\ &= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n = \frac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

よって，$S_n = \dfrac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$

また，$r = 1$ のとき

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

以上より，求める和は

$$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} \dfrac{1-(n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2} & (r \neq 1) \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & (r = 1) \end{cases}}$$ (答)

【4】(1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

a_n ： 5, 11, 21, 35, 53, $\cdots$

b_n ： 6, 10, 14, 18, $\cdots$

$\{b_n\}$ は初項 6，公差 4 の等差数列であるから

$$b_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k+2) \\ &= 5 + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1) \\ &= \boldsymbol{2n^2 + 3} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

であり，$n = 1$ のときも成立する．

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(2k^2+3) \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3n \\ &= \boldsymbol{\frac{n(2n^2+3n+10)}{3}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【5】(1) $\sum_{k=1}^{10} a_k$ は初項 1，公比 $\sqrt{2}$ の等比数列の初項から第 10 項までの和なので

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 1 \cdot \frac{1-(\sqrt{2})^{10}}{1-\sqrt{2}} = \frac{32-1}{\sqrt{2}-1}$$
$$= \mathbf{31(\sqrt{2}+1)} \qquad \text{(答)}$$

$\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} (\sqrt{2})^{2k-1} = \sum_{k=1}^{10} \sqrt{2} \cdot 2^{k-1}$ は初項 $\sqrt{2}$，公比 2 の等比数列の初項から第 10 項までの和なので

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sqrt{2} \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = \mathbf{1023\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (i) $$\sum_{k=1}^{n} (2^k + k2^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} \sum_{k=1}^{n} k$$
$$= 2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} + 2^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \boldsymbol{(n^2+n+2)2^n - 2} \qquad \text{(答)}$$

(ii) $k-2=i$ とおくと

$k = 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n$ のとき，$i = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2n-2$

であるから

$$\sum_{k=2}^{2n} (k-2)^2 = \sum_{i=0}^{2n-2} i^2 = \frac{(2n-2)(2n-1)(4n-3)}{6}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(n-1)(2n-1)(4n-3)}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(iii) $\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}$ は初項 2^n，公比 $2^{-1} = \frac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 $n+1$ 項までの和であるから

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} = 2^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^{n+1}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} = \boldsymbol{2^{n+1}-1} \qquad \text{(答)}$$

(iv) $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$ より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \boldsymbol{\frac{n}{2n+1}} \qquad \text{(答)}$$

【6】求める和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(k\cdot 2^k - 2^{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$

であり，$T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$ とおくと

$$\begin{array}{rlllllll} T_n = & 1\cdot 2 & +2\cdot 2^2 & +3\cdot 2^3 & +\cdots & +n\cdot 2^n & \\ 2T_n = & & 1\cdot 2^2 & +2\cdot 2^3 & +\cdots & +(n-1)2^n & +n\cdot 2^{n+1} \end{array}$$

よって，2 式の差をとると

$$\begin{aligned} T_n - 2T_n &= 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n\cdot 2^{n+1} \\ &= 2\cdot\frac{1-2^n}{1-2} - n\cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 2 - n\cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

であるから

$$T_n = n\cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

一方，$\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k-1}$ は初項 1，公比 2 の等比数列の初項から第 n 項までの和なので，求める和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= n\cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 - 1\cdot\frac{1-2^n}{1-2} \\ &= n\cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 - (2^n - 1) \\ &= \boldsymbol{(2n-3)\cdot 2^n + 3} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

M3MB
難関大数学Ⅰ A Ⅱ B
難関大文系数学 M

Z-KAI

会員番号		氏　名	